N. V. Prytkov, A. L. Perezhgin, Hamiltonian connectivity of diagonal grid graphs, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 2080–2089

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.147>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 18:28:24

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 2080–2089 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.147

УДК 519.177
MSC 05C38

ГАМИЛЬТОНОВА СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ ДИАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Н.В. ПРЫТКОВ, А.Л. ПЕРЕЖОГИН

ABSTRACT. A graph G is called Hamiltonian connected graph if for every pair of distinct vertices $u, v \in V(G)$ there exists a hamiltonian (u, v) -path in G . In this paper we prove Hamiltonian connectivity of the family of infinite two-dimensional diagonal grid induced subgraphs with added horizontal and vertical border edges. A generalization for multidimensional case is given. These results are applied to prove the existence of discrete dynamic systems with arbitrary control functions with some given functioning properties.

Keywords: hamiltonian connectivity, grid graph, discrete dynamic system.

1. ВВЕДЕНИЕ

Граф G называется гамильтоново связным, если для любой пары различных вершин u и v в графе G существует гамильтонова (u, v) -цепь. Суперрешеткой назовем бесконечный граф, вершинами которого являются точки евклидовой плоскости с целочисленными координатами, и две вершины $u = (u_x, u_y)$ и $v = (v_x, v_y)$ смежны тогда и только тогда, когда выполнено одно из трёх условий

- $|u_x - v_x| = 1$ и $|u_y - v_y| = 1$;
- $u_x = v_x$ и $|u_y - v_y| = 1$;
- $|u_x - v_x| = 1$ и $u_y = v_y$.

ПРЫТКОВ, N.V., PEREZHOGIN, A.L., HAMILTONIAN CONNECTIVITY OF DIAGONAL GRID GRAPHS.

© 2019 Прытков Н.В., Пережогин А.Л.

The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS № I.5.1, project № 0314-2019-0017.

Поступила 1 декабря 2019 г., опубликована 27 декабря 2019 г.

Рис. 1. Прямоугольный конечный граф суперрешетки.

В [10] показано, что если в суперрешетке вырезать прямоугольную область нужных размеров (Рис. 1), то получившийся граф будет гамильтоново связным. В [7, 8, 9] доказана гамильтонова связность других подграфов суперрешетки, в частности для областей в виде букв латинского алфавита. Одним из возможных применений полученных результатов указывается программирование машин по вышиванию крестиком. Но при вышивании крестиком вертикальные и горизонтальные ребра не нужны. В первой части данной статьи доказывается, что для некоторой серии подграфов суперрешетки свойство гамильтоновой связности сохранится, если оставить вертикальные и горизонтальные ребра только на границе, а все внутренние удалить. В эту серию, в частности, входит прямоугольная область и область в виде буквы Г. Во второй части вариант прямоугольной области обобщается на многомерный случай и применяется для описания функционирования дискретной динамической системы с произвольными управляющими функциями.

2. ГАМИЛЬТОНОВА СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ ДИАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Назовем двумерной диагональной решеткой D^∞ бесконечный граф, вершинами которого являются точки евклидовой плоскости с целочисленными координатами, и две вершины $u = (u_x, u_y)$ и $v = (v_x, v_y)$ смежны тогда и только тогда, когда $|u_x - v_x| = 1$ и $|u_y - v_y| = 1$.

Зафиксируем вершину $w = (w_x, w_y)$ графа D^∞ , где $w_x \geq 2$, $w_y \geq 2$. Назовем верхней $(0, w)$ -цепью цепь

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k),$$

если $x_0 = x_1 = x_2 = y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $x_{k-2} = w_x - 2$, $x_{k-1} = w_x - 1$, $x_k = w_x$, $y_{k-2} = y_{k-1} = y_k = w_y$ и для любого $2 \leq i \leq k - 3$ либо $x_{i+1} = x_i$ и $y_{i+1} = y_i + 1$, либо $x_{i+1} = x_i + 1$ и $y_{i+1} = y_i$. Назовем нижней $(0, w)$ -цепью цепь

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k),$$

если $y_0 = y_1 = y_2 = x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{k-2} = x_{k-1} = x_k = w_x$, $y_{k-2} = w_y - 2$, $y_{k-1} = w_y - 1$, $y_k = w_y$ и для любого $2 \leq i \leq k - 3$ либо $x_{i+1} = x_i$ и $y_{i+1} = y_i + 1$, либо $x_{i+1} = x_i + 1$ и $y_{i+1} = y_i$.

Верхнюю $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ и нижнюю $(x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), \dots, (x'_k, y'_k)$ $(0, w)$ -цепи назовем согласованными, если $x'_i - x_i = y_i - y'_i \geq 2$ для любого $2 \leq i \leq k - 2$.

Рассмотрим подграф графа D^∞ , ограниченный двумя согласованными $(0, w)$ -цепями, и добавим к нему ребра этих цепей (Рис. 2а). Добавленные ребра и их концы будем называть граничными в графе. Множество всех таких графов обозначим через D_w .

Рис. 2. Примеры графов из D_w .

Рассмотрим примеры.

- (1) Прямоугольным графом диагональной решетки $D(n, m)$ назовем граф, полученный из подграфа D^∞ , порожденного множеством вершин $\{(v_x, v_y) | 0 \leq v_x \leq n-1 \text{ и } 0 \leq v_y \leq m-1\}$, добавлением граничных ребер $\{uv | (u_x = v_x \in \{0, n-1\}, |u_y - v_y| = 1 \text{ или } u_y = v_y \in \{0, m-1\}, |u_x - v_x| = 1)\}$ (Рис. 2b). Очевидно, что $D(n, m) \in D_{(n,m)}$. В свою очередь, прямоугольный граф диагональной решетки является остовным подграфом соответствующей прямоугольной подобласти суперрешетки.
- (2) Аналогично, если вырезать из D^∞ область в виде буквы Г толщиной не менее 2 и добавить граничные ребра, то для полученного графа найдется изоморфный ему граф из D_w для некоторой w (Рис. 2c).

Пусть $G \in D_w$, где $w = (w_x, w_y)$, $w_x + w_y = t$. Диагональю d_k графа G , $0 \leq k \leq t$, назовем подграф графа G , порожденный множеством вершин $\{(v_x, v_y) \in VG | v_x + v_y = k\}$.

Для всякого графа $G \in D_w$ рассмотрим подграф, порожденный множеством вершин $\{(v_x, v_y) \in VG | v_x + v_y \leq i\}$. Множество всех таких графов обозначим через $D_w(i)$, а объединение этих множеств по всем вершинам w через $D(i)$. Очевидно, что для всякого w и произвольного $G \in D_w$ подграф, порожденный вершинами $\{(v_x, v_y) \in VG | v_x + v_y > i\}$ изоморфен некоторому графу из $D(t - i - 1)$.

Лемма 1. Пусть $G \in D(i)$, $i \geq 1$, а v – одна из двух граничных вершин графа G , лежащих на диагонали d_i . Тогда для любой вершины $u \neq v$ существует гамильтонова (v, u) -цепь в G .

Доказательство. Докажем индукцией по i . При $i = 1$ множество $D(1)$ состоит только из полного графа на трёх вершинах. Он является гамильтоново связным.

Пусть $G \in D(i)$ при $i \geq 2$. Без ограничения общности будем считать, что вершина v является верхней граничной вершиной графа G .

Пусть $u \in d_i$. Тогда из вершины v идем по диагонали d_i до вершины, предшествующей u , и по ребру спускаемся внутрь графа. А из u идем по диагонали d_i до нижней граничной вершины и по граничному ребру спускаемся на диагональ d_{i-1} . Применяем индукционное предположение.

Если $u \notin d_i$ и не является нижней граничной вершиной диагонали d_{i-1} , то из вершины v идем по диагонали d_i до нижней граничной вершины и по граничному ребру спускаемся на диагональ d_{i-1} . Далее применяем индукционное предположение.

Рис. 3. Искомые гамильтоновы цепи в случае $i \leq 4$.

Пусть u является нижней граничной вершиной диагонали d_{i-1} . Если нижняя граничная вершина диагонали d_i имеет степень три, то аналогично предыдущему случаю из вершины v идем по диагонали d_i до нижней угловой вершины, но затем спускаемся по ребру, не являющемуся граничным, на диагональ d_{i-2} и опять можем применить индукционное предположение.

Осталось рассмотреть вариант, когда u является нижней граничной вершиной диагонали d_{i-1} , а нижняя граничная вершина диагонали d_i имеет степень два. На Рис. 3 представлены искомые гамильтоновы цепи для всех графов из $D(i)$ в случае $i \leq 4$. Пусть теперь $i \geq 5$. Построим сначала цепь из вершины u до вершины на диагонали d_{i-4} или d_{i-5} следующим образом. Идем в нижнюю граничную вершину диагонали d_i , по одному ребру поднимаемся вверх по этой диагонали, затем по ребру идем в вершину $a = (a_1, a_2)$ диагонали d_{i-2} . Здесь два случая.

- Пусть точка $b = (a_1, a_2 - 1)$ является вершиной нашего графа. Тогда из вершины a идем (если это возможно) по диагонали d_{i-2} вниз до граничной вершины, по граничному ребру переходим на диагональ d_{i-3} и поднимаемся по этой диагонали до вершины b . Далее по любому ребру переходим в вершину диагонали d_{i-4} или d_{i-5} (Рис. 4а).
- Если точка $b = (a_1, a_2 - 1)$ не является вершиной нашего графа, то из a по граничному ребру переходим на диагональ d_{i-3} , по ребру переходим на диагональ d_{i-1} , поднимаемся по этой диагонали на одну вершину вверх, переходим сначала на диагональ d_{i-3} , затем сразу на диагональ d_{i-5} (Рис. 4б).

Из вершины v обходим все непройденные вершины сначала диагонали d_i , затем диагонали d_{i-2} , затем d_{i-1} и затем d_{i-3} , закончив в верхней граничной вершине. По граничному ребру переходим на диагональ d_{i-4} и применяем индукционное предположение. $\square$

Теорема 1. Любой граф $G \in D_w$ является гамильтоново-связным, где $w = (w_x, w_y)$, $w_x \geq 2$, $w_y \geq 2$.

Рис. 4. Шаг индукции в случае $i \geq 5$.

Доказательство. Пусть $w_x + w_y = t$. Рассмотрим две произвольные вершины u и v графа $G \in D_w$.

- Пусть $u, v \in d_i$, для некоторого $1 \leq i \leq t-1$, причем u находится выше v . Если $i = t-1$, то из вершины u пройдем в вершину w , далее по ребру в вершину a диагонали d_{t-2} . Из v по граничному ребру перейдем в вершину b диагонали d_{t-2} . По лемме 1 в оставшемся графе существует гамильтонова цепь между a и b . Аналогично рассматривается случай $i = 1$. Если $t = 4$, то $G = D(2, 2)$ и легко проверить его гамильтонову связность.

Пусть $2 \leq i \leq t-2$ и $t > 4$. Из вершины u идем вверх по диагонали d_i , по граничному ребру переходим в вершину a диагонали d_{i+1} . Из вершины v идем вниз по диагонали d_i , по граничному ребру переходим в вершину b диагонали d_{i-1} . Если u и v смежны, то возьмем произвольное ребро cd , что $c \in d_{i+1}$, $d \in d_{i-1}$, причем $c \neq a$, $d \neq b$. (Такое ребро не найдется только в случае, если длина i -й диагонали равна 2 и верхняя вершина a диагонали $i+1$ находится строго над нижней вершиной b диагонали $i-1$. От такой ситуации легко избавиться, рассмотрев зеркально симметричный граф, полученный сменой ролей координат x и y .) Если u и v несмежны, оставшиеся вершины диагонали d_i образуют цепь (возможно нулевой длины) из одного конца которой переходим по ребру в вершину $c \in d_{i+2}$, из другого в вершину $d \in d_{i-2}$. По лемме в верхней части оставшегося графа существует гамильтонова цепь между a и c , а в нижней части гамильтонова цепь между b и d . Их объединение дает искомую гамильтонову цепь.

- Пусть $u \in d_i$, $v \in d_{i+1}$ и обе являются граничными. Разбиваем граф G на два графа: G_1 , порожденный вершинами $\{(v_x, v_y) \in VG \mid v_x + v_y \leq i\}$, и G_2 , порожденный вершинами $\{(v_x, v_y) \in VG \mid v_x + v_y > i\}$. Рассмотрим произвольное ребро, соединяющее некоторые вершины $a \in VG_1$ и $b \in VG_2$, не инцидентное ни u , ни v . По лемме 1 в G_1 существует гамильтонова цепь между u и a , а в G_2 гамильтонова цепь между v и b .
- Во всех остальных случаях существует такое i , что разбиение графа G на два графа: G_1 , порожденный вершинами $\{(v_x, v_y) \in VG \mid v_x + v_y \leq i\}$,

и G_2 , порожденный вершинами $\{(v_x, v_y) \in VG \mid v_x + v_y > i\}$, обладает свойствами:

- (1) вершины u и v лежат в разных графах G_1 и G_2 ;
- (2) существует такое граничное ребро ab , не инцидентное ни u , ни v , что его концы тоже лежат в разных графах G_1 и G_2 .

И в этом случае существование нужной гамильтоновой цепи следует из леммы 1. □

Поскольку конечный граф квадратной решетки является двудольным, то он не является гамильтоново связным. В [10] для гамильтоновой связности были добавлены все диагональные ребра в этой решетке. Теорема 1 показывает, что достаточно взять только диагональные ребра, добавив к ним граничные вертикальные и горизонтальные ребра, чтобы граф остался гамильтоново связным.

Некоторое обобщение результата Теоремы 1 на многомерный случай будет дано в следующем разделе.

3. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Дискретная динамическая система (ДДС) представляет собой пару (S, δ) , где S — непустое множество, элементы которого называются состояниями системы, а отображение $\delta : S \rightarrow S$ определяет функционирование системы.

Рассмотрим ДДС n -мерных векторов из $\mathbb{Z}_p^n$, функционирование которых происходит следующим образом: пусть $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ — состояние системы, тогда следующее состояние определяется как $x' = \delta(x) = (\delta_0(x_0, \dots, x_{n-1}), \dots, \delta_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}))$, где $\delta_i : \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$ — некоторая функция, отвечающая за изменение значений i -ой компоненты системы в очередной момент времени, $0 \leq i \leq n-1$. В случае, когда функции δ_i берутся из некоторого класса, встает вопрос об общих свойствах функционирования таких систем. В частности, исследуются неподвижные точки (состояния, переходящие сами в себя под действием δ), циклы (циклически повторяющийся набор состояний), нерабочие состояния (не являющееся образом никакого состояния), траектории фиксированных состояний. В [5, 12, 15] исследовалось функционирование ДДС с линейными функциями δ_i . В [4] в качестве дискретной модели регуляторного контура геномной сети была введена и исследована ДДС со следующими функциями:

$$\delta_i(x) = \begin{cases} x_i - 1, & \text{если } f_i(x) = 1 \text{ и } x_i > 0, \\ x_i + 1, & \text{если } f_i(x) = 0 \text{ и } x_i < p - 1, \\ x_i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [6, 13, 14] в качестве управляющей функций f_i предлагалось рассматривать аддитивную функцию:

$$f_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k \geq 1, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \{0, 1\}$$

или мультипликативную функцию:

$$f_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = 1 \Leftrightarrow \prod_{k=0}^{n-1} y_k > 0, \quad \text{где } y_k = \begin{cases} x_k, & \text{если } \alpha_k = 1, \\ 1, & \text{если } \alpha_k = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ фиксированы и отвечают за набор переменных, от которых существенно зависит соответствующая функция.

В [3, 16, 2] в качестве функций f_i рассматривались пороговые функции:

$$f_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w_{ik} x_k \geq T_i,$$

причем $T_i \in \mathbb{Z}$, $w_{i0}, \dots, w_{in-1} \in \mathbb{Z}_q$, $q \leq p$. Заметим, что аддитивные функции, а также мультипликативные в случае $p = 2$, являются частными случаями пороговых функций.

В [1] исследовалось восстановление ДДС с произвольными функциями, в [11] с аддитивными и мультипликативными управляющими функциями, а в [16] с пороговыми. При этом одной из важных задач является определение граничных значений параметров функционирования.

Удобным способом визуализации дискретной динамической системы является граф состояний. Графом состояний дискретной динамической системы называется ориентированный граф, вершинами которого являются состояния системы, а дуга из x в y существует тогда и только тогда, когда система из состояния x переходит в состояние y . Нетрудно видеть, что каждая компонента связности графа функционирования состоит из одного контура, к вершинам которого подвешены ориентированные к корню дерева.

В данном разделе рассматриваются дискретные динамические системы над $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}$, $n \geq 2$, $p_i \geq 2$ для любого i , с функцией $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_{n-1})$, где $\delta_i : \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_{p_i}$, $0 \leq i \leq n-1$ задается произвольной управляющей функцией $f_i : \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n} \rightarrow \{0, 1\}$ по следующему правилу

$$\delta_i(x) = \begin{cases} x_i - 1, & \text{если } f_i(x) = 1 \text{ и } x_i > 0, \\ x_i + 1, & \text{если } f_i(x) = 0 \text{ и } x_i < p_i - 1, \\ x_i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оценивается возможное количество компонент связности в графе функционирования таких систем и описываются некоторые виды графов с одной компонентой связности.

Состояние x ДДС (S, δ) называется неподвижной точкой, если $\delta(x) = x$.

Лемма 2. *Количество неподвижных точек произвольной дискретной динамической системы $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}, \delta)$ не превосходит 2^n .*

Доказательство. Из определения отображения δ следует, что, если состояние $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ является неподвижной точкой, то $\alpha_i \in \{0, p_i - 1\}$ для всех i . $\square$

Лемма 3. *Количество компонент связности графа состояний произвольной дискретной динамической системы $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}, \delta)$ не превосходит $2^n + \lfloor \frac{p_1 p_2 \dots p_n - 2^n}{2} \rfloor$, причем если все p_i четны, то эта оценка достижима.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что количество компонент связности, состоящих из одной вершины не превосходит 2^n , таким образом, остальные $p_1 p_2 \dots p_n - 2^n$ вершин лежат в компонентах связности, состоящих минимум из двух вершин.

Если p_i четно для любого i , то рассмотрим дискретную динамическую систему с управляющими функциями во всех вершинах

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } x_i \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Очевидно, что для любого состояния $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ данной системы $\delta_i^2(x) = x$, более того, если $x_i \in \{0, p_i - 1\}$ для любого i , то $\delta_i(x) = x$, а значит такое состояние является неподвижной точкой, и в графе состояний данному переходу соответствует петля. Таким образом, в графе состояний данной системы 2^n циклов длины 1 и $\frac{p_1 p_2 \cdots p_n - 2^n}{2}$ циклов длины 2. $\square$

Обозначим через $G_n[p_1, \dots, p_n]$ ориентированный граф на множестве вершин $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n}$, в котором существует дуга из $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ в $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ тогда и только тогда, когда для любого i выполняется одно из

- (1) $\alpha_i = \beta_i - 1$;
- (2) $\alpha_i = \beta_i + 1$;
- (3) $\alpha_i = \beta_i = 0$;
- (4) $\alpha_i = \beta_i = p_i - 1$.

Поскольку граф функционирования ДДС однозначно определяет все управляющие функции и всю систему в целом, то справедлива

Лемма 4. *Остовный подграф графа $G_n[p_1, \dots, p_n]$, $n \geq 2$, $p_i \geq 2$ для любого i , является графом функционирования некоторой дискретной динамической системы $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n}, \delta)$ тогда и только тогда, когда в нем полустепень исхода каждой вершины равна 1.*

Эта лемма позволяет описывать некоторые свойства функционирования исследуемой ДДС.

Основанием орграфа называется обыкновенный граф, получаемый из орграфа сначала удалением ориентации всех дуг, затем удалением петель и кратных рёбер.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 2$, $2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n$. Тогда*

- (1) *в графе $G_n[p_1, \dots, p_n]$ есть гамильтонова цепь между вершинами $(0, 0, \dots, 0)$ и $(0, 0, \dots, 0, p_n - 1)$;*
- (2) *в графе $G_n[p_1, \dots, p_n]$ существует гамильтонов цикл;*
- (3) *если $n = 2$ и $p_1 > 2$ или $n > 2$, то граф $G_n[p_1, \dots, p_n]$ гамильтоново связан.*

Доказательство. Докажем индукцией по n . Пусть $n = 2$ и $p_1 = 2$. Тогда цикл

$$(0, 0), (0, 1), \dots, (0, p_2 - 1), (1, p_2 - 1), (1, p_2 - 2), \dots, (1, 0), (0, 0)$$

является гамильтоновым. Докажем индукцией по p_2 существование гамильтоновой цепи между вершинами $(0, 0)$ и $(0, p_2 - 1)$ в графе $G_2[2, p_2]$. При $p_2 = 2$ утверждение очевидно. Пусть в графе $G_2[2, p_2]$ искомая цепь найдена. Если последним ребром в ней является $(1, p_2)(0, p_2)$, то убираем его и добавляем цепь $(1, p_2), (1, p_2 + 1), (0, p_2), (0, p_2 + 1)$. В противном случае просто добавляем цепь $(0, p_2), (1, p_2 + 1), (0, p_2 + 1)$. Получаем искомую гамильтонову цепь в $G_2[2, p_2 + 1]$.

Если $n = 2$ и $p_1 > 2$, то основание графа $G_2[p_1, p_2]$ изоморфно графу $D(p_1, p_2)$ и по теореме 1 оно гамильтоново связно. Следовательно, гамильтоново связан и граф $G_2[p_1, p_2]$. Из этого следуют и остальные два утверждения.

Докажем теперь шаг индукции. Пусть $n > 3$. Если $p_n = 2$, то граф $G_n[2, \dots, 2]$ является полным, а следовательно, удовлетворяет всем трем условиям.

Пусть $p_n > 2$. По индукционному предположению в $G_{n-1}[p_1, \dots, p_{n-1}]$ есть гамильтонова цепь $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$ между вершинами $x_0 = (0, \dots, 0)$ и $x_{t-1} = (0, \dots, 0, p_n - 1)$, где $t = p_1 p_2 \dots p_{n-1}$. Рассмотрим граф H с множеством вершин $\{x_0, x_1, \dots, x_{t-1}\} \times \{0, 1, \dots, p_n - 1\}$ и множеством ребер

$$\begin{aligned} \{(x_i, s)(x_j, q) \mid & \text{либо } |i - j| = 1, |s - q| = 1, \\ & \text{либо } |i - j| = 1, s = q \in \{0, p_n - 1\}, \\ & \text{либо } i = j \in \{0, t - 1\}, |s - q| = 1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что граф H с одной стороны является остовным подграфом основания графа $G_n[p_1, \dots, p_n]$, с другой изоморфен графу $D(t, p_n)$, который по теореме 1 является гамильтоново связным. $\square$

Заметим, что теорема 2 дает некоторое обобщение результата теоремы 1 на многомерный случай.

Следствие 1. Для любых $n \geq 2$, $2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n$ существует дискретная динамическая система $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}, \delta)$, граф функционирования которой имеет одну компоненту связности в виде контура.

Следствие 2. Для любых $n \geq 2$, $2 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n$, причем если $n = 2$, то $p_1 > 2$, и любых различных $x, y \in \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}$ существует дискретная динамическая система $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}, \delta)$, граф функционирования которой имеет одну компоненту связности в виде простой ориентированной цепи, с началом в x и заканчивающейся контуром длины 1 или 2, содержащим y .

REFERENCES

- [1] T. Akutsu, S. Kuhara, O. Maruyama, S. Miyano, *Identification of genetic networks by strategic gene disruptions and gene overexpressions under a Boolean model*, Theoretical Computer Science, **298**:1 (2003), 235–251. Zbl 1038.68090
- [2] Ts.Ch.-D. Batueva, *Discrete dynamical systems with threshold functions at the vertices*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:4 (2014), 25–32, in Russian. MR3289218
- [3] I.S. Bykov, *Functioning of discrete dynamic circulant-type system with threshold functions*, Prikl. Diskr. Mat., **4**:26 (2014), 84–95.
- [4] G.V. Demidenko, N.A. Kolchanov, V.A. Likhoshvai, Yu.G. Matushkin, S.I. Fadeev, *Mathematical modeling of regular contours of gene networks*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **44**:12 (2004), 2276–2295, in Russian (English transl.: Comput. Math. Math. Phys., **44**:12 (2004), 2166–2183). Zbl 1069.92001
- [5] Evdokimov A.A., Perezhogin A.L., *Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:3 (2011), 39–48, in Russian (English transl.: J. Appl. Industr. Math., **6**:2 (2012), 160–166). MR2883746
- [6] E.D. Grigorenko, A.A. Evdokimov, V.A. Likhoshvai, I.A. Lobareva, *Nepodvizhnye točki i tsikly avtomatnykh otobrazhenii, modeliruyushchikh funktsionirovanie gennykh setei*, Vestnik TGU, **14**:Prilozhenie (2005), 206–212.

- [7] R.W. Hung, H.D. Chen, S.C. Zeng, *The Hamiltonicity and Hamiltonian connectivity of some shaped supergrid graphs*, IAENG Int. J. Comput. Sci., **44**:4 (2017), 432–444. http://www.iaeng.org/IJCS/issues_v44/issue_4/IJCS_44_4_04.pdf
- [8] R.W. Hung, F. Keshavarz-Kohjerdi, C.B. Lin, J.S. Chen, *The Hamiltonian connectivity of alphabet supergrid graphs*, IAENG Int. J. Appl. Math., **49**:1 (2019), 69–85. http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v49/issue_1/IJAM_49_1_10.pdf
- [9] R.W. Hung, C.F. Li, J.S. Chen, Q.S. Su, *The Hamiltonian connectivity of rectangular supergrid graphs*, Discrete Optim., **26** (2017) 41–65. Zbl 1387.05140
- [10] R.W. Hung, C.C. Yao, S.J. Chan, *The Hamiltonian properties of supergrid graphs*, Theoret. Comput. Sci., **602** (2015), 132–148. Zbl 1330.05093
- [11] A.V. Komarov, A.A. Evdokimov, V.A. Likhoshvai, *O vosstanovimosti diskretnykh modelej gennykh setej*, Vestnik TGU, **3** (2006), 437–467.
- [12] A.S. Kornienko, *Structure of functional graphs for circulants with linear Boolean functions at the vertices*, Prikl. Diskr. Mat., **1**:23 (2014), 84–95. <http://mi.mathnet.ru/eng/pdm445>
- [13] E.O. Kutumova, A.A. Evdokimov, *Reversible states of functioning the regulatory circuits discrete models the gene nets*, Vestnik TGU Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika, **14**:1 (2011), 85–94.
- [14] A.M. Nazhmidenova, A.L. Perezhogin, *A discrete dynamical system on a double circulant*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:4 (2014), 80–88, in Russian (English transl.: J. Appl. Industr. Math., **8**:4 (2014), 568–573). MR3289223
- [15] A.S. Parfinenko, A.L. Perezhogin, *The functional graph of a linear discrete dynamical system with two dominating vertices*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **25**:4 (2018), 81–96, in Russian (English transl.: J. Appl. Industr. Math., **12**:4 (2018), 706–715). Zbl 07139170
- [16] N.V. Prytkov, A.L. Perezhogin, *Recovery algorithms for discrete dynamic system with threshold functions*, Tr. SPIIRAN, **49** (2016), 66–79. DOI 10.15622/sp.49.4

NIKOLAY VLADIMIROVICH PRYTKOV
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: n.v.prytkov@gmail.com

ALEKSEI L'VOVICH PEREZHOGIN
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: pereal@math.nsc.ru