Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Shelukhin, V. V. Neverov, A. M. Krivtsov, Dense suspensions and generalized Fick's law, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 2124–2133

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.151>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.60.19

April 26, 2023, 12:27:08

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 2124–2133 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.151

УДК 532.529.2

MSC 76T25

КОНЦЕНТРИРОВАННЫЕ СУСПЕНЗИИ И ОБОБЩЕННЫЙ
ЗАКОН ФИКА

В.В. ШЕЛУХИН, В.В. НЕВЕРОВ, А.М. КРИВЦОВ

ABSTRACT. A two-velocity mathematical model is proposed for slurry flows. Equations agree with thermodynamic laws. The sedimentation problem is addressed. Particularly, the Boycott effect is justified; we prove that, due to gravitation, the settling velocity increases in the tilted vessel.

Keywords: gravitational convection, particle sedimentation, suspension, disperse mixture, particles, tilted vessel, interphase force.

1. ВВЕДЕНИЕ

Течения суспензий зависят от взаимодействия частиц с жидкостью и между собой. Обычно суспензия трактуется как однофазная жидкость с эмпирической формулой для эффективной вязкости [1]. Большое число работ посвящено реологии смеси ньютоновской жидкости со сферическими частицами. Исследования в данной тематике восходят к работе Эйнштейна [2], где вычислена поправка первого порядка (по объемной доли частиц) к вязкости разбавленных суспензий. Поправка второго порядка была найдена в работе Batchelor-Green [3]. Для больших концентраций находят большое применение эмпирические

SHELUKHIN, V.V., NEVEROV, V.V., KRIVTSOV, A.M., DENSE SUSPENSIONS AND GENERALIZED FICK'S LAW.

© 2019 Шелухин В.В., Неверов В.В., Кривцов А.М.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках ФЦП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы Мероприятие 1.2., Соглашение о предоставлении субсидии №14.575.21.0146 от 26.09.2017, уникальный идентификатор ПНИ: RFMEFI57517X0146. Индустриальный партнер: ООО «Газпромнефть НТЦ».

Поступила 28 ноября 2019 г., опубликована 30 декабря 2019 г.

формулы Krieger–Dougherty [4] и Quemada [5], которые согласуются с поправкой Эйнштейна при малых концентрациях. Полный обзор известных замыкающих эмпирических соотношений приведен в работе [16].

Другой подход основан на том, что вязкая жидкость и частицы трактуются как различные несжимаемые жидкости [6]. Ряд работ по двухскоростным моделям основан на теории Ландау–Халатникова [7, 8]. В этой теории в обратимом приближении силы взаимодействия между фазами вычисляются в процессе согласования уравнения энергии с основными законами сохранения и с законами термодинамики с учетом инвариантности законов сохранения относительно преобразований Галилея [9]. В необратимом приближении диссипативные силы вводятся согласно общим принципам линейной термодинамики необратимых процессов Де Гроот–Мазур [10].

В данной работе за основу также выбран метод Ландау, но в отличие от работы [9] к законам сохранения добавлен закон Фика, который учитывает не только диффузию концентрации частиц, но и гравитационную мобильность, бародиффузию и температурную диффузию. При этом закон сохранения для концентрации частиц также инвариантен относительно преобразований Галилея, а закон Фика согласован с неотрицательным производством энтропии.

Рассмотрено применение разработанной модели к задаче гравитационной конвекции. Этой проблеме посвящено много публикаций. Некоторый обзор содержится в работах [11, 12]. Мы показываем, что концентрация частиц не выходит за пределы интервала $0 < c < 1$, несмотря на то, что ее динамика описывается не уравнением переноса, как это предполагается в большинстве работ, а более сложным уравнением с матричным коэффициентом диффузии. Хотя твердые и жидкие частицы вовлечены в вихревые течения как в вертикальном стакане, так и в наклонном, тем не менее осадочный слой растет таким образом, что его верхняя граница остается всегда горизонтальной прямой. Один из выводов настоящей статьи заключается в том, что предложенная модель описывает эффект Бойкотта (Boycott, [13]), т. е. седиментация в наклонной ячейке происходит быстрее, чем в вертикальной. Объяснение связано с тем, что вихревая структура потоков существенно зависит от угла наклона ячейки.

Вихревая причина эффекта Бойкотта обнаружена и в других работах (см. [12]). Главное отличие настоящей работы от известных публикаций состоит в том, что не требуется вводить дополнительные силы; достаточно лишь учесть указанные выше диффузионные потоки.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Рассматривается смесь двух взаимопроникающих сред [14], т. е. в произвольном объеме V содержатся и жидкость (индекс f) и гранулированная фаза (индекс s). Объем, масса и давление жидкой и гранулированной фаз обозначим V_f, m_f, p_f и V_s, m_s, p_s соответственно. Предполагается, что гранулированная фаза представляет собой смесь сухих частиц и несущей жидкости, например гель с проппантом. При этом $V_s = V_M + V_p$ и $m_s = m_M + m_p$. Частицы "вморожены" в несущую жидкость, т. е. гранулированная фаза характеризуется всего одной скоростью $\mathbf{v}_s$, одной вязкостью и одним тензором напряжений.

Перейдем к переменным, определенным для единичного объема

$$(1) \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad \rho_s = \frac{m_s}{V}, \quad \rho_f = \frac{m_f}{V}, \quad \rho_p = \frac{m_p}{V}, \quad \phi_k = \frac{V_k}{V}, \quad \rho_M = \frac{m_M}{V}, \quad c = \frac{m_p}{m}.$$

Здесь, $c = \rho_p/\rho$ — массовая концентрация частиц в смеси, а ϕ_k — объемная доля фазы k , где $k = f, p, M$. Из введенных определений следует, что парциальные плотности ρ_k связаны с физическими плотностями $\bar{\rho}_k$ по следующим формулам

$$\rho_k = \phi_k \bar{\rho}_k, \quad \bar{\rho}_k \equiv \frac{m_k}{V_k}, \quad \phi_f + \phi_s = 1, \quad \phi_s = \phi_p + \phi_M, \quad \rho = \rho_f + \rho_p + \rho_M.$$

В общем случае давления в фазах p_s и p_f различны. Далее в работе предполагается, что силы поверхностного натяжения на границах между фазами пренебрежимо малы и можно использовать приближение $p_s = p_f = p$, аналогично тому, как это было сделано в [14].

Введем обозначения: $\mathbf{v}_f$ — скорость жидкой фазы; $\mathbf{l}$ — вектор потока концентрации; T_i — вязкая часть тензора напряжения фазы i ; $\mathbf{g}$ — вектор гравитации; k — коэффициент межфазного трения.

Если пренебречь вращением частиц и тепловыми эффектами, то из работы [14] можно получить следующую математическую модель для шести неизвестных функций $\rho_s, \rho_f, p, c, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f$:

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho_s \mathbf{v}_s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{v}_s) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 - k \mathbf{u} + \operatorname{div} T_s + \rho_s \mathbf{g},$$

$$(3) \quad \frac{\partial(\rho_f \mathbf{v}_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + k \mathbf{u} + \operatorname{div} T_f + \rho_f \mathbf{g},$$

$$(4) \quad \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(c \mathbf{j} + \mathbf{l}) = 0, \quad p = p(\rho),$$

$$(5) \quad \rho_{st} + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad \rho_{ft} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0,$$

где $p = p(\rho)$ — заданное уравнение состояния и

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_f \mathbf{v}_f, \quad \rho = \rho_s + \rho_f, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \equiv u_k u_k.$$

Здесь использованы следующие обозначения. Тензорное произведение $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представляет собой матрицу с компонентами $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$. Для заданной матрицы $A(\mathbf{x})$ обозначим через $A(\mathbf{x})^*$ сопряженную матрицу $(A(\mathbf{x})^*)_{ij} = (A(\mathbf{x}))_{ji}$. Компоненты вектора $\operatorname{div} A$ определяется формулой $(\operatorname{div} A)_i = \partial A_{ij} / \partial x_j$.

Фаза f считается вязкой ньютоновской жидкостью. Фаза s содержит частицы, c — их массовая концентрация по отношению ко всему двухскоростному континууму. В реологических соотношениях

$$(6) \quad T_i = 2\eta_i D_i, \quad 2D_i = \nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^*, \quad i = f, s$$

D_i — тензор скоростей деформаций, η_i — вязкость. Параметры k, η_s обычно зависят от концентрации c , а η_f является константой. Напомним определение дифференциального оператора ∇ :

$$(\nabla \mathbf{u})_{ks} = \frac{\partial u_k}{\partial x_s}, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})_k = v_s \frac{\partial u_k}{\partial x_s}.$$

Скалярное произведение матриц A и B обозначается через $A : B = A_{ij} B_{ij}$.

Модель содержит еще одно реологическое соотношение, это закон Фика для потока концентрации:

$$(7) \quad \mathbf{l} = -(\gamma_2 \nabla c + \gamma_1 \nabla p + \gamma_3 \nabla \mathbf{u}^2) + \rho c B \mathbf{g},$$

где γ_i — коэффициенты диффузии, а B — мобильность [7].

Для решения задачи о седиментации преобразуем систему уравнений (2)–(7). С помощью уравнений неразрывности (5) законы сохранения импульса (2) и (3) можно записать в виде

$$(8) \quad \rho_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right) = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 - k \mathbf{u} + \operatorname{div} T_s + \rho_s \mathbf{g},$$

$$(9) \quad \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) = -\frac{\rho_f}{\rho} \nabla p + \frac{\rho_s \rho_f}{2\rho} \nabla \mathbf{u}^2 + k \mathbf{u} + \operatorname{div} T_f + \rho_f \mathbf{g}.$$

Введем следующие предположения:

- (1) Физические плотности каждой фазы постоянны $\bar{\rho}_k \equiv \text{const}$, где $k = f, p, M$,
- (2) Объемная доля геля φ_M мала.

Тогда из определений (1) получим, что:

$$(10) \quad \rho_s \approx c\rho, \quad \rho_f \approx (1-c)\rho, \quad \varphi_s(c) = \frac{c}{R_0 + c(1-R_0)}, \quad R_0 = \frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}_f}.$$

Следует отметить, что в отличие от физических плотностей, парциальные плотности фаз ρ_i и средняя плотность суспензии ρ не являются постоянными. Далее объемные доли φ_s и φ_f а также и функции ρ_s , ρ_f , ρ рассматриваются как известные функции от массовой концентрации c :

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} = c[1 + (R_0 - 1)\phi_s(c)] \equiv r_s(c), \quad \frac{\rho_f}{\rho_f} = 1 - \phi_s(c) \equiv r_f(c), \quad \rho = \frac{\bar{\rho}_s}{R_0 + c(1 - R_0)}.$$

Функции $r_s(c)$ и $r_f(c)$ — безразмерные парциальные плотности.

Разделив уравнение (5)₁ на $\bar{\rho}_s$, уравнение (5)₂ на $\bar{\rho}_f$ и сложив их, приходим к уравнению неразрывности для среднеобъемной скорости

$$(11) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \varphi_s(c)\mathbf{v}_s + \varphi_f(c)\mathbf{v}_f, \quad \varphi_f = \frac{R_0(1-c)}{R_0 + c(1-R_0)},$$

Используя законы сохранения массы (5) и гипотезу (10), можно переписать (4) в виде

$$(12) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}) + \rho^{-1}(c)\operatorname{div} \mathbf{l} = 0.$$

Теперь модель сводится к отысканию четырех неизвестных функций p , c , $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_f$, удовлетворяющих четырем уравнениям (8), (9), (11), (12). Параметры η_s, η_f , k, γ_j считаются известными функциями от c . Заметим, что в условиях постоянства физических плотностей давление уже не является термодинамическим параметром и не удовлетворяет уравнению состояния, а находится из решения уравнений также как и в случае модели Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Соотношения (10) заменяют законы сохранения масс фаз.

Вязкость суспензии определяется по формуле Krieger-Dougherty [4]: $\eta_s/\eta_{s0} = (1 - \varphi_s/\varphi_s^*)^{-2.5}$, где η_{s0} — вязкость несущей жидкой фазы гранулированной жидкости при отсутствии частиц, φ_s^* — концентрация плотной упаковки. Коэффициенты диффузии γ_j обращаются в ноль, когда исчезает какая-либо фаза. Для

коэффициента межфазного трения известна корреляция [15]

$$k(c) = \frac{3}{4} C_D \frac{c \bar{\rho}_f |\mathbf{u}|}{d_p},$$

где d_p — диаметр частиц, C_D — коэффициент трения частицы о жидкость,

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.678}) & \text{при } Re_p < 1000, \\ 0.44 & \text{при } Re_p > 1000, \end{cases} \quad Re_p = \frac{d_p \bar{\rho}_f |\mathbf{u}|}{\eta_f}.$$

Отметим, что в задачах седиментации число Рейнольдса для частиц очень мало $Re_p \ll 1$, что позволяет использовать приближенные соотношения

$$C_D = \frac{24}{Re_p}, \quad k = \frac{18 \eta_f c}{d_p^2}.$$

Рассмотрим двумерную задачу в прямоугольнике $0 < x < a_1$, $0 < y < a_2$, с осью y , направленной вертикально вверх противоположно вектору гравитации $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_y = (0, 1)^T$,

Введем характерные значения a_1 , V , l_0 , t_0 and $\bar{p}$, и перейдем к безразмерным переменным:

$$x' = \frac{x}{a_1}, \quad y' = \frac{y}{a_1}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{V}, \quad p' = \frac{p}{\bar{p}}, \quad \mathbf{l}' = \frac{\mathbf{l}}{l_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0},$$

предполагая, что

$$t_0 = \frac{a_1}{V}, \quad l_0 = \bar{\rho}_f V, \quad \bar{p} = \bar{\rho}_f g a_1.$$

Введем безразмерные параметры

$$Re = \frac{a_1 V \bar{\rho}_f}{\eta_f}, \quad k_1 = \frac{18 \eta_f a_1}{\bar{\rho}_f V d_p^2}, \quad Fr = \frac{g a_1}{V^2},$$

$$\lambda = Fr \cdot Re = \frac{\bar{\rho}_f a_1^2 g}{\eta_f V}, \quad \beta = k_1 \cdot Re = 18 \frac{a_1^2}{d_p^2},$$

$$\Gamma_1(c) = \frac{\gamma_1 \bar{\rho}_f V^2}{a_1 l_0}, \quad \Gamma_2(c) = \frac{\gamma_2}{a_1 l_0}, \quad \Gamma_3(c) = \frac{\gamma_3 V^2}{a_1 l_0}, \quad \Gamma_4(c) = \frac{Bg}{\bar{\rho}_f V} c [r_s(c) + r_f(c)].$$

Опуская штрихи, находим, что неизвестные функции $\mathbf{v}'_f(x', y', t')$, $\mathbf{v}'_s(x', y', t')$, $c(x', y', t')$ и $p(x', y', t')$ удовлетворяют уравнениям (13)

$$r_s(c) Re \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = -c \lambda \nabla p + \frac{\eta_{s0}}{\eta_f} \operatorname{div} \left(\frac{2 \eta_s}{\eta_{s0}} D_s \right) - \beta c \mathbf{u} - \frac{Re r_s(c) (1 - c)}{2} \nabla \mathbf{u}^2 - \lambda r_s(c) \cdot \mathbf{e}_y,$$

$$(14) \quad r_f(c) Re \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} = -\lambda (1 - c) \nabla p + \operatorname{div} (2 D_f) + \beta c \mathbf{u} + \frac{Re r_f(c) c}{2} \nabla \mathbf{u}^2 - \lambda r_f(c) \mathbf{e}_y,$$

$$(15) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$(16) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \mathbf{v}) + \frac{\operatorname{div} \mathbf{l}}{r_s(c) + r_f(c)} = 0, \quad \mathbf{l} = -(\Gamma_2 \nabla c + \Gamma_1 \nabla p + \Gamma_3 \nabla \mathbf{u}^2) - \Gamma_4 \mathbf{e}_y,$$

в области

$$\Omega_\alpha = \{x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, y = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha\},$$

где $0 < X < 1$, $0 < Y < h = a_2/a_1$.

Пусть $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Граничные и начальные данные имеют вид:

$$(17) \quad \partial\Omega_\alpha : \quad \mathbf{v}_s = 0, \quad \mathbf{v}_f = 0, \quad \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(18) \quad t = 0 : \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s0}, \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0}, \quad c = c_0.$$

Поскольку в отсутствие какой-либо фазы параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обращаются в ноль, то соответствующие безразмерные параметры Γ_i задаются в виде

$$\Gamma_i = \Gamma_i^0 c(1-c), \quad \Gamma_4 = \Gamma_4^0 c, \quad i = 1, 2, 3.$$

Формулы

$$r_s = \frac{cR_0}{R_0 + c(1-R_0)}, \quad r_f = \frac{R_0(1-c)}{R_0 + c(1-R_0)}, \quad r_s + r_f = \frac{R_0}{R_0 + c(1-R_0)},$$

при $R_0 = \bar{\rho}_s/\bar{\rho}_f \simeq 1$, т. е. при малом отличии плотностей $\bar{\rho}_s$ и $\bar{\rho}_f$, принимают вид

$$(19) \quad r_s = c, \quad r_f = 1 - c, \quad r_s + r_f = 1.$$

Ниже вычисления приводятся при этих упрощающих условиях.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для решения полученной системы применим метод регуляризации, заменив уравнение (15) на

$$(20) \quad \varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \varepsilon \searrow 0.$$

Введем материальные производные

$$\frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla, \quad \frac{d_f}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Запишем слабую формулировку полученной системы уравнений, для этого введем гладкие тестовые функции $\varphi_i \in W_0^1(\Omega_\alpha)^2$, $\psi_i \in W^1(\Omega_\alpha)$. Используя граничные условия (17) и (18), можно записать уравнения (13) – (16) в слабой форме:

$$(21) \quad \iint_{\Omega_\alpha} \frac{\eta_s(c)}{\eta_f} \nabla \varphi_1 : (\nabla \mathbf{v}_s + (\nabla \mathbf{v}_s)^*) - \operatorname{div} \varphi_1 \left(c\lambda p + c(1-c) \frac{\operatorname{Re}}{2} \mathbf{u}^2 \right) dx dy = \\ - \iint_{\Omega_\alpha} \varphi_1 c \left(\operatorname{Re} \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} + \beta \mathbf{u} + \lambda \mathbf{e}_y \right) dx dy, \quad \frac{\eta_s(c)}{\eta_f} = \frac{\eta_{s0}}{\eta_f} (1-c)^{-2.5},$$

$$(22) \quad \iint_{\Omega_\alpha} \nabla \varphi_2 : (\nabla \mathbf{v}_f + (\nabla \mathbf{v}_f)^*) - \operatorname{div} \varphi_2 \left((1-c)\lambda p - c(1-c) \frac{\operatorname{Re}}{2} \mathbf{u}^2 \right) dx dy = \\ - \iint_{\Omega_\alpha} \varphi_2 \left((1-c) \operatorname{Re} \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} - \beta c \mathbf{u} - (1-c) \lambda \mathbf{e}_y \right) dx dy,$$

$$(23) \quad \iint_{\Omega_\alpha} \nabla \psi_1 (\varphi_s(c) \mathbf{v}_s + \varphi_f(c) \mathbf{v}_f) dx dy = \iint_{\Omega_\alpha} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} \psi_1 dx dy,$$

$$(24) \quad \iint_{\Omega_\alpha} \psi_2 \frac{dc}{dt} - \mathbf{l} \cdot \nabla \psi_2 \, dxdy = 0.$$

Далее уравнения (21) - (24) решаются методом конечных элементов в открытом пакете FreeFEM++. При переходе со слоя t_m на слой t_{m+1} , все функции

$$c^m(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}, t_m), \quad \mathbf{v}_i^m(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t_m), \quad p^m(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_m), \quad t_0 = 0.$$

предполагаются известными. Производные по времени аппроксимируются с первым порядком точности $\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}$, $\Delta t = t_{m+1} - t_m$. Скорости фаз и концентрация аппроксимируются при помощи Р2-элементов, а давление при помощи Р1-элементов.

Приведем краткое описание алгоритма:

Шаг 1. Для вычисления материальной производной используем следующее приближение:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c \approx \frac{c(\mathbf{x}, t_{m+1}) - c(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}), t_m)}{\Delta t},$$

где $\mathbf{X}^m = \mathbf{X}(t_m)$ и $\mathbf{X}(t)$ — решения задач Коши

$$(25) \quad \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}^m(\mathbf{X}(t)) \quad \mathbf{X}(t_{m+1}) = \mathbf{x}, \quad t_m < t < t_{m+1}.$$

Численное значение величины $c(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}), t_m)$ в пакете FreeFEM++ находится при помощи процедуры convect:

$$c(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}), t_m) = \text{convect}(\mathbf{v}^m(\mathbf{x}), -\Delta t, c^m(\mathbf{x})).$$

Массовая концентрация c^{m+1} находится из уравнения

$$\iint_{\Omega_\alpha} \psi_2 \frac{c^{m+1} - \text{convect}(\mathbf{v}^m, -\Delta t, c^m)}{\Delta t} - \mathbf{l} \cdot \nabla \psi_2 \, dxdy = 0,$$

$$\left. \frac{\partial c^{m+1}}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_\alpha} = 0, \quad c^0 = c_0.$$

$$\mathbf{l} = -(\Gamma_3 \nabla c^{m+1} + \Gamma_1 (c^m) \nabla p^m + \Gamma_4 (c^m) \nabla |\mathbf{u}^m|^2) + \Gamma_5 (c^m) \mathbf{e}_y.$$

Шаг 2. Функции $\mathbf{v}_s^{m+1}$, $\mathbf{v}_f^{m+1}$, p^{m+1} находятся из уравнений импульса

$$(26) \quad \begin{aligned} & \iint_{\Omega_\alpha} \frac{\eta_s(c^{m+1})}{\eta_f} \nabla \varphi_1 : (\nabla \mathbf{v}_s^{m+1} + (\nabla \mathbf{v}_s^{m+1})^*) dxdy = \\ & = \iint_{\Omega_\alpha} \left[\text{div} \varphi_1 \left(c^{m+1} \lambda p^{m+1} + c^{m+1} (1 - c^{m+1}) \frac{\text{Re}}{2} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{u}^{m+1} \right) \right] dxdy - \\ & - \iint_{\Omega_\alpha} \varphi_1 c^{m+1} \left(\text{Re} \frac{\mathbf{v}_s^{m+1} - \text{convect}(\mathbf{v}_s^m, -\Delta t, \mathbf{v}_s^m)}{\Delta t} + \beta \mathbf{u}^{m+1} + \lambda \mathbf{e}_y \right) dxdy, \\ & \iint_{\Omega_\alpha} \nabla \varphi_2 : (\nabla \mathbf{v}_f^{m+1} + (\nabla \mathbf{v}_f^{m+1})^*) dxdy = \\ (27) \quad & = \iint_{\Omega_\alpha} \left[\text{div} \varphi_2 \left((1 - c^{m+1}) \lambda p^{m+1} - c^{m+1} (1 - c^{m+1}) \frac{\text{Re}}{2} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{u}^{m+1} \right) \right] dxdy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{\Omega_\alpha} \varphi_2 (1 - c^{m+1}) \operatorname{Re} \frac{\mathbf{v}_f^{m+1} - \operatorname{convect}(\mathbf{v}_f^m, -\Delta t, \mathbf{v}_f^m)}{\Delta t} dx dy + \\
 & + \iint_{\Omega_\alpha} \varphi_2 (\beta c^{m+1} \mathbf{u}^{m+1} + (1 - c^{m+1}) \lambda \mathbf{e}_y) dx dy,
 \end{aligned}$$

и регуляризованного уравнения неразрывности

$$(28) \quad \iint_{\Omega_\alpha} \varepsilon \psi_1 \frac{p^{m+1} - p^m}{\Delta t} - \nabla \psi_1 \left(\varphi_s (c^{m+1}) \mathbf{v}_s^{m+1} + \varphi_f (c^{m+1}) \mathbf{v}_f^{m+1} \right) dx dy = 0.$$

При переходе на шаг t_{m+2} процедура повторяется.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вопрос седиментации в области $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 4\}$ рассматривается из такого начального состояния, когда жидкость покоится, а покоящиеся частицы распределены равномерно:

$$(29) \quad \mathbf{v}_{0s} = \mathbf{v}_{0f} = 0, \quad p_0 = 0, \quad c_0 = \text{const.}$$

При вычислениях используются следующие значения параметров: $c_0 = 0.1$, $a_1 = 30$ см, $a_2 = 4a_1$, $t_0 = 300$ с, $\rho_f = 1$ г/см³, $\rho_s = 1.5$ г/см³, $\eta_f = 0.01$ пуаз, $g = 10^3$ см/с², $V = a/t_0 = 0.1$ см/с. Характерные величины Γ_i^0 выбраны равными единице.

Рис. 1. Линии тока средней скорости $\mathbf{v}$ в вертикальной и наклонной ячейках.

На Рис. 1 приведены линии тока для средней скорости $\mathbf{v}$ в случае вертикальной и наклонной ячейки Ω с отклонением на угол 30° от вертикали. Отметим, что в рамках предложенной модели конвективный перенос частиц определяется скоростью $\mathbf{v}$. Если в случае вертикальной ячейки наблюдаются два симметричных макро-вихря, то в наклонной ячейке имеется один доминирующий

макро-вихрь, интенсивность которого на порядок выше интенсивности каждого из вихрей в вертикальной ячейке. По-видимому, это и есть причина того, что в наклонной ячейке частицы оседают быстрее (эффект Бойкотта).

Рис. 2. Относительный объем чистой жидкости в верхней части ячейки в зависимости от времени. В вертикальной ячейке (нижняя кривая) осаждение происходит почти с постоянной скоростью. В наклонной ячейке (верхняя кривая) с углом 30° осаждение происходит быстрее за счет структуры течения.

На Рис. 2 приводится сравнение седиментации для вертикальной и наклонной ячеек; приводится зависимость от времени величины $V(t)/|\Omega|$, где $V(t)$ - объем, свободный от частиц и находящийся в верхней части ячейки. Отметим, что линия уровня $c = 0$ всегда горизонтальна как для вертикальной, так и для наклонной ячеек.

В работе [12] принят другой подход. Структура течения, приводящая в эффекту Бойкотта, достигается путем введения различных сил в уравнения импульсов фаз. К ним относятся сила Стокса, присоединенных масс, Архимеда и Бассэ–Буссинеска. В настоящей работе такие силы не используются, а эффект достигается за счет диффузионных потоков. Такой подход согласован с термодинамическим условием производства энтропии [14].

REFERENCES

- [1] J.J. Stickel, R.L. Powell, *Fluid mechanics and rheology of dense suspensions*, Annu. Rev. Fluid Mech. **37** (2005), 129–149. Zbl. 1117.76066
- [2] A. Einstein, *A new determination of molecular dimensions*, Ann. Phys. **4** (1906), 289–306.
- [3] G. Batchelor, J. Green, *The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2* , J. Fluid Mech. **56** (1972), 401–427. Zbl 0246.76108
- [4] I.M. Krieger, T. Dougerty, *A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres*, Trans. Soc. Rheol. **3** (1960), 137–152. Zbl 0100.21502
- [5] D. Quemada, *Rheology of concentrated disperse systems III. General features of the proposed non-newtonian model. Comparison with experimental data*, Rheol. Acta, **17**:6 (1978), 643–653.
- [6] J.F. Morris, F. Boulay, *Curvilinear flows of noncolloidal suspensions: The role of normal stresses*, J. Rheol. **43** (1999), 1213–1237.
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Fluid mechanics. Course of theoretical physics. 2nd ed.*, Pergamon Press, Oxford etc., 1987. Zbl 0655.76001

- [8] I.M. Khalatnikov, *An introduction to the theory of superfluidity*, Reprint of the 1965 edition. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, 1989. MR1084373
- [9] Yu. V. Perepechko, K.E. Sorokin, *Two-velocity dynamics of heterophase media*, Journal of Engineering Thermophysics, **22**:3 (2013), 241–246.
- [10] S.R. de Groot, P. Mazur, *Non equilibrium thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1962. Zbl 1375.82003
- [11] E.V. Dontsov, A.P. Peirce, *Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fracture*, J. Fluid Mech. **760** (2014), 567–590. MR3345578 76T20
- [12] Yu. A. Nevskii, A.N. Osipov, *Slow gravitational convection of disperse systems in domain with inclined boundaries*, Fluid Dynamics, **46**:2 (2011), 225–239. Zbl 1233.76093
- [13] A.E. Boycott, *Sedimentation of Blood Corpuscles*, Nature, **104** (1920), 532–532.
- [14] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, **262** (2018), 25–37.
- [15] M. Ishii, K. Mishima, *Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations*, Nucl. Eng. and Des. **82**:2-3 (1984), 107–126.
- [16] A.A. Osipov, *Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review.*, Journal of petroleum science and engineering **156** (2017), 513–535.
- [17] R. Temam, *Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la méthode des fractionnaires II*, Arch. Rational Mech. Anal. **33** (1969), 377–385.

VLADIMIR VALENTINOVICH SHELUKHIN
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
 15, LAVRENTYEVA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: shelukhin@hydro.nsc.ru

VLADIMIR VALERIEVICH NEVEROV
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
 15, LAVRENTYEVA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: neverovvladim@gmail.com

ANTON MIROSLAVOVICH KRIVTSOV
 LABORATORY "DISCRETE MODELS IN MECHANICS",
 INSTITUTE FOR PROBLEMS IN MECHANICAL ENGINEERING,
 61, BOLSHOY, V.O.,
 SAINT PETERSBURG, 199178, RUSSIAN FEDERATION
 HIGHER SCHOOL OF THEORETICAL MECHANICS,
 PETER THE GREAT ST. PETERSBURG POLYTECHNIC UNIVERSITY (SPbPU),
 29, POLYTECHNICHESKAYA STR.,
 SAINT PETERSBURG, 195251, RUSSIAN FEDERATION
E-mail address: akrivtsov@bk.ru