Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Greshnov, R. I. Zhukov, Completeness theorem in (q_1, q_2) -quasimetric spaces,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2019, Volume 16, 2090–2097

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.148>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 12:55:50

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 2090–2097 (2019)

УДК 515.124.2

DOI 10.33048/semi.2019.16.148

MSC 30L99, 53C23, 54D10

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВ

А.В. ГРЕШНОВ, Р.И. ЖУКОВ

ABSTRACT. In (q_1, q_2) -quasimetric space (X, d) we proved the completeness theorem for (q_1, q_2) -quasimetric space $(\mathcal{M}_{\bar{d}}, H)$, where $\mathcal{M}_{\bar{d}}$ is the set of all $\bar{d}$ -closed sets, $\bar{d}$ is conjugate to d (q_2, q_1)-quasimetric, H is the Hausdorff distance.

Keywords: (q_1, q_2) -quasimetric space, completeness, conjugate (q_2, q_1) -quasimetric, Hausdorff distance.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], где были доказаны теоремы о полноте (q_1, q_2) -квазиметрических пространств, определенных на совокупности $\mathcal{M}_d(X)$ замкнутых подмножеств (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) , снабженной соответствующими аналогами расстояния по Хаусдорфу. Для того, чтобы сформулировать полученные там результаты, приведем некоторые определения.

(q_1, q_2) -квазиметрическим пространством [3] называется пара (X, d) , где X — некоторое множество, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция такая, что для нее выполняются *аксиома тождества*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

и (q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника, т. е.

$$d(x, y) \leq q_1 d(x, z) + q_2 d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

GRESHNOV, A.V., ZHUKOV, R.I., COMPLETENESS THEOREM IN (q_1, q_2) -QUASIMETRIC SPACES.

© 2019 ГРЕШНОВ А.В., ЖУКОВ Р.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0006.

Поступила 1 декабря 2019 г., опубликована 27 декабря 2019 г.

Выражение $d(x, y)$ обозначает (q_1, q_2) -квазирасстояние именно от точки x до точки y . Символом $\bar{d}$ мы обозначаем сопряженную к d (q_2, q_1) -квазиметрику [3], которая определяется как $\bar{d}(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$. Если $q_1 = q_2 = 1$, то (X, d) является квазиметрическим пространством [2].

Если для (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) выполняется следующее условие

$$d(x, y) \leq q_0 d(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

где константа q_0 не зависит от выбора точек x, y , то называем (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) q_0 -симметрическим. Множества

$$B_d^o(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, \quad B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

будем называть d -открытым и d -замкнутым шарами с центром в точке x радиуса r соответственно. Множество $U \subset X$ мы будем называть d -открытым, если для любой точки $u \in U$ найдется число $r_u > 0$ такое, что $B_d^o(u, r_u) \subset U$. Так определенные d -открытые множества, очевидно, задают на X топологию, которую будем обозначать через τ_d . Множество называется d -замкнутым, если его дополнение открыто. (Заметим, что множества $B_d^o(x, r)$ и $B_d(x, r)$ могут и не быть d -открытыми и d -замкнутыми.) Точка x_0 называется точкой d -прикосновения множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем $A \cap B_d^o(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Точка x_0 называется d -предельной точкой множества $A \subset (X, d)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in A$, $x_\varepsilon \neq x_0$, такая, что $x_\varepsilon \in B_d^o(x_0, \varepsilon)$. Несложно видеть, что: множество $A \subset (X, d)$ d -замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки; множество $A \subset (X, d)$ d -замкнуто тогда и только тогда, когда множество $X \setminus A$ открыто.

В дальнейшем символом $\mathcal{M}_d(X)$ мы обозначаем множество всех d -замкнутых в смысле (q_1, q_2) -квазиметрики d подмножеств множества X .

Определение 1. Расстоянием от множества $A \subset X$ до множества $B \subset X$ на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Определение 2. (q_1, q_2) -отклонением по Хаусдорфу множества $A \subset X$ от множества $B \subset X$ на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина

$$h^+(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B).$$

Определение 3. Расширенной (q_1, q_2) -квазиметрикой Хаусдорфа на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) называется величина

$$h(A, B) = \max\{h^+(A, B), h^+(B, A)\} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_d(X).$$

Утверждение 1 ([1]). Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда $(\mathcal{M}_d(X), h)$ является симметрическим (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

Определение 4. Последовательность $\{x_i\} \subset (X, d)$ d -сходится к точке $x_0 \in X$ ($x_i \rightarrow_{i \rightarrow \infty} x_0$), если каждое множество $B_d^o(x_0, \varepsilon)$ содержит все точки x_i , начиная с некоторой; точка x_0 в этом случае называется d -пределом последовательности $\{x_i\}$. По-другому, последовательность $\{x_i\}$ d -сходится к x_0 , если $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_0, x_i) = 0$.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая (q_1, q_2) -квазиметрическому пространству (X, d) , называется правой фундаментальной последовательностью или правой последовательностью Коши (левой фундаментальной последовательностью или левой последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $N < m < n$ выполняется

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Определение 6 ([3]). (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) называется полным, если его любая правая последовательность Коши имеет d -предел.

Определение 7 (ср. с [8]). (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) называется полным слева, если его любая левая последовательность Коши имеет d -предел, принадлежащий X .

Определение 8. Функция f , определенная на (q_1, q_2) -квазиметрическом пространстве (X, d) , называется полунепрерывной сверху (снизу) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $r_{x_0, \varepsilon} > 0$ такое, что

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (f(x_0) < f(x) + \varepsilon) \quad \forall x \in B_d^q(x_0, r_{x_0, \varepsilon}).$$

Если функция f одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0 , то говорим, что f непрерывна в точке x_0 . Функция $F(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (полу)непрерывна (сверху или снизу) по первому аргументу, если при каждом фиксированном y_0 (полу)непрерывна (сверху или снизу) функция $F_1(x) = F(x, y_0)$. Точно также определяется (полу)непрерывность (сверху или снизу) функции $F(x, y)$ и по второму аргументу.

Теорема 1 ([1]). Пусть (X, d) — полное (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, где функция d полунепрерывна снизу по второму аргументу. Тогда $(\mathcal{M}_d(X), h)$ является полным.

Говорим, что (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству **Cl**, если для любых $A, B \in \mathcal{M}_d(X)$ таких, что

$$B \subseteq N_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B_d^o(x, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

выполняется $B \subseteq A$.

Обозначим $H^+(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid B \subseteq N_\varepsilon(A)\}$.

Теорема 2 ([1]). Пусть полное слева (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству **Cl**. Тогда (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство $(\mathcal{M}_d(X), g)$ является полным, где

$$g(A, B) = h^+(A, B) + H^+(A, B).$$

В работе [1] изучался вопрос о достаточных условиях метрического характера, при которых (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет свойству **Cl**. Для этого там использовались следующие понятия.

Определение 9. Множество $A \subset (X, d)$ называется d -ограниченным ($\bar{d}$ -ограниченным), если найдется константа K такая, что $d(x, y) < K \quad \forall y \in A$ ($\bar{d}(x, y) < K \quad \forall y \in A$) для некоторой точки $x \in X$.

Определение 10. Назовем (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) одинаково ограничивающим, если любое d -ограниченное множество $A \subset X$ является $\bar{d}$ -ограниченным, и наоборот.

Определение 11. (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) удовлетворяет $(\bar{d}, d)$ -свойству Гейне — Бореля, если из любой $\bar{d}$ -ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выбрать d -сходящуюся к некоторому элементу $x \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$.

Аналогично можно определить (d, d) -свойство Гейне — Бореля, меняя в определении 11 соответственно $\bar{d}$ -ограниченность на d -ограниченность, и т. п.

В § 2 мы приводим примеры 2–4, иллюстрирующие определения 9–11.

Приведем аналог «обычного» определения метрики Хаусдорфа для случая (q_1, q_2) -квазиметрических пространств.

Определение 12. (q_1, q_2) -расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A_1, A_2 (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, d) называется величина

$$H(A_1, A_2) = \max\{H^+(A_1, A_2), H^+(A_2, A_1)\}.$$

Известно, см. [6], что на метрических пространствах понятие расширенной метрики Хаусдорфа является переформулировкой понятия обычной метрики Хаусдорфа. Однако, из-за отсутствия аксиомы симметрии в определении (q_1, q_2) -квазиметрики, функции множеств H и h принципиально различны, их билипшицева эквивалентность ниоткуда не следует на (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах; в § 2 нами построен соответствующий пример 1. Нами показано (см. свойство 1), что на совокупности множеств $\mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$ функция расстояния $H(A, B)$ является (q_1, q_2) -квазиметрикой.

Основным результатом нашей работы является следующая

Теорема 3. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, d) является полным слева. Тогда $(\mathcal{M}_{\bar{d}}(X), H)$ является полным.

Теорема 3 дополняет результаты работы [1].

Настоящая работа основана на подходах и технике, развитой в [3, 4, 5]. Также следует отметить работу [7], в которой была изучена топология f -квазиметрических пространств, включающих в себя и (q_1, q_2) -квазиметрические пространства; в [7], в частности, читатель может найти для себя необходимые разъяснения и иллюстрации тех или иных топологических объектов f -квазиметрических пространств.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Пример 1. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$. Обозначим $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Определим на множестве $X = A \cup B$ функцию расстояния d следующим образом: для всевозможных $m, n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$d(a_n, b_m) = \frac{1}{m}, \quad d(b_m, a_n) = \frac{1}{n}, \quad d(a_m, a_n) = d(b_m, b_n) = \frac{1}{n},$$

$$d(a_n, a_n) = d(b_n, b_n) = 0.$$

Мы имеем

$$d(a_m, b_n) = \frac{1}{n} \leq d(a_m, b_k) + d(b_k, b_n) = \frac{1}{k} + \frac{1}{n},$$

$$d(a_m, a_n) = \frac{1}{n} \leq d(a_m, b_k) + d(b_k, a_n) = \frac{1}{k} + \frac{1}{n},$$

откуда следует, что (X, d) является квазиметрическим пространством. Для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(a_n, b_m) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d(a_n, b_m) = 0,$$

откуда следует, что для любого a_n

$$\text{dist}(a_n, B) = 0 \Rightarrow h^+(A, B) = 0;$$

точно также можно показать, что $h^+(B, A) = 0$. Поэтому $h(A, B) = 0$. С другой стороны, для любого n мы имеем

$$d(a_n, b_1) = d(b_n, a_1) = 1,$$

откуда следует, что

$$H(A, B) = 1.$$

Пример 2. Из d -ограниченности множества не следует его $\bar{d}$ -ограниченность; в качестве примера рассмотрим квазиметрическое пространство $([0, 1/2], d)$, где

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & y = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, & 0 < x < y, \\ x - y, & x > y > 0, \\ y, & x = 0, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность точек $\{x_n\} \subset [0, 1/2]$, сходящуюся в обычном смысле к 0. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} d(0, x_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}(0, x_n) = \infty$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\rho : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ такую, что

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \rho(0, \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2^0 \quad & \rho(0, \alpha) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 3^0 \quad & \rho(\alpha, 1) = \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 4^0 \quad & \rho(\alpha, 1) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow \rho(0, 1) = 1, \\ 5^0 \quad & \rho(1, \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}], \\ 6^0 \quad & \rho(1, \alpha) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 7^0 \quad & \rho(\alpha, 0) = \alpha, \quad \alpha \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow \rho(1, 0) = 1, \\ 8^0 \quad & \rho(\alpha, 0) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}], \\ 9^0 \quad & \rho(\alpha, \alpha) = 0, \quad \alpha \in [0, 1], \\ 10^0 \quad & \rho(\beta, \gamma) = |\beta - \gamma|, \quad \beta, \gamma \in (0, 1). \end{aligned}$$

Можно проверить, что функция ρ удовлетворяет обычному неравенству треугольника. Из 1^0 – 8^0 вытекает, что для ρ обобщенная симметрия не может быть выполнена ни для какой константы q_0 . Отметим, что любая последовательность точек $\{x_n\}$, сходящаяся в обычном смысле к 0 или к 1, имеет два d -предела — элементы 0 и 1. Квазиметрическое пространство $([0, 1], \rho)$ является одинаково ограничивающим в силу того, что расстояния $\rho(x, y)$, $\bar{\rho}(x, y)$ между его любыми двумя элементами не превосходит 1, и удовлетворяет (d, d) -свойству Гейне — Бореля.

Пример 4. В евклидовой плоскости рассмотрим единичную окружность S , на которой определим следующую квазиметрику d : расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя точкам $x, y \in S$ равно длине пути, который мы проходим против

часовой стрелке от точки x до точки y . Понятно, что $B_d^o(x, r)$ — направленная дуга $l_{x,y}$ длины r с началом в точке x без своего конца y , соответственно $B_d(x, r)$ — направленная дуга $\hat{l}_{x,y}$ длины r с началом в точке x вместе со своим концом y . Рассмотрим некоторую последовательность точек $\{x_n\}$ такую, что $d(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1000000^n}$. Обозначим $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Множество A является d -замкнутым, т. к. содержит все свои предельные точки. У последовательности $\{x_n\}$ есть в обычном смысле предел $x_0 \in S$. Обозначим $B = A \cup \{x_0\}$. Множество B является d -замкнутым. Мы имеем $A \subset B$, с другой стороны, $B \subset \bigcup_{x \in A} B_d^o(x, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$; т. е. для (S, d) условие С1 не выполняется. Попутно заметим, что $(\bar{d}, d)$ -свойство Гейне — Бореля не выполняется для (S, d) — последовательность $\{x_n\}$ не имеет d -предела.

3. ФУНКЦИЯ РАССТОЯНИЯ $H(A, B)$

Свойство 1. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда

- 1⁰ $H(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \subset (X, d)$;
- 2⁰ $H(A, B) = H(B, A) \quad \forall A, B \subset (X, d)$;
- 3⁰ $H^+(A, C) \leq q_1 H^+(A, B) + q_2 H^+(B, C) \quad \forall A, B, C \subset (X, d)$;
- 4⁰ $H(A, C) \leq q_1 H(A, B) + q_2 H(B, C) \quad \forall A, B, C \subset (X, d)$;
- 5⁰ пусть $A, B \in \mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$, тогда $H^+(A, B) = 0 \Rightarrow A \subseteq B$;

Доказательство. Пп. 1⁰, 2⁰ очевидны.

3⁰ Пусть $H(A, B) = \varepsilon_1$, $H(B, C) = \varepsilon_2$. Тогда для любого $\delta > 0$ выполняется

$$B \subset N_{\varepsilon_1 + \delta}(A), \quad C \subset N_{\varepsilon_2 + \delta}(B),$$

тогда

$$C \subset N_{\varepsilon_3}(A), \quad \varepsilon_3 = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + (q_1 + q_2) \delta,$$

откуда следует, что $H^+(A, C) \leq \varepsilon_3$. Так как число δ выбиралось произвольно, то

$$(1) \quad H^+(A, C) \leq q_1 H^+(A, B) + q_2 H^+(B, C).$$

П. 4⁰ вытекает из (1) и определения 12.

5⁰ Предположим, что нашлась точка $b \in B$ такая, что $b \notin A$. Так как $H^+(A, B) = 0$, то найдется последовательность точек $\{a_n\} \in A$ такая, что

$$(2) \quad d(a_n, b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Но поскольку A является $\bar{d}$ -замкнутым множеством, то из (2) вытекает, что $b \in A$. □

Следствие 1. Пусть (X, d) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Тогда $(\mathcal{M}_{\bar{d}}(X), H)$ является симметрическим (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{S_n\} \subset \mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$ — последовательность Коши в (X, H) , т. е. в данном случае

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N, H(S_m, S_n) < \varepsilon.$$

Обозначим через S множество точек $x \in X$ таких, что для любого $\epsilon > 0$ существует $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $B_d^o(x, \epsilon) \cap S_n \neq \emptyset$ для всех $n > n_\epsilon$.

Множество S является $\bar{d}$ -замкнутым. Действительно, пусть s — предельная точка множества S ; таким образом, найдется последовательность точек $\{s_n\} \subset S$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}(s, s_n) = 0.$$

Из определения множества S вытекает, что для каждого n и любого числа ϵ_n найдется точка $a_n \in B_d^o(s_n, \epsilon_n) \cap S_{m_n}$, откуда следует

$$\bar{d}(s, a_n) \leq q_2 \bar{d}(s, s_n) + q_1 \bar{d}(s_n, a_n),$$

откуда и следует $\bar{d}$ -замкнутость S .

¹⁰ Покажем, что $H^+(S_n, S) < K\varepsilon$, где константа K не зависит от ε . Пусть $x \in S$. Найдется число $m > n_\varepsilon$ такое, что $B_d^o(x, \varepsilon) \cap S_m \neq \emptyset$, откуда следует, что найдется точка $y \in S_m$, $m \geq n$, что $d(y, x) < \varepsilon$. Так как $\{S_n\} \subset \mathcal{M}_{\bar{d}}(X)$ — последовательность Коши в (X, H) , то найдется точка $z \in S_n$ такая, что

$$d(z, y) < \varepsilon,$$

тогда

$$d(z, x) \leq q_1 d(z, y) + q_2 d(y, x) < (q_1 + q_2)\varepsilon,$$

откуда следует требуемое неравенство.

Мы имеем

$$g(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow h^+(S_m, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \text{dist}(y, S_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists z \in S_n : d(y, z) \leq \varepsilon.$$

Следовательно

$$d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z) < (q_1 + q_2)\varepsilon \Rightarrow h^+(S, S_n) < K\varepsilon.$$

²⁰ Покажем, что $H^+(S, S_n) < K'\varepsilon$, где константа K' не зависит от ε . Пусть $x \in S_n$. Зафиксируем некоторое положительное число $\delta < 1$ такое, что

$$q_1 \delta < 1.$$

Выберем число $n_1 > n$ таким образом, чтобы $H^+(S_m, S_{n_1}) < \varepsilon \delta$ для всех $m > n_1$, выберем число n_2 таким образом, чтобы $H^+(S_m, S_{n_2}) < \varepsilon \delta^2$ для всех $m > n_2$, и т. д. Тогда из определения функции множеств H^+ вытекает, что найдутся точки $x_i \in S_{n_i}$ такие, что $d(x_1, x) < \varepsilon$, $d(x_2, x_1) < \varepsilon \delta$, $d(x_3, x_2) < \varepsilon \delta^2$, и т. д. Докажем, что $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши. Мы имеем

$$\begin{aligned} (3) \quad d(x_{l+k}, x_l) &\leq q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2 d(x_{l+1}, x_l) \leq q_1 d(x_{l+k}, x_{l+1}) + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq q_1 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+2}) + q_2 d(x_{l+2}, x_{l+1})) + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq q_1^2 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+3}) + q_2 d(x_{l+3}, x_{l+2})) + q_1 q_2 \varepsilon \delta^{l+1} + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\quad q_1^3 (q_1 d(x_{l+k}, x_{l+4}) + q_2 d(x_{l+4}, x_{l+3})) + q_1^2 q_2 \varepsilon \delta^{l+2} + q_1 q_2 \varepsilon \delta^{l+1} + q_2 \varepsilon \delta^l \\ &\leq \dots \leq q_2 \varepsilon \delta^l ((q_1 \delta)^{k-1} + \dots + 1) = q_2 \varepsilon \delta^l \frac{1 - (q_1 \delta)^k}{1 - q_1 \delta}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает искомое.

Из (3), в частности, следует, что

$$(4) \quad d(x_m, x) \leq q_2 \varepsilon \frac{1 - (q_1 \delta)^m}{1 - q_1 \delta} < \frac{q_2 \varepsilon}{1 - q_1 \delta}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{x_i\}$ является левой последовательностью Коши, а (X, d) является полным слева, то существует некоторая точка $y \in X$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(y, x_m) = 0,$$

откуда вытекает, что $y \in S$. Тогда, используя (4), мы получаем

$$d(y, x) \leq q_1 d(y, x_m) + q_2 d(x_m, x) \leq q_1 d(y, x_m) + \frac{q_2^2 \varepsilon}{1 - q_1 \delta},$$

откуда и следует теорема 3. □

REFERENCES

- [1] A.V. Greshnov, *Distance function between sets in (q_1, q_2) -quasimetric spaces*, Siberian Math. Jour., (2020) (accepted).
- [2] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, American J. of Math., **53**:3 (1931), 675–684. MR1506845
- [3] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *(q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points*, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **82**:2 (2018), 3–32; translation in Izv. Math. **82**:2 (2018), 245–272. MR3780044
- [4] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *The theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points*, Doklady Mathematics, **94**:1 (2016), 434–437. Zbl 1352.54030
- [5] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *Coincidence points of set-valued maps in (q_1, q_2) -quasimetric spaces*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk, **476**:2 (2017), 129–132; translation in Doklady Mathematics, **96**:2 (2017), 438–441. MR3791184
- [6] D. Burago, Yu. Burago, S.A. Ivanov, *Course in metric geometry* (English), Graduate Studies in Mathematics. 33. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xiv, 415 p. (2001). Zbl 0981.51016
- [7] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, L.V. Lokutsievskii, K.V. Storozhuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics*, Topology Appl., **221** (2017), 178–194. MR3624455
- [8] M. Cvetković, E. Karapinar, V. Rakocević, *Some fixed point results on quasi- b -metriclike spaces*, J. Inequal. Appl., **2015**:374 (2015), 17 pp. MR3430285

ALEXANDR VALER'YEVICH GRESHNOV
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA,
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru

ZHUKOV ROMAN IVANOVICH
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: eifromdc@yandex.ru