M. V. Mulyukov, Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 2055–2079

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.207.199.55

April 26, 2023, 13:34:35

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 2055–2079 (2019)

УДК 517.929

DOI 10.33048/semi.2019.16.146

MSC 34K06, 34K20

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. ЧАСТЬ II

М.В. МУЛЮКОВ

ABSTRACT. The system of two linear autonomous differential equations with a limited delay and a term without delay is considered. Complete classification of all three-parameter systems is obtained. For every such system the stability criterion in analytic and geometric form is obtained.

Keywords: system of differential equations with delay, autonomous equations, asymptotic stability, stability domain, D-subdivision method.

1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Настоящая статья является второй частью работы, посвященной исследованию трехпараметрических систем вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = f(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

в следующих обозначениях и предположениях: A, B — вещественные 2×2 -матрицы, $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $h > 0$, начальная вектор-функция ψ суммируема на $[-h, 0]$, вектор-функция f локально суммируема.

Напомним, что система (1) называется трехпараметрической, если среди коэффициентов ее характеристического уравнения

$$\chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0$$

ровно три отличны от нуля и принимают произвольные вещественные значения.

MULYUKOV, M.V., STABILITY OF THREE-PARAMETER SYSTEMS OF TWO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY. PART II.

© 2019 Мүлюков М.В.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

Поступила 12 июля 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

Приведем характеристические уравнения всех трехпараметрических систем:

$$(31) \quad \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(32) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(33) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(34) \quad \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(35) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + z^2 e^z = 0,$$

$$(36) \quad \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(37) \quad \beta + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(38) \quad \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(39) \quad \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(40) \quad \chi \operatorname{ch} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0.$$

Уравнения (31)–(38) рассмотрены в [4]. Прежде, чем перейти к исследованию оставшихся двух уравнений, приведем некоторые сведения о двухпараметрических характеристических уравнениях вида

$$(11) \quad f_0(z) + p_1 f_1(z) + p_2 f_2(z) = 0,$$

где $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\} \in \mathbb{R}^2$.

2. НАБОРЫ D-РАЗБИЕНИЯ

Доказательства приведенных в данном параграфе утверждений можно найти в работе [5] (за исключением леммы 1, доказательство которой приведено ниже).

Напомним, что любая точка D-разбиения принадлежит единственной линии D-разбиения, которые делятся на два класса: прямые и кривые D-разбиения. В свою очередь, двухпараметрические характеристические уравнения делятся на четыре рода, отличающиеся свойствами областей и линий D-разбиения. Подробное описание каждого типа можно найти в [4].

В общем случае область устойчивости двухпараметрического характеристического уравнения может быть неограниченной и состоять из любого числа компонентов связности (в том числе, и бесконечного). Кроме того, взаимное расположение кривых D-разбиения может быть сложным, а при движении вдоль выделенного направления в пространстве параметров абсолютный индекс областей может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Далее будем полагать, что $\mathbf{u}(\varphi) \neq 0$, то есть характеристическое уравнение четвертого рода исключено из рассмотрения.

Определение 1. Будем называть набором D-разбиения произвольное множество линий D-разбиения, каждой из которых поставлено в соответствие натуральное число, называемое *весом этой линии в наборе*.

Будем говорить, что наборы ω_1 и ω_2 равны, если они содержат одни и те же линии D-разбиения и вес каждой линии в ω_1 равен весу этой линии в ω_2 .

Для краткости вместо термина *набор D-разбиения* будем использовать термин *набор*. Кроме того, удобно оперировать не самими линиями D-разбиения, а их проекциями, поэтому слова «кривая C_n (прямая L_n) принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе» следует понимать следующим образом: «кривая D-разбиения (прямая D-разбиения), проекция которой — это кривая C_n (прямая L_n), принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе».

Определение 2.

- *Точкой набора* назовем точку D-разбиения, принадлежащую какой-либо линии данного набора.
- *Областью набора* назовем линейно связное открытое множество $V \in \mathbb{R}^2$ такое, что:
 - V не содержит проекции ни одной точки D-разбиения данного набора,
 - любое линейно связное открытое множество, собственным подмножеством которого является V , содержит проекцию хотя бы одной точки D-разбиения данного набора.
- Назовем набор *регулярным*, если он не содержит нерегулярные прямые D-разбиения.
- Точку в $\mathbb{R}^2$ будем называть *особой точкой набора*, если она является проекцией хотя бы одной нерегулярной точки набора; в противном случае точку $\mathbb{R}^2$ будем называть *неособой точкой набора*.
- Назовем ломаную $Q \subset \mathbb{R}^2$ *регулярной ломаной относительно набора*, если она не проходит через особую точку набора, и ни одно звено ломаной не принадлежит ни проекции прямой D-разбиения данного набора, ни главной прямой.

Пусть Q — регулярная ломаная относительно набора ω . Параметризуем эту ломаную взаимно-однозначной непрерывной функцией $\mathbf{k}: [0, 1] \rightarrow Q$.

Обозначим через $\{\mathbf{k}(t_n), \varphi_n\}$ ($n = \overline{1, M}$, $t_n \in [0, 1]$) множество точек D-разбиения набора, проекции которых принадлежат Q . Если $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n \pm 0)) = 0$, то Q содержит отрезок, принадлежащий проекции прямой D-разбиения или главной прямой, следовательно, $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n \pm 0)) \neq 0$.

Определение 3. Пусть ω — регулярный набор, а Q — ломаная, регулярная относительно набора ω . Будем называть *индексом ломаной Q относительно набора ω* число

$$\rho_{\omega}(Q) = \sum_{n=1}^M v_n s_n,$$

где v_n — вес в наборе ω той линии набора, которой принадлежит точка набора $(\mathbf{k}(t_n), \varphi_n)$, а s_n вычислено по следующему правилу:

- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) < 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) > 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n \in (0, 1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) \operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n + 0)) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) < 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}(\mathbf{k}(t_n - 0)) > 0$, то $s_n = 0$.

Определение 4. Будем называть регулярный набор *индексируемым*, если относительно этого набора индекс любой простой регулярной замкнутой ломаной равен нулю.

Определение 5. Пусть $\mathbf{a}$ — неособая точка индексируемого набора ω ; присвоим ей некоторое целое число $\rho_\omega(\mathbf{a})$. Тогда любой другой неособой точке $\mathbf{b}$ присвоим число $\rho_\omega(\mathbf{b})$ по формуле $\rho_\omega(\mathbf{b}) = \rho_\omega(\mathbf{a}) + \rho_\omega(Q)$, где Q — некоторая регулярная относительно набора ломаная с началом в $\mathbf{a}$ и концом в $\mathbf{b}$. Числа $\rho_\omega(\mathbf{a})$ и $\rho_\omega(\mathbf{b})$ будем называть *индексом точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ относительно ω* .

Таким образом, в индексируемом наборе существует бесконечно много способов присвоить относительные индексы областям, однако для всех точек набора разность индексов в двух различных индексациях одинакова.

Определение 6. Объединением наборов ω_1 и ω_2 назовем набор ω_0 , состоящий из линий, входящих хотя бы в один из наборов. Вес линии в наборе ω_0 равен сумме ее весов в наборах ω_1 и ω_2 .

Определение 7. Будем называть набор *полным*, если выполняются следующие пункты:

- набор содержит все линии D-разбиения;
- прямая, соответствующая нулевой частоте, имеет вес в данном наборе, равный одному;
- вес любой линии набора, кроме прямой, соответствующей нулевой частоте, равен двум.

Отметим, что в полном наборе прямая, соответствующая нулевой частоте, может и не существовать (что эквивалентно условию $f_1(0) = f_2(0) = 0$). Кроме того, полный набор всегда существует и единственен.

Напомним, что через $\rho(\mathbf{r})$ обозначен абсолютный индекс точки $\mathbf{r}$, то есть количество корней характеристического уравнения $F(\cdot; \mathbf{r}) = 0$ с неотрицательной вещественной частотой.

Теорема 1. Пусть полный набор ω может быть представлен в виде объединения не более чем счетного множества индексируемых наборов $\{\omega_n\}$ и существуют неособая точка $\mathbf{a}$ набора ω и номер t такие, что для любого $n > t$ имеем $\rho_{\omega_n}(\mathbf{a}) = 0$. Тогда полный набор индексируем и существует целое число N такое, что для любой неособой точки $\mathbf{b}$ имеем:

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho_\omega(\mathbf{b}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{b}); \\ 2) \quad \rho(\mathbf{b}) &= N + \rho_\omega(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Определение 8. Индексируемый набор ω назовем *элементарным*, если он не может быть представлен в виде объединения двух различных непустых индексируемых наборов.

Перечислим основные типы элементарных наборов.

Определение 9. Набор, состоящий из нестационарной прямой без центральной точки, будем называть *I-набором*.

Определение 10. Набор, состоящий из кривой без концевых точек с весом 2, будем называть *S-набором*.

Определение 11. Будем называть *T-набором* набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и нестационарной прямой L_m с весом 1 таких, что кривая имеет ровно одну концевую точку, совпадающую с центральной точкой прямой (то есть либо $\theta_m = \xi_n$, либо $\theta_m = \xi_{n+1}$).

Определение 12. Набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и прямых L_m, L_{m+1} с весом 1 таких, что обе концевые точки кривой существуют и совпадают с центральными точками прямых, будем называть H -набором.

Теорема 2. I -набор, T -набор, S -набор и H -набор элементарны.

Теорема 3. Пусть $\Delta(\varphi) \neq 0$ и у функций $\Delta, \Delta', u_1, u'_1, u_2, u'_2$ нет общего корня. Тогда полный набор может быть представлен как объединение не более чем счетного множества S -, T - и H -наборов.

Лемма 1. Рассмотрим S -набор, состоящий из кривой C_n такой, что выполняются следующие условия:

- функция S_2 имеет единственный экстремум на интервале (ξ_n, ξ_{n+1}) ;
- $\lim_{\varphi \rightarrow \xi_n+0} S_1^{-1}(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \xi_{n+1}-0} S_1^{-1}(\varphi) = 0$;
- $\lim_{\varphi \rightarrow \xi_n+0} S_1(\varphi) \lim_{\varphi \rightarrow \xi_{n+1}-0} S_1(\varphi) < 0$.

Тогда из данной кривой можно сформировать S -набор такой, что выполняются следующие условия:

- а) существует ровно две неограниченные области набора,
- б) множество ограниченных областей набора конечно,
- с) существует способ индексации набора, при котором относительный индекс любой области равен $-2, 0$ или 2 .

Доказательство. Если кривая C_n простая, то, очевидно, существуют ровно две области набора. Эти области неограниченны. Если присвоить одной из них нулевой относительный индекс, то относительный индекс другой области равен 2 или -2 .

Пусть C_n имеет точки самопересечения. Докажем, что в этом случае существует конечное число областей набора, которым можно присвоить в качестве относительного индекса число из следующего набора: $-2, 0, 2$.

Обозначим через φ^* точку экстремума функции S_2 на интервале (ξ_n, ξ_{n+1}) . Без потери общности будем полагать, что это точка максимума. Обозначим $a = S_2(\varphi^*)$. Существуют $\varphi_1 < \varphi_2$ из интервала (ξ_n, ξ_{n+1}) такие, что $S(\varphi_1) = S(\varphi_2)$, $S_1(\varphi) < S_1(\varphi_1)$ при $\varphi < \varphi_1$ и $S_1(\varphi) > S_1(\varphi_2)$ при $\varphi > \varphi_2$. Иными словами, выше точки $S(\varphi_1)$ нет точек самопересечения кривой C_n . Обозначим $b = S_2(\varphi_1)$.

Функция S_2 осуществляет взаимно однозначное отображение интервалов (φ_1, φ^*) , (φ^*, φ_2) на интервал (a, b) . Поэтому можно обратить функцию на каждом из этих интервалов: S_2^{-1} отображает (a, b) на (φ_1, φ^*) , а $\hat{S}_2^{-1}$ отображает (a, b) на (φ^*, φ_2) . Коль скоро функция S_2 аналитична за исключением точки φ^* , то и функции $S_2^{-1}, \hat{S}_2^{-1}$ аналитичны на (a, b) . Тогда $S_1(S_2^{-1})$ и $S_1(\hat{S}_2^{-1})$ являются аналитическими на (a, b) функциями.

Точки самопересечения кривой C_n определяются из решения уравнения $S_1(S_2^{-1}(r_2)) = S_1(\hat{S}_2^{-1}(r_2))$. На конечном отрезке $[a, b]$ множество корней этого уравнения конечно. Обозначим их через $\{d_n\}$ ($n = \overline{1, m}$) так, что $a = d_0 < d_1 < \dots < d_m = b$.

Следовательно, при каждом $n = \overline{1, m}$ в полосе $r_2 \in [d_{n-1}, d_n]$ существует единственная ограниченная область набора (петля кривой C_n). Обозначим эту область через D_n . Таких областей конечное число. Кроме них существуют две неограниченные области: область D_0 , граница которой совпадает с кривой C_n , и область D_{m+1} , граница которой состоит из двух участков этой кривой: $C_n^{(\xi_n, \varphi_1)} \cup C_n^{(\varphi_2, \xi_{n+1})}$.

Пусть относительный индекс области D_0 равен нулю. Любая другая область набора имеет с D_0 общую границу — участок кривой C_n без самопересечений, потому относительный индекс этих областей равен либо 2 , либо -2 . $\square$

На рис. 1 изображена кривая, удовлетворяющая требованиям данной леммы, где $m = 3$. Области D_0 и D_4 неограниченны, области D_1, D_2 и D_3 ограничены. Стрелочками обозначено направления положительного обхода кривой. Если данная кривая — положительна, то относительный индекс области D_0 равен нулю, областей D_1 и D_3 равен двум, а областей D_2 и D_4 — минус двум.

Рис. 1. Относительные индексы S-набора

Рис. 2. Область D_9 (выше)

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Уравнение (39): $\beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область D_9 , состоящую из точек $\mathbf{r}$, удовлетворяющих условиям: $r_3 > -1$, $r_1 \in (-r_3, \psi^2 - r_3 \psi \operatorname{ctg} \psi)$, где ψ — единственный корень уравнения $r_3 = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \pi)$, и $r_2 \in (0, \eta^2 \cos \eta + r_3 \eta \sin \eta)$, где η — единственный корень уравнения $r_1 = \varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \psi)$. Эта область изображена на рис. 2.

Теорема 4. Для того чтобы все корни уравнения (39) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\beta, \zeta, \mu\}$ принадлежала области D_9 .

Лемма 2. Функция

$$f(\varphi) = \frac{\varphi^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}$$

отображает отрезок $[\pi k, \pi(k+1)]$ в $[\pi^2 k^2, \pi^2(k+1)^2]$ при любом $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Проведем замену $\psi = 2\varphi$ и будем рассматривать функцию

$$g(\psi) = 4f(\varphi) = \frac{\psi(\psi + \sin \psi)}{(\psi - \sin \psi)}.$$

Итак, требуется показать, что g отображает отрезок $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ на $[4\pi^2 k, 4\pi^2(k+1)^2]$ при любом $k \in \mathbb{N}_0$. Имеем

$$g'(\psi)(\psi - \sin \psi)^2 = \psi(\psi^2(1 + \cos \psi) - \sin \psi(\psi + \sin \psi)),$$

поэтому на интервале $(\pi(2k+1), 2\pi(k+1))$ функция g монотонна, следовательно, g взаимно-однозначно отображает данный интервал в себя.

Докажем, что при $\psi \in [2\pi k, \pi(2k+1)]$ имеем $4\pi^2 k^2 \leq g(\psi) \leq 4\pi^2(k+1)^2$. Данные неравенства эквивалентны следующим:

$$(60) \quad (\psi^2 - 4\pi^2 k^2)\psi \geq -\sin \psi(\psi^2 + 4\pi^2 k^2),$$

$$(61) \quad \frac{2 \sin \psi}{\psi - \sin \psi} \leq \frac{4\pi^2(n+1)^2}{\psi^2} - 1.$$

Неравенство (60) выполняется в силу $\sin \psi > 0$.

Усилим неравенство (61): $2/(2\pi k - 1) < (4k + 3)/(2k + 1)^2$ и перепишем его в виде $8k^2(\pi - 1) + 6(\pi - 2)k - 5 > 0$, которое выполняется при любом натуральном k в силу того, что модули корней данного квадратного трехчлена меньше единицы.

Итак, остается показать, что $g(\psi) \leq 4\pi^2$, если $\psi \in (0, \pi]$. Усилим доказываемое неравенство: $2\psi^3/(\psi - \sin \psi) < 4\pi^2$, и перепишем в виде: $\psi^2/(2\pi^2) < 1 - \sin \psi/\psi$. Вновь усилим полученное неравенство: $\psi^2/(2\pi^2) < 1 - \cos(\psi/2)$, и запишем в виде: $\psi^2/(2\pi)^2 < \sin^2(\psi/4)$. Таким образом, приходим к неравенству $\psi < 2\pi \sin(\psi/4)$, которое очевидно выполняется при $\psi \in (0, \pi]$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Уравнение (39) будем рассматривать как семейство двухпараметрических уравнений (11) первого рода, где $p_1 = \zeta$, $p_2 = \beta$, а μ — параметр семейства.

Случай $\mu = 0$ был рассмотрен в работы [5], поэтому далее будем полагать $\mu \neq 0$.

Рис. 3. Области D-разбиения при $\mu = 0$

Рис. 4. Области D-разбиения при $\mu = 1$

Имеем $\Delta(\varphi) = -\sin \varphi$,

$$\mathbf{u}(\varphi) = \{-\varphi^2 \sin \varphi + \mu \varphi \cos \varphi, -\varphi \sin \varphi(\varphi \cos \varphi + \mu \sin \varphi)\},$$

следовательно, $\theta_0 = 0$, $\xi_n = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}_0$, то есть имеется единственная прямая L_0 и счетное множество кривых C_n , которые задаются отображением

$$\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2 - \mu \varphi \operatorname{ctg} \varphi, \varphi^2 \cos \varphi + \mu \varphi \sin \varphi\}.$$

Прямая L_0 нестационарна, а ее центральная точка совпадает с концевой точкой кривой C_0 и имеет координаты $\mathbf{u}'(0)/\Delta'(0) = \{-\mu, 0\}$.

Обозначим через a_n единственный корень уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(\pi n, \pi(n+1))$, а через b_n — единственный корень уравнения $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ из того же интервала. Заметим, что при $n \geq 1$ корни a_n и b_n существуют при любых μ . Корень a_0 существует в том и только том случае, если $\mu > -1$, а корень b_0 — в том и только том случае, если $\mu > 0$.

Очевидно, $\mathbf{S}(a_n)$ и $\mathbf{S}(b_n)$ — единственные точки пересечения кривой C_n с координатными осями r_1 и r_2 соответственно. Заметим, что если $n > m$, то $S_1(a_n) > S_1(a_m) > 0$ и $|S_2(b_n)| > |S_2(b_m)|$.

Рассмотрим функцию S_2 . Уравнение $S'_2(\varphi) = 0$ можно переписать в виде

$$\mu = \frac{\varphi^2 \sin \varphi - 2\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi},$$

где функция, стоящая справа, монотонно возрастает в точках своей непрерывности. При $n \geq 1$ в точках $\varphi = \pi n$ данная функция принимает значение, равное -2 , а в точке $\varphi = 0$ — значение -1 . Следовательно, при $\mu \neq -2$ уравнение $S'_2(\varphi) = 0$ имеет единственное решение c_n на интервале $(\pi n, \pi(n+1))$ при $n \geq 1$. На интервале $(0, \pi)$ уравнение $S'_2(\varphi) = 0$ имеет единственное решение c_0 если и только если $\mu > -1$. Если $\mu = -2$, то уравнение $S'_2(\varphi) = 0$ не имеет решений на интервале $(\pi n, \pi(n+1))$ при $n \geq 1$. При $\mu \leq -1$ уравнение $S'_2(\varphi) = 0$ не имеет решений на интервале $(0, \pi)$.

Далее,

$$S_1(c_n) = \frac{(\mu + 2)(\cos^2 c_n + 1)}{c_n^2 + 2} \left(\frac{c_n}{\sin c_n} \right)^2,$$

$$S_2(c_n) = \frac{c_n^2(c_n - \sin c_n \cos c_n)(\mu + 2)}{\sin c_n(c_n^2 + 2)}.$$

Все корни функции Δ просты, поэтому полный набор является объединением одного T-набора ω_0 , состоящего из L_0 и C_0 , и счетного множества S-наборов ω_n , состоящих из единственной кривой C_n ($n \geq 1$).

Рассмотрим случай $\mu > 0$.

Имеем $S'_1(\varphi) > 0$ при $\varphi \neq \xi_n$, то есть проекция ни одной кривой D-разбиения не имеет точек самопересечения, а положительное направление обхода кривых — слева направо.

Рассмотрим функцию F_0 с областью определения $(-\mu, +\infty)$ и счетный набор функций F_n с областью определения $\mathbb{R}$ ($n \geq 1$). Разрешим уравнение $S_1(\varphi) = r_1$ при каждом фиксированном r_1 на интервале $(\pi n, \pi(n+1)) \cap \mathbb{R}_+$ и положим $F_n(r_1) = S_2(\varphi)$. Таким образом, кривая C_n задается уравнением $r_2 = F_n(r_1)$.

Рассмотрим простой S-набор ω_n при $n \geq 1$. Обозначим область, содержащую начало координат, через D_0^n и присвоим ей нулевой относительный индекс. Эта область задается неравенством $(F_n(r_1) - r_2)(-1)^n > 0$ при $r_1 \in \mathbb{R}$. Область, не содержащую начало координат, обозначим через D_1^n . Соответственно, эта область задается неравенством $(F_n(r_1) - r_2)(-1)^n < 0$ при $r_1 \in \mathbb{R}$. Найдем относительные индексы этих областей.

Кривая C_n пересекает ось r_1 в единственной точке $\mathbf{S}(a_n)$. Имеем $\Delta(a_n) = -\sin a_n$ и $S'_2(a_n) = -a_n(a_n - \sin a_n \cos a_n)/\sin a_n$. Следовательно четные кривые являются положительными, а в точке пересечения с осью r_1 направление положительного обхода кривой — снизу вверх; а нечетные кривые — отрицательны, а в точке пересечения с осью r_1 направление положительного обхода кривой — сверху вниз. По теореме 1 [4] и в том и другом случае первая компонента вектора $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{S}(a_n))$ положительна. Иными словами, $\rho_{\omega_n}(D_0^n) = 0$ и $\rho_{\omega_n}(D_1^n) = 2$.

Рассмотрим набор ω_0 . Этот набор не является простым, поскольку кривая C_0 пересекает L_0 в единственной точке $\mathbf{S}(a_0)$. Существует четыре области этого набора: D_0^0 , D_1^0 , D_2^0 и D_3^0 . Прямая L_0 — нестационарная, $\Delta'(0) = -1$, кривая C_0 отрицательна. Точки $\mathbf{S}(c_0)$, $\mathbf{S}(b_0)$ расположены выше оси r_1 , схематичное взаимное расположение линий набора изображено на рис. 5. Расставим относительные индексы областей следующим образом: $\rho_{\omega_0}(D_0^0) = 0$, $\rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1$, $\rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2$ и $\rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3$.

Особенно нас будет интересовать область D_0^0 , которая описывается неравенствами $0 < r_2 < F_0(r_1)$ и $r_1 \in (-\mu, S_1(a_0))$. Покажем, что $D_0^0 \subset D_0^n$ при любом $n \geq 1$. Для нечетных n это очевидно. Покажем, что из $r_1 \in (-\mu, S_2(b_n))$ вытекает $F_n(r_1) > F_0(r_1)$ при четных n . Для этого зафиксируем r_1 и найдем φ_0 и φ_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(0, \pi)$ и $(\pi n, \pi(n+1))$ соответственно. Очевидно, $\sin \varphi_0 > 0$ и $\sin \varphi_n > 0$. При этом $S_1(\pi/2) = \pi^2/4$, поэтому если $r_1 < \pi^2/4$, то $\cos \varphi_0 > 0$, а если $r_1 > \pi^2/4$, то $\cos \varphi_0 < 0$. Аналогично, из равенства $S_1(\pi(n+1/2)) = \pi^2(n+1/2)^2$ вытекает, что $\cos \varphi_n > 0$ при $r_1 < \pi^2(n+1/2)^2$ и $\cos \varphi_n < 0$ при $r_1 > \pi^2(n+1/2)^2$.

Пусть $r_1 < 0$, тогда $\cos \varphi_0 > 0$ и $\cos \varphi_n > 0$. Выразим из $r_1 = S_1(\varphi)$ выражение

$$\varphi \sin \varphi = \mu \varphi^2 / \sqrt{\mu^2 \varphi^2 + (\varphi^2 - r_1)^2}.$$

Функция, стоящая справа от знака равенства, монотонно возрастает, поэтому $\varphi_n \sin \varphi_n > \varphi_0 \sin \varphi_0$. С другой стороны, если переписать уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\varphi \operatorname{ctg} \varphi = (\varphi^2 - r_1)/\mu$, получим, что $\varphi_n \operatorname{ctg} \varphi_n > \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0$, следовательно,

$$S_2(\varphi_n) = \varphi_n \sin \varphi_n (\varphi_n \operatorname{ctg} \varphi_n + \mu) > \varphi_0 \sin \varphi_0 (\varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 + \mu) = S_2(\varphi_0).$$

Пусть $0 \leq r_1 < \pi^2/4$, тогда, переписав уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\varphi^2 - r_1}{\mu \varphi}$, получаем $\operatorname{ctg} \varphi_n > \operatorname{ctg} \varphi_0 > 0$, следовательно, $0 < \cos \varphi_0 < \cos \varphi_n$ и $0 < \sin \varphi_n < \sin \varphi_0$. Используя уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$, получим $S_2(\varphi) = \mu \varphi / \sin \varphi + r_1 \cos \varphi$, откуда получаем $S_2(\varphi_n) > S_2(\varphi_0)$.

Допустим, $\pi^2/4 \leq r_1 \leq \pi^2(n + 1/2)^2$, тогда, $S_2(\varphi_0) \leq \mu \varphi_0 \sin \varphi_0 \leq \pi \mu$, а $S_2(\varphi_n) \geq \mu \varphi_n / \sin \varphi_n \geq \mu \pi n$.

Область D_0^0 расположена левее полосы $\pi^2(n + 1/2)^2 < r_1 < S_2(b_n)$. Будем полагать, что оба выражения $S_2(\varphi_0)$, $S_2(\varphi_n)$ положительны: в этом случае $\operatorname{ctg} \varphi_0 < 0$ и $\operatorname{ctg} \varphi_n < 0$, поэтому уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ можно переписать в виде $|\varphi \operatorname{ctg} \varphi| = (r_1 - \varphi^2)/\mu$, откуда получаем $|\varphi_n \operatorname{ctg} \varphi_n| < |\varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0|$. Усилим последнее неравенство: $|\operatorname{ctg} \varphi_n| < |\operatorname{ctg} \varphi_0|$, из которого вытекает, что $\sin \varphi_n > \sin \varphi_0$, но тогда

$$S_2(\varphi_n) = \varphi_n \sin \varphi_n (\mu - |\varphi_n \operatorname{ctg} \varphi_n|) > \varphi_0 \sin \varphi_0 (\mu - |\varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0|) = S_1(\varphi_0).$$

Итак, $D_0^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n$, поэтому D_0^0 — единственная область с нулевым индексом относительно полного набора, а все остальные области D-разбиению имеют положительный индекс относительно полного набора. Известно [4, Теорема 12], [3, с. 130], что область устойчивости не пуста, следовательно, D_0^0 — область устойчивости. Эта область выделена жирной линией на рис. 4.

Рассмотрим случай $\mu < 0$.

Рассмотрим функцию

$$g(\varphi) = -\frac{2\varphi \sin^2 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}.$$

Уравнение $S_1'(\varphi) = 0$ равносильно уравнению $\mu = g(\varphi)$.

Имеем $\lim_{\varphi \rightarrow 0} g(\varphi) = -3$ и $g(\pi) = 0$, а g монотонно возрастает на интервале $(0, \pi)$, поэтому при $\mu \in (-3, 0)$ функция S_1 имеет единственный экстремум (максимум) на интервале $(0, \pi)$, а при $\mu \leq -3$ функция S_1 монотонно убывает на данном интервале.

Рис. 5. Набор ω_0 при $\mu > -1$

Рис. 6. Набор ω_0 при $\mu \leq -1$

Рассмотрим набор ω_0 . Имеем

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{S'_2(\varphi)}{S'_1(\varphi)} = 3 \frac{1 + \mu}{3 + \mu},$$

поэтому возможны два варианта качественного расположения областей набора. Если $\mu \in (-1, 0)$, то имеются три области: обозначим их так, как схематично изображено на рис. 5 и проиндексируем так:

$$\rho_{\omega_0}(D_0^0) = 0, \rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1, \rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2, \rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3.$$

Если $\mu \leq -1$, то областей всего 3: обозначим их так, как изображено на рис. 6 и проиндексируем следующим образом:

$$\rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1, \rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2, \rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3.$$

В дальнейшем нас будет особенно интересовать случай $\mu \in (-1, 0)$ и область D_0^0 . Рассмотрим прямоугольник

$$V_0 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : r_1 \in (0, 4\pi^2/9), r_2 \in (0, \pi)\}.$$

Покажем, что область D_0^0 принадлежит V_0 . Так как $S_2(\pi/2) = \mu\pi/2 < 0$, имеем $a_0 < \pi/2 < \eta$, где η — точка максимума функции S_1 , поэтому верхняя граница области D_0^0 представляет собой участок $C_0^{(0, a_0)}$, следовательно, для любой точки этой области выполняются неравенства

$$0 < r_1 < S_1(a_0) = \mu^2 + a_0^2 < 1 + \pi^2/4 < 4\pi^2/9,$$

$$0 < r_2 < \pi^2/4 < \pi.$$

Рассмотрим набор ω_n при $n \geq 1$. Характер кривой C_n зависит знака величины $2 + \mu$. Если $\mu < -2$, то $S_1(c_n) < 0$. Если $\text{ctg } \varphi < 0$, то $g(\varphi) > -2$, следовательно, если η — корень уравнения $\mu = g(\varphi)$, то $S_1(\eta) > 0$. Таким образом, при $\mu \leq -2$ кривая C_n простая, а при $\mu \in (-2, 0)$ может иметь петли.

Исследование петель — довольно трудоемкая задача, но, к счастью, нам достаточно знать только их возможное расположение и возможные относительные индексы.

Покажем, что при $\mu \in (-2, 0)$ все петли кривой C_n расположены в полуполосе

$$V_n = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : (-1)^n r_2 > 0, \pi^2 n^2 < r_1 < \pi^2 (n+1)^2\}.$$

На рис. 7 границы областей V_0 , V_1 и V_2 обозначены тонкими линиями.

Рис. 7. Области D-разбиения при $\mu = -0.01$

Рис. 8. Области D-разбиения при $\mu = -1$

Если η — корень уравнения $\mu = g(\varphi)$, то $S_1(\eta) = \eta^2 \frac{\eta + \sin \eta \cos \eta}{\eta - \sin \eta \cos \eta}$. Согласно лемме 2 если $\eta \in (\pi n, \pi(n+1))$, то $\pi^2 n^2 < S_1(\eta) < \pi^2(n+1)^2$. Все экстремумы функции S_1 принадлежат V_n , поэтому и все петли принадлежат полосе $\pi^2 n^2 < r_1 < \pi^2(n+1)^2$. Участок $C^{(\pi n, a_n)}$ расположен в полуплоскости $(-1)^n r_2 > 0$, а участок $C^{(a_n, \pi(n+1))}$ — в полуплоскости $(-1)^n r_2 < 0$. При этом $\operatorname{sgn} S_2(c_n) = (-1)^n$. Итак, мы доказали, что любая петля принадлежит полуполосе V_n и, кроме того, петли может образовывать только участок $C^{(\pi n, a_n)}$.

Итак, если $\mu \leq -2$, то имеются две неограниченные области набора: D_0^n (содержащее начало координат) и D_1^n (не содержащее начало координат) с относительными индексами 0 и 2 соответственно. Если $\mu \in (-2, 0)$, то согласно лемме 1 кроме этих двух неограниченных областей могут присутствовать конечное количество петель, относительный индекс которых не меньше, чем -2 . На рис. 9, 10 изображена кривая C_1 при различных значениях μ : в первом случае у кривой присутствует одна петля, а во втором — петли отсутствуют.

Рис. 9. Набор ω_1 при $\mu = -0.1$ Рис. 10. Набор ω_1 при $\mu = -1$

Докажем, что индекс точки относительно полного набора Ω равен абсолютному индексу областей. Для этого вычислим индекс начала координат: эта точка принадлежит пересечению областей $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_0^n$, а индекс этой точки относительно ω_0 равен двум, то есть $\rho(0, 0) = \rho_{\Omega}(0, 0) = 2$.

Итак, при $\mu \leq 1$ суммарный относительный индекс любой точки положителен, следовательно, область устойчивости пуста (рис. 10).

Пусть $\mu > -1$. Имеем $V_n \cap V_m = \emptyset$ при $m \neq n$. Следовательно, нулевой абсолютный индекс могут иметь лишь точки, расположенные внутри D_0^0 или петель кривых C_n . Однако, $V_n \subset D_2^0$ при четных n и $V_n \subset D_3^0$ при нечетных n , поэтому абсолютный индекс точек внутри петли, образуемой кривой C_n не меньше, чем n .

Докажем, что D_0^0 — подмножество области D_0^n при любом n . Предположим, что C_n пересекает V_0 , тогда из $S_1(\varphi) < 4\pi^2/9$, $\varphi > \pi$ вытекает $\mu \operatorname{ctg} \varphi > \varphi - 4\pi^2/(9\varphi) > 5\pi/9 > 1$, следовательно, $\operatorname{ctg} \varphi < -1$. Если n — четное, то $\cos \varphi < -\sqrt{2}/2$ и $\sin \varphi > 0$, поэтому $S_2(\varphi) < 0$. Если n — нечетное, то $\cos \varphi > \sqrt{2}/2$ и $\sin \varphi < 0$, следовательно, $S_2(\varphi) > \pi^2/\sqrt{2} > \pi$ — противоречие. Центральная точка прямой L_0 принадлежит D_0^n , следовательно, $D_0^0 \subset D_0^n$.

Итак, D_0^0 состоит из тех и только тех точек, абсолютный индекс которых равен нулю, а принадлежность $\{\zeta, \beta\}$ этой области и неравенство $\mu > -1$ эквивалентно тому, что точка $\{\zeta, \beta, \mu\}$ принадлежит $\mathcal{D}_9$. $\square$

3.2. **Уравнение (40):** $\chi \operatorname{ch} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим следующие функции:

$$g_1(\varphi) = -\frac{2\varphi \cos^2 \varphi}{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$g_2(\varphi) = -1 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi.$$

Рис. 11. Функции g_1 и g_2

Рис. 12. Функции W_+ , W_- , W_0 , W_1

Лемма 3. Если $\varphi \in [\pi n - \pi/4, \pi n + \pi/6]$, где $n \in \mathbb{N}$, то $g_1(\varphi) \leq -1$.

Доказательство. Неравенства $g_1(\varphi) \leq -1$ и $2\varphi \cos 2\varphi \geq \sin 2\varphi$ эквивалентны при $\varphi > 0$.

Предположим, что $\varphi \in [\pi n - \pi/4, \pi n]$, тогда $\cos 2\varphi \geq 0$ и $\sin 2\varphi \leq 0$, следовательно, $\sin 2\varphi \leq 0 \leq 2\varphi \cos 2\varphi$.

Пусть $\varphi \in (\pi n, \pi n + \pi/6]$, тогда $\cos 2\varphi \geq 1/2$ и $\sin 2\varphi < \sqrt{3}/2$, следовательно, $\sin 2\varphi < \pi < 2\varphi \cos 2\varphi$. $\square$

Лемма 4. Уравнение $g_1(\varphi) = g_2(\varphi)$ имеет единственное решение t^* на интервале $(\pi/2, \pi)$, причем $t^* < 3\pi/4$.

Доказательство. Функция g_2 монотонно возрастает на этом интервале и $g_2(\varphi) > -1$. В то же время если $g_1(\varphi) > -1$, то $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/4)$ согласно лемме 3. Далее,

$$(62) \quad g_1'(\varphi) = \frac{\sin 2\varphi(2\varphi^2 + \varphi \operatorname{ctg} \varphi - \cos^2 \varphi)}{(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)^2}.$$

Имеем

$$2\varphi^2 + \varphi \operatorname{ctg} \varphi - \cos^2 \varphi > \frac{\pi(\pi - 1)}{2} - 1 > 0,$$

поэтому g_1 убывает на интервале $(\pi/2, 3\pi/4)$, следовательно, существует единственная точка пересечения графиков функции g_1 и g_2 на этом интервале.

При $\varphi \in [3\pi/4, \pi)$ имеем $g_1(\varphi) < -1 < g_2(\varphi)$, поэтому $t^* < 3\pi/4$. $\square$

Обозначим $\mu^* = g_1(t^*)$. В силу $\operatorname{ctg} t^* > 0$ и $g_2(t^*) < 0$ имеем $\mu^* \in (-1, 0)$.

Примерно: $t^* \approx 1.92467$ и $\mu^* \approx -0.28898$.

Рассмотрим систему уравнений

$$(63) \quad \begin{cases} \varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi = \psi^2 + \mu \psi \operatorname{tg} \psi, \\ \varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi = \psi \sin \psi - \mu \cos \psi. \end{cases}$$

Лемма 5. Если $\mu > 0$, то система (63) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$.

Лемма 6. Если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то система (63) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$. Если $\mu \leq \mu^*$, то у системы (63) не существует решения, удовлетворяющего условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$.

Рассмотрим функцию W_+ , ставящую каждому $\mu > 0$ число, равное $\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi$, где φ, ψ — решение системы (63) такое, что $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$.

Рассмотрим функцию W_- , ставящую каждому $\mu \in (\mu^*, 0)$ число, равное $\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi$, где φ, ψ — решение системы (63) такое, что $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$.

Рассмотрим функцию W_0 , ставящую каждому $\mu \in (-1, 0)$ в соответствии число, равное $\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi$, где φ — корень уравнения $\mu = g_1(\varphi)$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Рассмотрим функцию W_1 , ставящую каждому $\mu \in (-1, 0)$ в соответствии число, равное $\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi$, где φ — корень уравнения $\mu = g_1(\varphi)$ из интервала $(\pi/2, \pi)$.

Лемма 7. Если $\mu \in (-1, 0)$, то $0 < W_0(\mu) < W_1(\mu)$. Если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то $W_1(\mu) < W_-(\mu)$.

Доказательство лемм 5–7 будет дано ниже.

Лемма 8. Функция

$$f(\varphi) = \varphi^2 \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi}$$

отображает отрезок $[0, \pi/2]$ в $[0, \pi^2/4]$, а при любом $k \geq 1$ отрезок $[-\pi/2 + \pi k, \pi/2 + \pi k]$ в $[(-\pi/2 + \pi k)^2, (\pi/2 + \pi k)^2]$.

Доказательство. Проведем замену переменных $\psi = 2\varphi$ и рассмотрим функцию $g(\psi) = 2f(\varphi)$. На отрезке $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ функция g монотонно возрастает при любом $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, остается показать, что если $\varphi \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, то $\pi^2(2n-1)^2 < g(\varphi) < \pi^2(2n+1)^2$.

Первое неравенство эквивалентно следующему:

$$(64) \quad \varphi(\varphi^2 - \pi^2(2n-1)^2) > (\varphi^2 + \pi^2(2n-1)^2) \sin \varphi,$$

а второе — следующему:

$$(65) \quad \frac{2|\sin \varphi|}{\varphi + \sin \varphi} < \left(\frac{\pi(2n+1)}{\varphi} \right)^2 - 1.$$

Неравенство (64) выполняется в силу неположительности $\sin \varphi$. Усилим неравенство (65):

$$\frac{2}{2\pi n + \pi - 1} < \frac{1 + 4n}{4n^2}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде:

$$8(\pi - 1)n^2 + (6\pi - 4)n + \pi - 1 > 0,$$

которые выполняются при любом положительном n (так как корни квадратного трехчлена, стоящего слева, отрицательны). $\square$

Рассмотрим уравнение

$$(66) \quad r_1 = \varphi^2 + r_3 \varphi \operatorname{tg} \varphi$$

и интервал

$$(67) \quad I^* = (\eta_0 \sin \eta_0 - r_3 \cos \eta_0, \eta_1 \sin \eta_1 - r_3 \cos \eta_1).$$

Рассмотрим область $\mathcal{D}_{10}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ содержащую такие точки, что $r_3 > -1$ и

- при $r_3 > 0$ выполняются неравенства: $r_1 \in (0, W_+(r_3))$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что $0 < \eta_0 < \pi/2 < \eta_1 < 3\pi/2$.
- при $r_3 = 0$ выполняются неравенства: $r_1 \in (0, \eta^2) \setminus \{\pi^2/4\}$, где η — единственный корень уравнения $\eta \sin \eta = \pi/2$ из интервала $(\pi/2, \pi)$, и если $r_1 < \pi^2/4$, то $\sqrt{r_1} \sin \sqrt{r_1} < r_2 < \pi/2$, а если $r_1 > \pi^2/4$, то $\pi/2 < r_2 < \sqrt{r_1} \sin \sqrt{r_1}$.
- при $r_3 \in (\mu^*, 0)$ выполняются неравенства: $r_1 \in (0, W_0(r_3)) \cup (W_1(r_3), W_-(r_3))$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что

$$\begin{cases} 0 < \eta_0 < \eta_1 < \pi/2, & \text{если } r_1 < W_0(r_3), \\ \pi/2 < \eta_0 < \eta_1 < \pi, & \text{если } r_1 > W_1(r_3). \end{cases}$$

- при $r_3 \in (-1, \mu^*]$ выполняются неравенства: $r_1 \in (0, W_0(r_3))$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что $0 < \eta_0 < \eta_1 < \pi/2$.

Область $\mathcal{D}_{10}$ связна, ограничена и частично изображена на рис. 13.

Рис. 13. Область $\mathcal{D}_{10}$ (выше)

Рис. 14. Набор ω_0 в случае $\mu > 0$

Теорема 5. Для того чтобы все корни характеристического уравнения (40) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\chi, \nu, \mu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_{10}$.

Далее будем рассматривать уравнение (40) как однопараметрическое семейство двухпараметрических уравнений (11) первого рода, где $p_1 = \chi$, $p_2 = \nu$, а μ — параметр семейства.

Из $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) = z$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \mu z e^z$ находим $\Delta(\varphi) = \varphi \cos \varphi$ и $u_1(\varphi) = \varphi^3 \cos \varphi + \mu \varphi^2 \sin \varphi$, $u_2(\varphi) = \varphi \cos \varphi (\varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi)$.

Случай $\mu = 0$ сводится к теореме 10 [4], поэтому далее будем полагать $\mu \neq 0$, тогда $\theta_0 = \xi_0 = 0$, $\xi_n = \pi(n - 1/2)$, где $n \in \mathbb{N}$, то есть имеется единственная прямая L_0 и счетное множество кривых C_n , которые задаются отображением

$$\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi, \varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi\}.$$

Найдем точки пересечения проекций кривых D-разбиения с осями координат. Для каждого $n \geq 0$ обозначим через a_n единственный корень уравнения $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ из интервала $(\pi(n - 1/2), \pi(n + 1/2)) \cap (0, +\infty)$. Точка $\mathbf{S}(a_n)$ — единственная точка пересечения кривой C_n с положительной полуосью r_1 . Имеем $S_1(a_n) = \mu^2 + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Для каждого $n \geq 1$ обозначим через b_n единственный корень уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(\pi(n - 1/2), \pi(n + 1/2)) \cap (0, +\infty)$, тогда $\mathbf{S}(b_n)$ — единственная точка пересечения кривой C_n с осью r_2 . Имеем $S_2(b_n) = (-1)^n \operatorname{sgn} \mu \sqrt{\mu^2 + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что при $\mu \in (-1, 0)$ существует b_0 — единственный корень уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \pi/2)$, причем $S_2(b_0) = \sqrt{\mu^2 + b_0^2}$. Если $\mu \notin (-1, 0)$, то данное уравнение неразрешимо на этом интервале.

Далее, $\Delta'(0) = 1$,

$$\Delta' \left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) (-1)^{n-1}, u_1 \left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) = \mu \pi^2 (n - 1/2)^2 (-1)^n,$$

поэтому согласно теореме 3 полный набор может быть представлен в виде объединения Т-набора ω_0 , состоящего из прямой L_0 и кривой C_0 , и счетного набора S-наборов ω_n , каждый из которых состоит только из кривой C_n .

Кривая C_n пересекает ось r_1 в единственной точке $\mathbf{S}(a_n)$. Центральная точка прямой L_0 имеет координаты $\{0, -\mu\}$. Проиндексируем все S-наборы таким образом, чтобы относительный индекс начала координат был равен нулю. Кривая C_n не пересекает интервал $(-\mu, 0)$ оси r_2 , поэтому индекс точки $\{0, -\mu\}$ относительно любого S-набора тоже равен нулю.

Проиндексируем Т-набор следующим образом. Через начало координат проходит прямая L_0 , а кривая C_0 не проходит, поэтому это неособая точка набора. Присвоим ей единичный относительный индекс в том случае, если $\mu > 0$. Если $\mu < 0$, то присвоим этой точке относительный индекс, равный двум.

Началу координат соответствует характеристическое уравнение $z(z + \mu) = 0$, поэтому абсолютный индекс точки равен единице, если $\mu > 0$, и двум, если $\mu \leq 0$. Таким образом, согласно теореме 1 для любой неособой точки $\mathbf{p}$ имеем $\rho(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{p})$.

Исследуем поведение функции S_1 . Уравнение $S'_1(\varphi) = 0$ равносильно уравнению $\mu = g_1(\varphi)$. Поскольку $g_1 \leq 0$, то при $\mu > 0$ функция S_1 монотонно возрастает в точках своей непрерывности.

Пусть η — точка экстремума функции S_1 , тогда

$$(68) \quad S_1(\eta) = \frac{\eta^2(\eta - \sin \eta \cos \eta)}{\eta + \sin \eta \cos \eta} > 0,$$

следовательно, участок проекции любой кривой D-разбиения, расположенный в полуплоскости $r_1 < 0$, представляет собой простую кривую, а все петли на проекциях кривых располагаются в полуплоскости $r_1 > 0$.

Покажем, что если $\mu \in (-1, 0)$, то уравнение $g_1(\varphi) = \mu$ имеет единственный корень на интервале $(\pi n/2, \pi(n+1)/2)$ при каждом $n \in \mathbb{N}_0$. Обозначим этот корень через c_n .

Имеем $g_1(\pi n) = -2$ и $g_1(\pi(n+1/2)) = 0$, поэтому при $\mu \in (-1, 0)$ уравнение $\mu = g_1(\varphi)$ имеет по крайней мере один корень на каждом интервале $(\pi n/2, \pi(n+1)/2)$. На интервале $(\pi n, \pi(n+1/2))$ согласно формуле (62) получаем

$$\operatorname{sgn} g'_1(\varphi) = \operatorname{sgn} \sin 2\varphi (2\varphi^2 + \operatorname{ctg} \varphi (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)) > 0.$$

Рассмотрим интервал $(\pi(n-1/2), \pi n)$. Согласно лемме 3 достаточно рассмотреть интервал $(\pi(n-1/2), \pi(n-1/4))$. На этом интервале $\operatorname{ctg} \varphi \in (-1, 0)$, следовательно, $g'_1(\varphi) < 0$ в силу выражения (62).

Пусть $\mu \in (-1, 0)$. В силу $c_n \in (\pi n, \pi(n+1/2))$ и согласно лемме 8 получаем $S_1(c_n) < \pi n < S_1(c_{n-1})$. Итак, все экстремумы функции S_1 упорядочены по возрастанию.

Исследуем поведение функции S_2 . Равенство $S'_2(\varphi) = 0$ можно переписать в виде $\mu = g_2(\varphi)$. Функция g_2 монотонно возрастает в точках своей непрерывности, следовательно, на интервале $(0, \pi/2)$ данное уравнение имеет решение только при $\mu \in (-2, -1)$.

Таким образом, если $\mu \geq -1$, то функция S_2 монотонно возрастает на интервале $(0, \pi/2)$. Если $\mu \in (-2, -1)$, то функция S_2 имеет единственный минимум на интервале

$(0, \pi/2)$. Если $\mu \leq -2$, то функция S_2 монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$. Итак, C_0 — простая кривая при любых значениях $\mu \neq 0$.

При $n \geq 1$ имеем $g_2(\pi(n-1/2)) = -1$, поэтому уравнение $g_2(\varphi) = -1$ не имеет корней на интервале $(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2))$ при $n \in \mathbb{N}$. Иными словами, если $\mu = -1$, то все проекции кривых D-разбиения — простые кривые.

Если $\mu \notin \{-1, 0\}$, то при $n \in \mathbb{N}$ уравнение $\mu = g_2(\varphi)$ имеет единственный корень на интервале $(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2))$, следовательно, при $n \in \mathbb{N}$ функция S_2 имеет ровно один экстремум на этом интервале. Обозначим точку экстремума через d_n . Имеем

$$S_2''(d_n) = \frac{\mu + 1}{d_n \cos d_n} (d_n - \sin d_n \cos d_n),$$

следовательно, если $\mu > -1$, то при четных n функция S_2 имеет в точке d_n локальный минимум, а при нечетных n — локальный максимум.

Заметим, что если $\mu > -1$, то $d_n \in (\pi(n-1/2), \pi n)$, а если $\mu < -1$, то $d_n \in (\pi n, \pi(n+1/2))$.

Свойства кривых D-разбиения качественно зависят от величины μ . Рассмотрим три случая.

1. Случай $\mu > 0$.

В этом случае проекции D-разбиения удобно задать иначе. Рассмотрим функцию $F_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и множество функций $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Функция S_1 монотонно возрастает в точках своей непрерывности, поэтому разрешив уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ относительно $\varphi \in (\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)) \cap \mathbb{R}_+$, положим $F_n(r_1) = S_2(\varphi)$. Итак, при $n \in \mathbb{N}_0$ кривая C_n — это график функции $r_2 = F_n(r_1)$.

Доказательство леммы 5. Докажем, что если числа m и n имеют различную четность, то уравнение $F_n(r_1) = F_m(r_1)$ имеет единственное решение. Пусть m — четное число, а n — нечетное. Без ограничения общности можно считать, что $m < n$.

Пусть $m = 0$, а n — нечетное натуральное число. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_2 строго возрастает, поэтому и функция F_0 строго возрастает на $\mathbb{R}_+$. Из $S_2(0) = -\mu$ и $S_2(\pi/2) = \pi/2$ вытекает, что график функции F_0 расположен в полосе $r_1 > 0$, $r_2 \in (-\mu, \pi/2)$.

Заметим, что $F_n(\pi^2 n^2) = \pi n$.

Выше мы показали, что точка максимума функции S_2 (точка d_n) принадлежит интервалу $(\pi(n-1/2), \pi n)$, поэтому точка максимума функции F_n (точка $S_1(d_n)$) принадлежит интервалу $(0, \pi^2 n^2)$. Итак, при $r_1 \leq \pi^2 n^2$ имеем $F_0(r_1) < \pi^2 n^2 \leq F_n(r_1)$. На множестве $(\pi^2 n^2, +\infty)$ функция F_0 растет, а F_n убывает, кроме того,

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} F_n(r_1) = -\pi/(n+1/2) < \pi/2 = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} F_0(r_1),$$

поэтому существует единственная точка пересечения графиков функций F_0 и F_n .

Теперь пусть m — четное натуральное число, а n — нечетное. Отметим, что у функции F_m существует единственная точка экстремума — это точка минимума, принадлежащая интервалу $(0, \pi^2 m^2)$. Тогда при $r_1 \leq \pi^2 m^2$ имеем $F_m(r_1) < 0 < F_n(r_1)$.

В силу $\lim_{r_1 \rightarrow \infty} F_m(r_1) = \pi(m+1/2)$ при $r_1 \in (\pi^2 m^2, \pi^2 n^2]$ имеем $F_m(r_1) < \pi(m+1/2) < \pi n \leq F_n(r_1)$. На множестве $(\pi^2 n^2, \infty)$ функция F_m растет, а F_n убывает, откуда и вытекает существование и единственность точки пересечения графиков.

Решение системы (63) такое, что $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$ соответствует точке пересечения кривых C_0 и C_1 . $\square$

Докажем, что для любого четного n из $r_1 \in (0, S_1(a_n)]$ вытекает $F_0(r_1) > F_n(r_1)$.

- (1) Пусть $r_1 \in (0, \pi^2 n^2]$. На этом участке функция F_n имеет единственный экстремум (минимум), поэтому

$$F_n(r_1) \leq \max\{F_n(0), F_n(\pi^2 n^2)\} = \max\{-\sqrt{\mu^2 + b_n^2}, -\mu\} = -\mu.$$

С другой стороны, в силу монотонности F_0 имеем $F_0(r_1) > F(0) = -\mu$, поэтому на этом участке $F_0(r_1) > F_n(r_1)$.

- (2) При $r_1 \in (S_1(a_0), S_1(a_n)]$ имеем $F_0(r_1) > 0 \geq F_n(r_1)$.
- (3) Если $S_1(a_0) \leq \pi^2 n^2$, то доказательство утверждения закончено. В противном случае существует полуинтервал $(\pi^2 n^2, S_1(a_0)]$, на котором $-\mu < F_0(r_1) \leq 0$ и $-\mu < F_n(r_1) < 0$. Пусть r_1 принадлежит этому полуинтервалу, тогда существуют η_0 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(0, \pi/2)$ и $(\pi n, \pi(n+1/2))$ соответственно. Перепишем уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\operatorname{tg} \varphi = (r_1 - \varphi^2)/(\mu\varphi)$. Если $r_1 > 0$, то функция $(r_1 - \varphi^2)/(\mu\varphi)$ монотонно убывает, следовательно, $0 < \operatorname{tg} \eta_n < \operatorname{tg} \eta_0$, поэтому $\cos \eta_n > \cos \eta_0 > 0$, следовательно, Тогда имеем

$$|F_0(r_1)| = \cos \eta_0 \frac{\eta_0^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} < \cos \eta_n \frac{\eta_n^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} = |F_n(r_1)|.$$

Теперь докажем, что для любого нечетного $n \geq 2$ из $r_1 \in [0, S_1(a_n))$ вытекает $F_n(r_1) > F_1(r_1)$.

- (1) Пусть $r_1 \in (0, \pi^2]$, тогда в силу $S_1(a_n) > S_1(a_n) > \pi^2$ имеем $F_0(r_1) > 0$ и $F_n(r_1) > 0$. Пусть η_1 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(\pi/2, \pi)$ и $(\pi(n-1/2), \pi n)$ соответственно, тогда

$$S_2^2(\eta_1) - \mu^2 = \eta_1^2 - \left(\frac{r_1 \cos \eta_1}{\eta_1} \right)^2 < \pi^2,$$

$$S_2^2(\eta_n) - \mu^2 = \eta_n^2 - \left(\frac{r_1 \cos \eta_n}{\eta_n} \right)^2 > \eta_n^2 - \frac{\pi^4}{\eta_n^2}.$$

Неравенство $\eta_n^2 - \pi^4/\eta_n^2 > \pi^2$ выполняется при $\eta_n > \pi\sqrt{(\sqrt{5}+1)/2}$, в чем нетрудно убедиться. А так как $\varphi_n > 5\pi/2$, то на рассматриваемом полуинтервале графики функций не пересекаются.

- (2) При $r_1 \in (\pi^2, \pi^2 n^2]$ имеем $F_1(r_1) < \mu \leq F_n(r_1)$.
- (3) При $r_1 \in (S_1(a_1), S_1(a_n)]$ имеем $F_1(r_1) < 0 \leq F_n(r_1)$.
- (4) Если $\pi^2 n^2 < S_1(a_1)$, то необходимо еще рассмотреть полуинтервал $(\pi^2 n^2, S_1(a_1)]$. Пусть r_1 принадлежит этому полуинтервалу, а η_1 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(\pi, 3\pi/2)$ и $(\pi n, \pi(n+1/2))$ соответственно. Из $S_1(\eta_1) = S_1(\eta_n)$ вытекает $0 < \operatorname{tg} \eta_n < \operatorname{tg} \eta_0$, поэтому $\cos \eta_n < \cos \eta_0 < 0$, следовательно,

$$F_1(r_1) = |\cos \eta_1| \frac{\eta_1^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} < |\cos \eta_n| \frac{\eta_n^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} = F_n(r_1).$$

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu > 0$. Как было показано выше, кривая C_0 не пересекает прямую L_0 и является простой кривой. Относительный индекс начала координат равен нулю, при этом $\Delta'(0) = 1$, следовательно, существуют три области набора: D_0^0 , D_1^0 и D_2^0 , относительные индексы которых равны 0, 1 и 2 соответственно. Схематично эти области изображены на рис. 14.

При $n \geq 1$ кривая C_n простая, поэтому она разбивает плоскость на две области: D_0^n и D_1^n . Обозначим через D_0^n ту область, которая содержит начало координат. Выше мы присвоили этой области нулевой относительный индекс. Имеем

$$\Delta(a_n)u_1(a_n)u_2'(a_n) = a_n^5(a_n + \sin a_n \cos a_n) > 0,$$

поэтому $(\nabla Z_{a_n}, \mathbf{S}(a_n)) > 0$ согласно теореме 1 [4]. Следовательно, относительный индекс области D_1^n равен двум. Эти наборы изображены на рис. 15, 16.

Рис. 15. Набор ω_n при нечетных n в случае $\mu > 0$

Рис. 16. Набор ω_n при четных n в случае $\mu > 0$

Итак, область $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n$ и только она имеет нулевой абсолютный индекс.

Покажем, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n = D_0^0 \cap D_0^1$.

Пусть $\mathbf{r}$ принадлежит $D_0^0 \cap D_0^1$ и замыканию D_1^n , при некотором четном целом n . Тогда $r_1 > 0$, $F_0(r_1) < r_2 < F_1(r_1)$ и $r_2 \leq F_n(r_1)$. Как было показано выше, если $r_1 \in (0, S_1(a_n))$, то $F_0(r_1) > F_n(r_1)$, следовательно, $r_1 \geq S_1(a_n)$, но тогда $F_1(r_1) < 0 < F_0(r_1)$. Полученное противоречие показывает, что $D_0^0 \cap D_0^1$ — подмножество D_0^n . Аналогично рассматривается случай, когда n — нечетное число, большее двух.

Заметим, что при условии $r_1 > 0$ неравенства

$$F_0(r_1) < F_1(r_1), \quad r_1 < W_+(\mu)$$

эквивалентны, а принадлежность точки $\{\chi, \nu\}$ области $D_0^0 \cap D_0^1$ эквивалентно тому, что $\mu > 0$ и $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$.

На рис. 17, 18 граница пересечения областей D_0^0 , D_0^1 выделена жирной линией. $\square$

Рис. 17. Области D-разбиения в случае $\mu = 1$

Рис. 18. Области D-разбиения в случае $\mu = 5$

2. Случай $\mu \leq -1$.

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu \leq -1$. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_2 монотонно убывает, а кривая C_0 не пересекает ось r_2 , поэтому ω_0 — простой Т-набор. Имеются три области набора: D_0^0 , D_1^0 и D_2^0 , относительные индексы которых равны 1, 2 и 3 соответственно. Схематично эти области изображены на рис. 19.

Если $\mu = -1$, то, как было показано выше, функция S_2 монотонна $(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2))$. Если $\mu < -1$, то все проекции кривых D-разбиения просты. Это вытекает из того, что $S_1(d_n) < 0$, но $S_1(\eta) > 0$, где η — любой корень уравнения $\mu = g(\varphi)$.

Кривая C_n разбивает плоскость на две области: D_0^n и D_1^n , относительные индексы которых 0 и 2 соответственно (рис. 20). Итак, суммарный относительный индекс любой точки больше нуля, поэтому область устойчивости пуста. $\square$

Рис. 19. Набор ω_0 в случае $\mu \leq -1$

Рис. 20. Набор ω_n при нечетных n в случае $\mu \leq -1$

3. Случай $\mu \in (-1, 0)$.

Доказательство леммы 6. Решение системы (63), удовлетворяющее условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$ соответствует точке самопересечения участка кривой $C_1^{(\pi/2, \pi)}$.

Докажем, что точка самопересечения существует. Имеем $S_2(\pi/2) = \pi/2 > 0$ и $S_2(\pi) = \mu < 0$. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_1 имеет единственный экстремум (минимум) в точке c_1 , и у функции S_2 имеется единственный экстремум (максимум) в точке d_1 . Для того, чтобы участок кривой $C_1^{(\pi/2, \pi)}$ имел точки самопересечения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $c_1 < d_1$.

Согласно лемме 4 значение t^* — это точка пересечения графиков g_1 и g_2 на интервале $(\pi/2, \pi)$. Функция g_2 возрастает на этом интервале и $g_2(\varphi) > -1$, поэтому при $\mu > \mu^*$ имеем $d_1 > t^*$, а при $\mu < \mu^*$ имеем $d_1 < t^*$. На интервале $(\pi/2, t^*)$ функция g_1 убывает, поэтому при $\mu > \mu^*$ имеем $c_n < t^*$. На интервале (t^*, π) функция g_1 не является монотонна, тем не менее, функция убывает на том участке, где она принимает значения больше, чем -1 , поэтому при $\mu < \mu^*$ имеем $c_n > t^*$. Таким образом, если $\mu \leq \mu^*$, то $c_n \geq d_n$, поэтому точек самопересечения нет. Если же $\mu > \mu^*$, то $c_n < d_n$, следовательно, участок кривой $C_1^{(\pi/2, \pi)}$ пересекает себя хотя бы в одной точке.

Покажем, что C_1 пересекает себя в единственной точке.

Для этого достаточно показать, что на участке кривой $C_1^{(\pi/2, \pi)}$ не меняется направление выпуклости, то есть знак выражения $S_1'(\varphi)S_2(\varphi) - S_1(\varphi)S_2'(\varphi)$ постоянно на интервале $(\pi/2, \pi)$.

Имеем $S'_1(\varphi)S_2(\varphi) - S_1(\varphi)S'_2(\varphi) = -G(\varphi, \mu) \sec^3 \varphi$, где

$$(69) \quad \begin{aligned} G(\varphi, \mu) = & 2\varphi \cos^4 \varphi - 2\cos^3 \varphi \sin \varphi - 2\varphi^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ & + \mu(2\varphi \cos^4 \varphi - 2\cos \varphi \sin \varphi - 3\varphi^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ & - 2\varphi \sin^2 \varphi - \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \\ & + \mu^2(\varphi \cos^2 \varphi - 2\cos \varphi \sin \varphi + \cos^3 \varphi \sin \varphi - 2\varphi \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

График функции $y = G(\varphi, \mu^*)$ изображен на рис. 21.

Рис. 21. График $y = G(\varphi, \mu^*)$

Рис. 22. Набор ω_0 при $\mu \in (-1, 0)$

Покажем, что $G(\varphi, \mu^*) \geq 0$ для любого $\varphi \in (\pi/2, \pi)$. Для этого подставим $\mu = -1 - t^* \operatorname{ctg} t^*$ в выражение для S_2 , а

$$\mu = -\frac{2t^* \cos^2 t^*}{t^* + \sin t^* \cos t^*}$$

подставим в выражения для S_1 , тогда получаем

$$G(\varphi, \mu^*) = 2T(\varphi, t^*) \sin t^* / (t^* + \sin t^* \cos t^*),$$

где

$$\begin{aligned} T(\varphi, t) = & t^2 \varphi \cos^3 t \cos^2 \varphi - t^2 \varphi \cos t \cos^4 \varphi + t \varphi \cos^2 t \cos^2 \varphi \sin t \\ & - t \varphi \cos t^2 \cos^4 \varphi \sin t - 2t^2 \cos^3 t \cos \varphi \sin \varphi + t^2 \cos t \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ & + t^2 \cos^3 t \cos^3 \varphi \sin \varphi + 3t \varphi^2 \cos^2 t \cos \varphi \sin t \sin \varphi \\ & - t \varphi^2 \cos^3 \varphi \sin t \sin \varphi - \varphi^2 \cos t \cos^3 \varphi \sin^2 t \sin \varphi \\ & - 2t^2 \varphi \cos^3 t \sin^2 \varphi + t \varphi \cos^2 t \cos^2 \varphi \sin t \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Имеем $T(t, t) = 0$.

Докажем, что если $\varphi \in (\pi, 3\pi/2)$, $t \in (\pi, 3\pi/4)$ и $\varphi \neq t$, то $T(\varphi, t) > 0$. Представим T в виде

$$T(\varphi, t) = Y_0(\varphi, t) - 2\varphi t \sin \varphi \cos t (\sin t - \sin \varphi) (Y_1(\varphi, t) - Y_2(\varphi, t)),$$

где

$$\begin{aligned} Y_0(\varphi, t) = & \sin \varphi (\varphi \cos \varphi \sin t - t \cos t \sin \varphi) \\ & \times (t \cos^2 t (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) - \varphi \cos^2 \varphi (t + \sin t \cos t)), \\ Y_1(\varphi, t) = & \frac{t(\sin t + \sin \varphi)(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}{2\varphi \sin \varphi}, \\ Y_2(\varphi, t) = & \frac{\varphi \cos \varphi \sin t - t \cos t \sin \varphi}{\sin t - \sin \varphi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } Y_0(\varphi, t) &= \sin t \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) (t + \sin t \cos t) \\ &\times (\varphi \operatorname{ctg} \varphi - t \operatorname{ctg} t) (t \cos^2 t / (t + \sin t \cos t) - \varphi \cos^2 \varphi / (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)). \end{aligned}$$

В силу монотонности функций $\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ и $\varphi \cos^2 \varphi / (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)$ имеем $Y_0(\varphi, t) > 0$ если $t \neq \varphi$.

Теперь рассмотрим функции Y_1 и Y_2 . При $\varphi = t$ доопределим функцию Y_2 по непрерывности значением $Y_2(\varphi, \varphi) = \varphi - \sin \varphi \cos \varphi$. Имеем $Y_1(t, t) = Y_2(t, t)$, поэтому достаточно показать, что при каждом фиксированном $t \in (\pi/2, 3\pi/4)$ функция $Y_1(\varphi, t)$ монотонно возрастает на $\varphi \in (\pi/2, \pi)$, а функция $Y_2(\varphi, t)$ не возрастает.

Рассмотрим функцию Y_1 . Неравенство $\frac{\partial Y_1(\varphi, t)}{\partial \varphi} > 0$ эквивалентно следующему:

$$(70) \quad \sin t (\varphi \sin^3 \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi - \varphi^2 \cos \varphi) > \varphi \sin^2 \varphi \cos 2\varphi - \cos \varphi \sin^3 \varphi.$$

Неравенство (70) вытекает из того, что $\sin t \in (\sqrt{2}/2, 1)$ по предположению и из двух элементарно проверяемых неравенств:

$$\begin{aligned} \varphi \sin^2 \varphi \cos 2\varphi - \cos \varphi \sin^3 \varphi &< 1/2, \\ \varphi \sin^3 \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi - \varphi^2 \cos \varphi &> \pi/2, \end{aligned}$$

имеющих место при $\varphi \in (\pi/2, \pi)$.

Рассмотрим Y_2 . Неравенство $\frac{\partial Y_2(\varphi, t)}{\partial \varphi} \leq 0$ эквивалентно $Y_3(\varphi, t) \geq 0$, где $Y_3(\varphi, t) = \varphi - t \cos t \cos \varphi + \cos \varphi \sin t - \cos \varphi \sin \varphi - \varphi \sin t \sin \varphi$.

Имеем $Y_3(t, t) = 0$ и $\frac{\partial Y_3(t, t)}{\partial \varphi} = 0$, поэтому для того, чтобы доказать, что $\varphi = t$ — единственный корень уравнения $Y_3(\cdot, t) = 0$, достаточно показать, что $\frac{\partial^2 Y_3(t, t)}{\partial \varphi^2} > 0$ для любых $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ и $t \in (\pi/2, 2\pi/3)$. Имеем

$$\frac{\partial^2 Y_3(t, t)}{\partial \varphi^2} = t \cos t \cos \varphi - 3 \cos \varphi \sin t + 2 \sin 2\varphi + \varphi \sin t \sin \varphi.$$

Усилим неравенство $\frac{\partial^2 Y_3(t, t)}{\partial \varphi^2} > 0$: $\sin t (\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi) > -2 \sin 2\varphi$. Последнее неравенство вытекает из элементарно проверяемых неравенств

$$-\frac{2 \sin 2\varphi}{\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi} = \frac{4 \sin \varphi}{3 - \varphi \operatorname{tg} \varphi} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin t.$$

В силу того, что $t^* \in (\pi/2, 3\pi/4)$ при $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ имеем $G(\varphi, \mu^*) > 0$ и, очевидно, $G(\varphi, 0) > 0$. Докажем, что если $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ и $\mu \in [\mu^*, 0]$, то $G(\varphi, \mu) > 0$. При фиксированном φ выражение (69) представляет собой квадратный трехчлен относительно μ . Если коэффициент при μ^2 отрицателен, то ветви параболы направлены вниз, поэтому квадратный трехчлен достигает наименьшего значения на концах отрезка $[\mu^*, 0]$. Если коэффициент при μ^2 равен нулю, то тем более $G(\varphi, \mu) \geq \min\{G(\varphi, \mu^*), G(\varphi, 0)\}$.

Пусть коэффициент при μ^2 положителен, тогда

$$2(\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) > \sin 2\varphi - \sin \varphi \cos^3 \varphi,$$

следовательно, $\cos^2 \varphi > 2 \sin^2 \varphi$, откуда получаем $\varphi \in (3\pi/4, \pi)$. Покажем, что в этом случае вершина параболы принадлежит множеству $(-\infty, -1)$. Перепишем неравенство $\sin \varphi \frac{\partial G(\varphi, -1)}{\partial \mu} > 0$ в виде

$$(71) \quad -3\varphi^2 \cos \varphi - 2 \cos^3 \varphi + 2\varphi \sin \varphi > 2\varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi + \varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

В силу $\varphi \in (3\pi/4, \pi)$ левая часть неравенства (71) не меньше, чем $27\pi^2/16 + 1$, а правая часть этого неравенства не больше, чем $3\pi/2 + 2$. Таким образом, неравенство (71) выполняется, поэтому вершина параболы не принадлежит интервалу $(\mu^*, 0)$, следовательно, $G(\varphi, \mu) > 0$ на этом интервале.

Итак, на участке кривой $C_1^{(\pi/2, \pi)}$ не меняется направление выпуклости, поэтому точка пересечения единственна. $\square$

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu \in (-1, 0)$. Покажем, что при $\mu \in (-1, 0)$ кривая C_0 не имеет общих точек ни с одной из кривых C_n при $n \in \mathbb{N}$.

Функция S_2 монотонно возрастает, а функция S_1 достигает своего наибольшего значения $S_1(c_0)$ на интервале $(0, \pi/2)$. Следовательно, C_0 расположена в прямоугольнике $V_0 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2: 0 < r_1 < S_1(c_0), r_2 \in (-\mu, \pi/2)\}$. На рис. 22 границы этого прямоугольника выделены серым цветом.

Имеем $\lim_{\varphi \rightarrow \pi(n-1/2)-0} S_1(\varphi) = +\infty$. У функции S_1 имеется точка минимума c_{2n-1} на интервале $(\pi(n-1/2), \pi n)$ и точка максимума c_{2n} на интервале $(\pi n, \pi(n+1/2))$. Выше было доказано, что $S_1(c_{2n}) > S_1(c_{2n-1}) > S_1(c_0)$, поэтому участок $C_n^{(\pi(n-1/2), c_{2n})}$ расположен правее полосы V_0 .

Если n — нечетное число, то оставшийся участок кривой $C_n^{(c_{2n}, \pi(n+1/2))}$ расположен ниже оси r_1 , следовательно, ниже V_0 .

Докажем, что если n — четное число, то $C_n^{(c_{2n}, \pi(n+1/2))}$ находится выше прямоугольника V_0 . Согласно лемме 3 имеем $c_{2n} > \pi n + \pi/6$, поэтому для любого $\varphi \in (c_{2n}, \pi(n+1/2))$ имеем $S_1(\varphi) > \varphi \sin \varphi > \varphi/2 > \pi n > \pi$.

Выше мы показали, что при $\mu \in (\mu^*, 0)$ кривая C_1 имеет единственную петлю. Докажем, что ни одна проекция кривой D-разбиения не пересекает внутренность этой петли.

Только что было доказано, что кривые C_0 и C_1 не пересекаются. Петля кривой C_1 расположена в прямоугольнике

$$V_1 = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2: r_1 \in (S_1(c_1), S_1(c_2)), r_2 \in (0, \mu^2 + \pi^2) \right\}.$$

Если $n \geq 2$, то участок кривой $C_n^{(\pi(n-1/2), c_{2n})}$ расположен в полуплоскости $r_1 > S_1(c_{2n-1})$. Имеем $S_1(c_{2n-1}) > S_1(c_2)$, поэтому этот участок расположен правее прямоугольника V_1 .

Если n — нечетное число, большее двух, то участок кривой $C_n^{(c_{2n}, \pi(n+1/2))}$ расположен ниже оси r_1 , поэтому не пересекает V_1 .

Пусть n — четное число, большее двух, тогда согласно лемме 3 имеем $c_{2n} > \pi n + \pi/6$, поэтому при $\varphi > c_{2n}$ имеем

$$S_2(\varphi) > S_2(c_{2n}) > \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{6} \right) > \sqrt{\pi^2 + 1},$$

следовательно, участок кривой $C_n^{(c_{2n}, \pi(n+1/2))}$ расположен выше V_1 .

Далее, $W_0(\mu) = S_1(c_0)$ и $W_1(\mu) = S_1(c_1)$, а W_- — проекция на r_1 точки самопересечения кривой C_1 .

Лемма 7 вытекает из неравенств $S_1(c_0) < S_1(c_1)$ и $S_1(c_1) < W_-(\mu)$.

Набор ω_0 — это T-набор, причем C_0 и L_0 имеет единственную точку пересечения, поэтому существует всего четыре области набора: D_0^0, D_1^0, D_2^0 и D_3^0 , которые обозначены на рис. 22. Относительные индексы этих областей таковы: $\rho_{\omega_0}(D_0^0) = 0$, $\rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1$, $\rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2$, $\rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3$.

Рассмотрим набор ω_1 . При $\mu \in (\mu^*, 0)$ имеются три области набора: D_0^1, D_1^1 и D_2^1 , которые обозначены на рис. 23. Заметим, что область D_0^1 содержит начало координат,

поэтому $\rho_{\omega_0}(D_0^1) = 0$. Область D_2^1 — это петля, относительный индекс которой равен -2 . Относительный индекс неограниченной области D_1^1 равен 2 .

Если $\mu \in (-1, \mu^*]$, то кривая C_1 простая. Имеются две неограниченные области D_0^1 и D_1^1 , относительные индексы которых равны 0 и 2 соответственно (рис. 24).

Рис. 23. Набор ω_1 в случае $\mu \in (\mu^*, 0)$

Рис. 24. Набор ω_1 при $\mu \in (-1, \mu^*]$

областей D_0^n при любом $n \geq 2$, следовательно, абсолютный индекс этой области равен нулю.

Таким образом, если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то область устойчивости имеет две компоненты связности, а принадлежность точки $\{\chi, \nu\}$ множеству $D_0^0 \cup D_2^1$, выделенному на рис. 25, эквивалентна тому, что $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$. Если $\mu \in (-1, \mu^*]$, то область устойчивости связна, а принадлежность $\{\chi, \nu\}$ области D_0^0 , выделенной на рис. 26, эквивалентно тому, что $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье проведена полная классификация всех трехпараметрических систем (1). Для каждой из десяти систем построена область устойчивости и дано ее аналитическое описание.

Для пяти уравнений (33), (34), (36), (39), (40) области устойчивости построены впервые. Несмотря на то, что для остальные пять областей устойчивости были известны (для уравнения (31) в работе [6], (32) — [9], (35) — [7], (37) — [8], (38) — в работе состоящей из двух частей [1], [2]), в настоящей статье все десять случаев исследованы единообразно.

Область устойчивости представляет собой

- пустое множество ровно для одной системы (уравнение (31));
- несвязное множество для двух систем (уравнения (35), (36));
- ограниченное непустое множество для двух систем (уравнения (35), (34));
- непустое неограниченное связное множество для пяти систем (уравнения (32), (37), (38), (39), (40)).

Отметим, что в шести случаях (уравнения (31)–(36)) удалось выбрать параметр семейства так, что получаемое двухпараметрическое характеристическое уравнение имеет третий тип, а в одном случае (уравнение (38)) — второй тип. Таким образом, в этих семи случаях трехмерные области устойчивости имеют линейчатую структуру, в трех оставшихся случаях — нет.

Построенные области могут быть как использованы непосредственно для исследования локальной устойчивости математических моделей, так и представляет собой базу для дальнейшего исследования системы (1).

REFERENCES

- [1] C.S. Hsu, S.J. Bhatt *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 113–118. Zbl 0143.10503
- [2] C.S. Hsu, S.J. Bhatt *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 119–124. Zbl 0143.10601
- [3] Л.Е. Ил'сгол'тс, С.Б. Норкин, *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*, Nauka, Moscow, 1971. (in Russian) Zbl 0224.34053
- [4] М.В. Мulyukov, *Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part I*, Siberian Electronic Mathematical Reports, (in Russian, in print).
- [5] М.В. Мulyukov, *Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay*, Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ., **51** (2018), 79–122. Zbl 07124540
- [6] М.В. Мulyukov, *The stability of the linear autonomous differential equation with distributed and concentrated delay*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, **20**:5 (2015), 1325–1331. (in Russian)
- [7] М.В. Мulyukov, *Stability of inverted pendulum with delayed feedback* (Russian), Applied Mathematics and Control Sciences, **2017**:4 (2017), 73–87. (Russian)
- [8] М.В. Мulyukov, *Asymptotic stability of the system of autonomous differential equations of delayed type with degenerate matrices*, Proceedings of VII international conference «Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology», Voronej (2014), 268–270. (Russian)

- [9] M.V. Mulyukov, *On stability of three-parameter system of two autonomous linear delay differential equations*, Proceedings of 2015 international conference «stability and control processes» in memory of V.I. Zubov (scp), joined with 21st international workshop on beam dynamics and optimization (bdo). Saint-Petersburg, 05-09 october 2015.

MIKHAIL VADIMOVICH MULYUKOV
PERM NATIONAL RESEARCH POLYTECHNIC UNIVERSITY,
29, KOMSOMOLSKIY AVE.,
PERM, 614990, RUSSIA
PERM STATE NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY,
15, BUKIREVA STR.,
PERM, 614990, RUSSIA
E-mail address: Mulykoff@gmail.com