Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. A. Stepanova, On automorphisms of CR-submanifolds of complex Hilbert space,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2020, Volume 17, 126–140

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.009>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.73.141

April 26, 2023, 09:18:56

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 126–140 (2020)

DOI 10.33048/semi.2020.17.009

УДК 517.55

MSC 32V40

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ CR-ПОДМНОГООБРАЗИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

М.А. СТЕПАНОВА

ABSTRACT. It is shown that there exists only one totally nondegenerate CR manifold of type (n, ∞) (up to the formal equivalence), and the dimension of its Lie algebra $\mathfrak{g}_+$ of positively graded formal tangent vector fields is infinite. Examples of manifolds of type (n, ∞) with algebras of any given in advance finite dimension are presented.

Keywords: CR manifold, automorphisms, totally nondegenerate manifold.

1. ВВЕДЕНИЕ

CR-подмногообразия бесконечномерного и конечномерного комплексного гильбертова пространства достаточно сильно отличаются друг от друга. Для демонстрации отличий мы посмотрим на многообразия с двух точек зрения: с позиции их голоморфных симметрий и с позиции их модельных поверхностей.

С каждым ростком вещественного вещественно аналитического порождающего CR-многообразия, заданным в некоторой точке, можно связать градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов и рассмотреть ее положительную составляющую – подалгебру $\mathfrak{g}_+$ (см. [1]). Если числа n и k , равные соответственно CR-размерности (т.е. размерности комплексной касательной) и вещественной коразмерности многообразия и составляющие его тип (n, k) , положительны и конечны, то $\mathfrak{g}_+$ в большинстве случаев оказывается тривиальной. В частности, алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна для почти любой квадратичной модельной поверхности фиксированного типа (n, k) (при некоторых ограничениях на n и k) ([2], [3]), а в случае вполне невырожденных модельных поверхностей более высоких порядков алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна всегда ([4], [5], [6]).

STEPANOVA, M.A., ON AUTOMORPHISMS OF CR-SUBMANIFOLDS OF COMPLEX HILBERT SPACE.

© 2020 СТЕПАНОВА М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-41-05003.

Поступила 12 сентября 2019 г., опубликована 13 февраля 2020 г.

Однако если коразмерность k бесконечна, то картина становится качественно иной. Хотя определение полной невырожденности в бесконечномерном случае аналогично конечномерному и также является условием общего положения ([7]), свойства бесконечномерных модельных поверхностей типа (n, ∞) оказываются противоположными: алгебра $\mathfrak{g}_+$ для вполне невырожденной поверхности оказывается бесконечномерной (утверждение 1), а конечномерными алгебрами обладают лишь исключительные поверхности, примеры которых приведены ниже (утверждения 2-6); в то же время в конечномерной ситуации для почти всех поверхностей алгебра $\mathfrak{g}_+$ оказывается тривиальной. Иными словами, типичная размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ в бесконечномерной ситуации наибольшая из возможных, а в конечномерной ситуации – наименьшая.

Отметим, что в наших рассуждениях алгебры $\mathfrak{g}_+$ состоят из векторных полей, формально удовлетворяющих условию касания для рассматриваемых многообразий (см. определение 2 ниже).

Бесконечномерный случай специфичен еще и тем, что при фиксированной конечной CR-размерности n многообразия существует единственная (с точностью до формальной эквивалентности) модельная поверхность. Более того, всякое вполне невырожденное многообразие CR-размерности n , не обязательно являющееся модельным, оказывается формально эквивалентным ей (определение формальной эквивалентности см. ниже).

Также в бесконечномерном случае можно построить многообразия (без условия полной невырожденности) с любой наперед заданной размерностью алгебры $\mathfrak{g}_+$. Данное обстоятельство интересно тем, что в случае конечной коразмерности k и при фиксированном типе (n, k) во всех изученных ситуациях при тех или иных требованиях невырожденности размерности алгебр $\mathfrak{g}_+$ для всевозможных поверхностей не принимают всех подряд идущих значений (см., например, [1], [8]).

Однако в отдельных аспектах аналогия с конечномерным случаем сохраняется. В качестве следствия с помощью некоторых из построенных многообразий, перенося конструкцию работы [9] (А.Б. Сухов, 2003) на бесконечномерную ситуацию, мы можем получить системы дифференциальных уравнений второго порядка с известными симметриями: решениями этих систем будут многообразия Сегре исходных многообразий. Конструкция Сухова применима также и для конечномерных вполне невырожденных многообразий.

Автор выражает благодарность В.К. Белошапке за ценные обсуждения.

2. ВПОЛНЕ НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M^n – росток вполне невырожденного бесконечномерного CR-многообразия типа (n, ∞) , $0 < n < \infty$, в начале координат в комплексном гильбертовом пространстве H (определение полной невырожденности дано в [7] для бесконечномерного случая, в котором полная невырожденность называется невырожденностью, и в [2] для конечномерного случая). Пусть в H заданы координаты $(z, w) = (z, w_2, w_3, \dots, w_j, \dots)$, где $z \in \mathbb{C}^n$, и все w_j являются конечномерными векторными переменными.

Пусть росток M^n задан в окрестности нуля векторным уравнением:

$$v = \Psi(z, \bar{z}, u),$$

где $w = u + iv$.

Рассмотрим также росток $\tilde{M}^n$, заданный уравнением:

$$v = \tilde{\Psi}(z, \bar{z}, u).$$

Определение 1. Будем говорить, что ростки M^n и $\tilde{M}^n$ формально эквивалентны, если существует формальное векторное преобразование

$$z \longrightarrow f(z, w),$$

$$w \longrightarrow g(z, w),$$

заданное формальными степенными рядами, такое что в кольце формальных степенных рядов от переменных $z, \bar{z}, u$ имеет место равенство

$$\operatorname{Im} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)) - \overline{f(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u))} \cdot \operatorname{Re} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)) = 0,$$

т.е. в результате выполнения всех формальных подстановок в левой части равенства и приведения подобных слагаемых получается формальный ряд, в котором коэффициенты при всех мономах равны нулю.

Теорема 1. Для любого натурального числа n все вполне невырожденные многообразия типа (n, ∞) формально эквивалентны.

Иными словами, вполне невырожденное многообразие фиксированной конечной CR-размерности и бесконечной коразмерности единственно. В частности, M^n формально эквивалентно своей модельной поверхности.

Доказательство. Покажем, что росток M^n эквивалентен ростку своей модельной поверхности, откуда, ввиду единственности модельной поверхности типа (n, ∞) , будет следовать утверждение теоремы.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной z положим равным единице, а веса переменных w_j положим равными j .

Пусть в координатах $(z, w) = (z, w_2, w_3, \dots, w_j, \dots)$ M^n задано в окрестности нуля бесконечной системой уравнений:

$$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(3),$$

...

$$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1}) + O(k+1),$$

...,

где $v_k = \operatorname{Im} w_k$ – векторные переменные конечной размерности, равной размерности пространства нормализованных форм веса k ([2]); $u_k = \operatorname{Re} w_k$, $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1})$ – векторы из однородных полиномов веса k , $O(k)$ – слагаемые веса не меньше k .

Запишем данную систему в виде:

$$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u),$$

...

$$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u),$$

...,

$$\text{где } F_k(z, \bar{z}, u) = O(k+1).$$

Без ограничения общности можно считать, что нормализованы не только выражения Φ_k (процесс нормализации для Φ_k описан в [7] для бесконечномерного случая и в [2] для конечномерного случая), но и выражения F_k . Этого можно добиться, выполнив одновременно с нормализацией слагаемых веса k в уравнении

$$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u)$$

нормализацию слагаемых веса k в уравнениях

$$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u),$$

...

$$v_{k-1} = \Phi_{k-1}(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-2}) + F_{k-1}(z, \bar{z}, u)$$

последовательно для всех натуральных $k \geq 2$.

Иными словами, для каждого $k \geq 2$ нужно убрать из выражений $F_2, \dots, F_{k-1}$, Φ_k формы веса k , принадлежащие пространству гармонических форм $\mathcal{H}_k$ (в обозначениях работы [2]), для чего нужно выполнить последовательно для $2 \leq j \leq k$ треугольно-полиномиальные преобразования вида:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow z, \\ v_j &\longrightarrow v_j + P_{jk}(z, \bar{z}, u), \\ v_l &\longrightarrow v_l, \quad l \neq j, \end{aligned}$$

где P_{jk} имеют вес k .

Таким образом, для каждого k указанные нормализации являются преобразованиями, имеющими вид:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow z, \\ v_2 &\longrightarrow v_2 + P_{2k}(z, \bar{z}, u), \\ &\dots \\ v_k &\longrightarrow v_k + P_{kk}(z, \bar{z}, u), \\ v_l &\longrightarrow v_l, \quad l > k, \end{aligned}$$

где P_{jk} имеют вес k .

Отметим также, что, хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе нормализаций, веса выражений P_{jk} и P_{jl} различны для различных k, l . Поэтому композиция всех нормализаций определена и задает формальное преобразование вида:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow z, \\ v_2 &\longrightarrow v_2 + \sum_{j=2}^{\infty} P_{2j}(z, \bar{z}, u), \\ &\dots \\ v_k &\longrightarrow v_k + \sum_{j=k}^{\infty} P_{kj}(z, \bar{z}, u), \\ &\dots, \end{aligned}$$

и с точностью до указанного формального преобразования локальные определяющие уравнения ростка M^n нормализованы, что мы и будем предполагать далее.

Докажем по индукции, что линейным обратимым преобразованием, отличающимся от тождественного на конечномерном подпространстве, можно сделать росток M^n касательным до любого наперед заданного конечного порядка (в смысле введенных весов) к своей модельной поверхности.

В качестве базы индукции возьмем исходные уравнения поверхности.

Предположим, что для некоторого k исходная система эквивалентна системе

$$\begin{aligned} v_2 &= \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k), \\ v_3 &= \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ v_k &= \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1}) + O(k), \\ &\dots \end{aligned}$$

Поскольку координаты вектора $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1})$ образуют базис нормализованных однородных форм веса k , то, для того чтобы убрать слагаемые веса k , нужно выполнить преобразования вида:

$$\begin{aligned} W_2 &= w_2 + A_{2k}w_k, \\ &\dots \\ W_{k-1} &= w_{k-1} + A_{(k-1)k}w_k, \\ W_l &= w_l, \quad l \geq k, \end{aligned}$$

где A_{jk} – матрицы.

Тогда все слагаемые, которые после замены координат могли бы изменить модельную поверхность, будут иметь вид:

$$\Phi_j(z, \bar{z}, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{j-1}),$$

где на месте $\mathcal{U}_l$ может стоять как соответствующее U_l ($U_l = \operatorname{Re} W_l$), так и выражение $\operatorname{Re}(A_{lk}W_k)$, причем на месте хотя бы одного из $\mathcal{U}_l$ стоит $\operatorname{Re}(A_{lk}W_k)$. Но все такие слагаемые имеют вид $O(k+1)$.

Поэтому исходная система (в новых координатах) эквивалентна системе

$$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k+1),$$

$$v_3 = \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k+1),$$

...

$$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{k-1}) + O(k+1),$$

...

Теперь рассмотрим композицию всех преобразований, выполнявшихся на каждом из шагов индукции. Хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе преобразований, выражения $A_{jk}w_k$ и $A_{jl}w_l$ различны для различных k, l . Поэтому композиция определена и задает формальное преобразование вида:

$$z \longrightarrow z,$$

$$w_2 \longrightarrow w_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{2j}w_j,$$

...

$$w_k \longrightarrow w_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_{kj}w_j,$$

...

которое осуществляет формальную эквивалентность ростка M^n (в предположении о нормализованности его определяющих уравнений) и его модельной поверхности.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Для бесконечного значения CR-размерности, т.е. для типа (∞, ∞) , утверждение теоремы перестает быть верным: множество всех попарно неэквивалентных вполне невырожденных поверхностей указанного типа бесконечно. Действительно, в случае типа (∞, ∞) максимальный вес векторных переменных w_j может оказаться конечным, поскольку размерность некоторых из векторных переменных w_j при бесконечном значении CR-размерности может принимать бесконечные значения, и поэтому число переменных w_j может быть конечным. А если для двух поверхностей максимальные веса переменных w_j различны, то они не эквивалентны. При этом вполне невырожденное многообразие M^∞ уже не обязательно эквивалентно своей модельной поверхности (как и в ситуации конечномерных CR-многообразий).

Если для двух поверхностей типа (∞, ∞) максимальные веса переменных w_j совпадают, то они также могут оказаться неэквивалентными. Например, инвариантом является количество компонент вектора w максимальной размерности.

Замечание 2. Единственность модельной поверхности специфична не только для многообразий бесконечной коразмерности, но встречается также и в конечномерном случае. Хотя при фиксированном типе (n, k) модельных поверхностей может быть несколько (как конечное число, так и конечнопараметрическое семейство), для некоторых наборов значений n и k модельная поверхность ровно одна: единственность имеет место, если при фиксированной

CR-размерности n коразмерность k равна размерности пространства нормализованных однородных форм, вес которых не превосходит некоторого натурального числа (см. [2]), тогда как в бесконечномерной ситуации всякая вполне невырожденная поверхность сферична (т.е. эквивалентна своей модельной поверхности).

А единственность вполне невырожденного многообразия при фиксированной конечной CR-размерности уже является характерной особенностью бесконечномерного случая. Например, для жестких многообразий типа $(1, 1)$ условие эквивалентности многообразия своей модельной поверхности выражается дифференциальным уравнением 6-го порядка

$$\mu_{zz\bar{z}} - 3\mu_{z\bar{z}}\mu - \mu_z\mu_{\bar{z}} + 2\mu_{\bar{z}}\mu^2 = 0,$$

где $\mu = \left(\frac{F_{z\bar{z}\bar{z}}}{F_{z\bar{z}}} \right)$, на определяющую функцию F ([12]).

Определение 2. (а) Формальным вещественным векторным полем в окрестности начала координат в комплексном гильбертовом пространстве H с конечномерными векторными координатами $(z, w_2, \dots, w_j, \dots)$ называется выражение вида:

$$(1) \quad X = 2\operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right),$$

где $w = (w_2, \dots, w_j, \dots)$, $f(z, w), g_j(z, w)$ – конечномерные векторы, чьи координаты – формальные степенные ряды.

(б) Формальным многообразием M будем называть заданную в некоторой окрестности начала координат систему уравнений вида:

$$v = \Psi(z, \bar{z}, u),$$

где $w = u + iv$, $\Psi(z, \bar{z}, u)$ – бесконечномерный вектор, чьи координаты – формальные степенные ряды.

Введем градуировку на векторных полях следующим образом:

$$[z] = 1, \left[\frac{\partial}{\partial z} \right] = -1, [w_j] = m_j, \left[\frac{\partial}{\partial w_j} \right] = -m_j.$$

Тогда векторные поля и формальные ряды распадаются в сумму градуированных компонент. Обозначим через $[X]_{\nu}$ ν -ю градуированную компоненту поля X для всех $\nu \geq 0$. Определим действие поля X на формальный ряд $F = \sum_{l=0}^{\infty} F_l$, где суммирование ведется по однородным весовым компонентам, как сумму действий компонент $[X]_{\nu}$ на F :

$$\begin{aligned} XF &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [X]_{\nu} F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[2\operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \right]_{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} F_l = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[2\operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \right]_{\nu} F_l. \end{aligned}$$

Утверждение 1. XF является корректно определенным формальным рядом.

Доказательство. $[X]_\nu F$ является корректно определенным формальным рядом, поскольку все однородные весовые компоненты F_l являются многочленами, зависящими от конечного числа векторных переменных z, w_j (в силу конечномерности векторных переменных z, w_j), а на многочлены ненулевым образом действует лишь конечное число слагаемых компоненты X_ν , и эти слагаемые имеют вид конечномерных векторных полей $2\operatorname{Re}\left(p(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{N(\nu)} q_j(z, w)\frac{\partial}{\partial w_j}\right)$ с полиномиальными коэффициентами.

Сумма $XF = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X]_\nu F$ также корректно определена, поскольку каждый из рядов $[X]_\nu F$ имеет вид $O(\nu)$, и поэтому все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{\nu=0}^{\infty} [X]_\nu F$ стабилизируются, начиная с некоторого момента.

Утверждение 1 доказано. $\square$

Будем считать, что координаты ψ_l вектора $(v - \Psi(z, \bar{z}, u)) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l, \dots)$ упорядочены по неубыванию весов и что каждый вес встречается конечное число раз (в силу конечномерности векторных переменных z, w_j этого можно добиться формальным преобразованием).

Пусть J – множество, состоящее из сумм произведений координат ψ_l на вещественные формальные степенные ряды, т.е.

$$J = \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \psi_l \right\},$$

где α_l – формальные ряды. Множество J корректно определено и образует идеал:

Утверждение 2. J – идеал в кольце формальных степенных рядов.

Доказательство. J состоит из корректно определенных формальных степенных рядов, поскольку все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \psi_l$ стабилизируются, начиная с некоторого момента, т.к. веса координат ψ_l неубывают, а каждый вес встречается конечное число раз.

J замкнуто относительно сложения и умножения, причем произведение формального ряда и суммы вида $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \psi_l$ является корректно определенным формальным рядом вида $\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_l \psi_l$, поэтому J есть идеал.

Утверждение 2 доказано. $\square$

Определение 3. (а) Формальное векторное поле X , заданное выражением (1), называется касательным к формальному многообразию M , если результат действия поля на каждое из уравнений формального многообразия M принадлежит идеалу J , т.е. если каждая координата вектора

$$X(v - \Psi(z, \bar{z}, u))$$

принадлежит J .

(б) Скобка $[X_1, X_2]$ двух касательных к M векторных полей

$$X_1 = 2\operatorname{Re}\left(f_1(z, w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{1,j}(z, w)\frac{\partial}{\partial w_j}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[2\operatorname{Re} \left(f_1(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{1,j}(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \right]_{\nu}$$

и

$$\begin{aligned} X_2 &= 2\operatorname{Re} \left(f_2(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[2\operatorname{Re} \left(f_2(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \right]_{\nu} \end{aligned}$$

определяется равенством

$$[X_1, X_2]F = X_1(X_2F) - X_2(X_1F)$$

и является касательным к M полем.

Скобка $[\cdot, \cdot]$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, которое проверяется прямой формальной выкладкой (поскольку все входящие в него выражения вида $X_{\lambda}(X_{\mu}(X_{\nu}F))$, где $\{\lambda, \mu, \nu\} = \{1, 2, 3\}$, являются корректно определенными формальными рядами).

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 3. *Формальные неотрицательно градуированные векторные поля, касательные к формальному многообразию M^n , образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.*

Обозначим через $\mathfrak{g}_+$ подалгебру всех полей положительного веса алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.

Утверждение 4. *Для любого n алгебра $\mathfrak{g}_+$ многообразия M^n бесконечномерна.*

Данное утверждение вытекает из следующего:

Утверждение 5. *Для любых n , k ($1 \leq k \leq n$), и любого монома $g_0(z, w)$ веса $m > 1$ существуют такие векторы $g_j(z, w)$, состоящие из голоморфных в некоторой окрестности нуля функций, что поле*

$$2 \operatorname{Re} \left(g_0(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \text{ является касательным к } M^n.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать M^n модельной поверхностью. Построим векторы $g_j(z, w)$ индукцией по j . Сначала рассмотрим индукционный переход.

Предположим, что все $g_j(z, w)$, $j \leq J-1$, найдены. Построим $g_J(z, w)$.

Для этого рассмотрим уравнения

$$v_J = \Phi_J(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{J-1})$$

и запишем условие касания:

$$2\operatorname{Re} \left(g_0(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) (v_J - \Phi_J(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{J-1})) = \frac{1}{2i} (g_J(z, w) - \bar{g}_J(z, w)) - 2\operatorname{Re} \left(g_0(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) (\Phi_J(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{J-1})) = 0.$$

Выражение $2\operatorname{Re} \left(g_0(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) (\Phi_J(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{J-1}))$ имеет вес $J+m-1$ и является суммой плюригармонических форм (возможно, равных

нулю) и нормализованных форм. Все нормализованные формы можно разложить по базисным формам веса $J + m - 1$, равным мнимым частям компонент вектора w_{J+m-1} , поэтому компоненты искомого вектора $g_J(z, w)$ будут суммами соответствующих плюригармонических форм и компонент вектора w_{J+m-1} .

База индукции есть частный случай рассмотренного построения.

Утверждение 5 доказано. $\square$

Отметим также несколько свойств для поверхностей бесконечной коразмерности.

Многообразие называется жестким, если правые части его локальных определяющих соотношений, через которые выражаются мнимые части переменных w , не зависят от переменных w .

Свойство 1. Алгебра $\mathfrak{g}$ любого жесткого многообразия бесконечной коразмерности бесконечномерна (за счет сдвигов на вещественные постоянные по переменным w_j).

С помощью конструкции Пуанкаре (см., например, [1]) стандартным образом доказывается

Свойство 2. Размерность алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ модельной поверхности оценивает сверху размерность алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ самой поверхности.

3. ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ АЛГЕБРАМИ $\mathfrak{g}_+$

Рассмотрим отдельно случай $n = 1$ и построим сначала поверхность $M_{1,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = 1$, затем – поверхность $M_{s,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = s$, а также поверхность $M_{0,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+) = 0$. После этого перейдем к случаю $n > 1$ и построим примеры поверхностей $M_{s,n}$, для которых $\dim(\mathfrak{g}_+) = s$, взяв прямые суммы поверхностей, построенных для $n = 1$.

Случай $n = 1$.

Пусть $F(z, \bar{z})$ – однородный полином степени $d > 1$ без плюригармонических слагаемых, $X = 2\operatorname{Re}(z^l \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, $l > 1$, а $M_{1,1}$ – поверхность, заданная в окрестности нуля системой уравнений вида:

$$\operatorname{Im} w_1 = F(z, \bar{z}),$$

$$\operatorname{Im} w_2 = X(F(z, \bar{z})),$$

...

$$\operatorname{Im} w_k = X^{k-1}(F(z, \bar{z})),$$

...

Тогда поле $\Xi = (2\operatorname{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} w_{j+1} \frac{\partial}{\partial w_j}) + X)$ есть элемент $\mathfrak{g}_+$. Действительно, имеем: $\Xi(\operatorname{Im} w_k - X^{k-1}(F(z, \bar{z}))) = \operatorname{Im} w_{k+1} - X^k(F(z, \bar{z})) = 0$.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной z положим равным единице, а веса переменных w_k положим равными $d + (l - 1)(k - 1)$.

Утверждение 6. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ не содержит отличных от Ξ элементов.

Для доказательства утверждения 6 нам потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 1. Элементы $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ имеют вид $2\operatorname{Re}(h(z, w) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) + W$, где $h(z, w) \not\equiv 0$ – голоморфная в окрестности нуля функция.

Здесь и далее W обозначает поля, содержащие дифференцирования по переменным w_j .

Доказательство. Пусть поле $W = 2\operatorname{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} W_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j})$ лежит в алгебре $\operatorname{aut}(M_{1,1})$. Тогда, записывая условие касания, получим $2\operatorname{Re}(W_j) = 0$, откуда следует, что W_j являются мнимыми константами для всех j , и поэтому $W \notin \mathfrak{g}_+$. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть поле $2\operatorname{Re}(z^L \frac{\partial}{\partial z} + W_1(z, w) \frac{\partial}{\partial w_1}) + W$ лежит в алгебре $\operatorname{aut}(M_{1,1})$. Тогда $L = l$, причем все коэффициенты поля определены однозначно.

Доказательство. Записывая условие касания

$(2\operatorname{Re}(z^L \frac{\partial}{\partial z} + W_1(z, w) \frac{\partial}{\partial w_1}) + W)\operatorname{Im} w_1 = (2\operatorname{Re}(z^L \frac{\partial}{\partial z} + W_1(z, w) \frac{\partial}{\partial w_1}) + W)F(z, \bar{z})$,
получаем

$$(2) \quad \frac{1}{2i}(W_1 - \bar{W}_1) = z^L \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z}^L \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}.$$

Пусть $W_1 = \sum_j W_{1,j}(z)w^j$, где j – мультистепень, т.е. $w^j = w_1^{j_1} \dots w_s^{j_s}$ для некоторых неотрицательных целых чисел $j_1, \dots, j_s$. Далее через $|j|$ будем обозначать сумму $j_1 + \dots + j_s$. В силу однородности F достаточно рассмотреть случай однородной функции W_1 , т.е. $W_1(z, w) = \sum_{r,j} W_{1,r,j} z^r w^j$. При этом функция W_1 есть многочлен, т.к. сумма $\sum_{r,j} W_{1,r,j} z^r w^j$ конечна ввиду возрастания весов переменных w_k . Тогда $W_{1,r,0} = 0$ при всех r , т.к. в правой части (2) отсутствуют плуригармонические слагаемые. Отсюда получаем, что вес левой части (2) не меньше веса w_1 , т.е. $l - 1 + d$, поэтому $L \geq l$. Далее, выражая w через $\bar{w}, z, \bar{z}$ из системы определяющих уравнений, получаем равенства $(W_{1,r,j} z^r - \bar{W}_{1,r,j} \bar{z}^r) \bar{w}^j = 0$, откуда $W_{1,r,j} = 0$ при $r > 1$, т.е. $W_1(z, w) = \sum W_{1,0,j} w^j$.

Рассмотрим множество Γ тех j , $|j| > 1$, для которых моном $W_{1,0,j} w^j$ входит в выражение для $W_1(z, w)$. В нем рассмотрим подмножество Γ_1 тех j , для которых w^j делится на w_1 . Выражая w через $\bar{w}, z, \bar{z}$, получаем для всех $j \in \Gamma_1$ равенство:

$$2iF(z, \bar{z})W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_1} = 0,$$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_1$.

Далее, рассматривая множество Γ_2 тех j , для которых w^j делится на w_2 , получаем равенство:

$$2iXF(z, \bar{z})W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_2} = 0,$$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_2$.

Продолжая аналогичным образом последовательно рассматривать множества Γ_t тех j , для которых w^j делится на w_t , получаем равенства:

$$2iX^{t-1}F(z, \bar{z})W_{1,0,j} \frac{\bar{w}^j}{\bar{w}_t} = 0,$$

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_t$.

Поскольку у полинома W_1 ограничен, то за конечное число шагов мы получим равенства нулю всех коэффициентов $W_{1,0,j} = 0$ при $|j| > 1$.

Поэтому в силу однородности W_1 имеем, что $W_1 = \alpha w_s$ для некоторой константы α и некоторого номера s , откуда получаем $\alpha X^{s-1}(F(z, \bar{z})) = z^L \frac{\partial F}{\partial z} + \bar{z}^L \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$. Это равенство возможно лишь при $L \leq l$, т.к. иначе его левая часть содержала бы мономы бистепени $(b, L - 1 + d - b)$, такие что $\beta < b < L$, где β – максимальная из степеней функции $F(z, \bar{z})$ по переменной z , тогда как правая часть равенства таких мономов не содержит. Отсюда и из полученного выше неравенства $L \geq l$ следует $L = l$.

Т.к. коэффициент при $\frac{\partial}{\partial z}$ равен z^l , то единственность поля следует из леммы 1: действительно, если поле определено неоднозначно, то возьмем два разных поля и, вычтя одно из другого, получим, что их разность должна быть нулевой, что противоречит предположению о неоднозначной определенности поля.

Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство. (Доказательство утверждения 6) Пусть в обозначениях леммы 1 $h(z, w) = \sum_j h_j(z)w^j$, где j – мультистепень. В силу однородности F достаточно рассмотреть случай однородного многочлена h , т.е. $h(z, w) = \sum_{r,j} h_{r,j}z^r w^j$. Пусть число r_{max} равно наибольшему значению индекса r в выражении для h . Тогда, записывая условие касания и выражая w через $\bar{w}$, z , $\bar{z}$, получаем, что $2\text{Re}(z^{r_{max}} \frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$ должно лежать в $\mathfrak{g}_+$, откуда по лемме 2 получаем, что $r_{max} = l$. С другой стороны, если вес полинома h больше l , то, выразив w через $\bar{w}$, z , $\bar{z}$ в условии касания, получаем, что слагаемые, зависящие только от переменных $z, \bar{z}$, не могут быть вещественными, поскольку $l > 1$. Отсюда получаем, что вес $h(z, w)$ равен l , т.е. $h(z, w) = cz^l$, где c – константа.

Утверждение 6 доказано. $\square$

Пусть $\tilde{F}(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + o(d)$, а $\tilde{M}_{1,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z, \bar{z})$ и z^l .

Следствие 1. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $\tilde{M}_{1,1}$ одномерна.

Доказательство. По свойству 2 размерность $\dim(\mathfrak{g}_+)$ не превосходит единицы. Но $\dim(\mathfrak{g}_+)$ также и не меньше единицы, т.к. поле Ξ , построенное для поверхности $\tilde{M}_{1,1}$, является касательным к ней.

Следствие 1 доказано. $\square$

Утверждение 7. Для любого натурального числа s существует поверхность бесконечной коразмерности и CR-размерности 1, такая что размерность ее алгебры $\mathfrak{g}_+$ равна s .

Доказательство. Построим систему уравнений, задающих искомую поверхность $M_{s,1}$ в некоторой окрестности нуля, индуктивно.

Пусть $F(z, \bar{z})$ – однородный полином степени d , $1 < l_1 < \dots < l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j = 2\text{Re}(z^{l_j} \frac{\partial}{\partial z})$, $1 \leq j \leq s$. На первом шаге построения имеем уравнение:

$$\text{Im } w_0 = F(z, \bar{z}).$$

На втором шаге имеем систему уравнений:

$$\text{Im } w_0 = F(z, \bar{z}),$$

$$\text{Im } w_{j_1} = X_{j_1}(F(z, \bar{z})), 1 \leq j_1 \leq s.$$

На шаге с номером k имеем систему уравнений:

$$\text{Im } w_0 = F(z, \bar{z}),$$

$$\text{Im } w_{j_1} = X_{j_1}(F(z, \bar{z})), 1 \leq j_1 \leq s,$$

...

$$\text{Im } w_{j_1, \dots, j_k} = X_{j_1} \dots X_{j_k}(F(z, \bar{z})), 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq s.$$

Получаем последовательность систем уравнений, таких что каждая последующая система содержит уравнения предыдущей. Объединяя все полученные системы, получаем искомую систему уравнений.

Теперь построим s полей, из которых состоит алгебра $\mathfrak{g}_+$. Для этого рассмотрим поля вида $2\text{Re}(z^{l_j} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{s=1}^{\infty} W_{j,s}(z, w) \frac{\partial}{\partial w_s})$, $1 \leq j \leq s$. Доказательство

того, что функции $W_{j,s}(z, w)$ определены однозначно и равны некоторым из координат $w_{j_1, \dots, j_k}$ и что других касательных полей нет, проводится аналогично доказательству утверждения 5. Отличие заключается в том, что вместо леммы 2 нужно воспользоваться ее модификацией (которая доказывается аналогично):

Лемма 3. Пусть поле $2\operatorname{Re}(z^L \frac{\partial}{\partial z} + W_1(z, w) \frac{\partial}{\partial w_1}) + \mathcal{W}$ лежит в алгебре $\operatorname{aut}(M_{s,1})$. Тогда $L = l_j$ для некоторого j , $1 \leq j \leq s$.

Утверждение 7 доказано. $\square$

Пусть $\tilde{F}(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + o(d)$, а $\tilde{M}_{s,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z, \bar{z})$ и z^l описанным в доказательстве утверждения 7 способом. Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 2. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $\tilde{M}_{s,1}$ имеет размерность s .

Пусть $F_1(z, \bar{z}), F_2(z, \bar{z}), \dots, F_k(z, \bar{z}), \dots$ – однородные полиномы степеней $1 < d_1 < \dots < d_k < \dots$ без плюригармонических слагаемых, причем $(2\operatorname{Re}(z^t \frac{\partial}{\partial z}))(F_1(z, \bar{z})) \neq F_k(z, \bar{z})$ для всех k, t (этого всегда можно добиться, выбирая $d_2 \gg d_1$, т.к. число мономов однородной степени d_k растет с ростом d_k).

Рассмотрим поверхность $M_{0,1}$, заданную в окрестности нуля системой уравнений вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_1 &= F_1(z, \bar{z}), \\ \operatorname{Im} w_2 &= F_2(z, \bar{z}), \\ &\dots \\ \operatorname{Im} w_k &= F_k(z, \bar{z}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Утверждение 8. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{0,1}$ тривиальна.

Доказательство. Доказательство того, что все поля, касательные к $M_{0,1}$, должны иметь вид $2\operatorname{Re}(z^L \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j})$ (с точностью до умножения на константу), где $W_j(z, w)$ есть линейные функции от w , аналогично доказательству леммы 2. Но в силу выбора полиномов $F_k(z, \bar{z})$ поле такого вида не может быть касательным к $M_{0,1}$.

Утверждение 8 доказано. $\square$

Случай $n = 1$ рассмотрен.

Случай $n > 1$.

Рассмотрим прямую сумму одного экземпляра поверхности $M_{s,1}$ и $(n-1)$ экземпляра поверхности $M_{0,s}$.

А именно, пусть $F(z_n, \bar{z}_n), F_{k,m}(z_m, \bar{z}_m)$, где $1 \leq m \leq n-1$, $1 \leq k < \infty$, – однородные полиномы степеней $d, \dots, d_{m,k} > 1$, причем $d_{m,1} < \dots < d_{m,k} < \dots$; $1 < l_1 < \dots < l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j = 2\operatorname{Re}(z^{l_j} \frac{\partial}{\partial z}), 1 \leq j \leq s$.

Пусть $M_{s,n}$ – многообразие, заданное в окрестности нуля системой уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_{1,1} - F_{1,1}(z_1, \bar{z}_1) &= 0, \\ &\dots \\ \operatorname{Im} w_{1,n-1} - F_{1,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} w_{1,n} - F(z_n, \bar{z}_n) = 0, \\
& \operatorname{Im} w_{2,1} - F_{2,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0, \\
& \dots \\
& \operatorname{Im} w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0, \\
& \operatorname{Im} w_{2,n-1+j_1} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0, \quad 1 \leq j_1 \leq s. \\
& \dots \\
& \operatorname{Im} w_{k,1} - F_{k,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0, \\
& \dots \\
& \operatorname{Im} w_{k,n-1} - F_{k,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0, \\
& \operatorname{Im} w_{k,j_1,\dots,j_k} - X_{j_1} \dots X_{j_k}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq s, \\
& \dots
\end{aligned}$$

Утверждение 9. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{s,n}$ имеет размерность s .

Доказательство. Предположим, что касательное поле имеет вид $2\operatorname{Re}(f(z_1, \dots, z_n, w) \frac{\partial}{\partial z_m}) + \mathcal{W}$, где $f(z_1, \dots, z_n)$ – однородный полином веса $\mu > 1$. Аналогично доказанному в лемме 2 получаем, что f не зависит от w и что остальные коэффициенты данного поля являются линейными функциями от компонент вектора w . Запишем условие касания для второго по порядку уравнения, зависящего от переменной z_m (т.е. для уравнения $0 = \operatorname{Im} w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1})$, если $m < n$, или для уравнения $0 = \operatorname{Im} w_{2,n} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n))$, если $m = n$). Получим, что некоторые из мономов делятся на $z_m \bar{z}_m$ и не равны тождественно нулю. Следовательно, компоненты вектора w , от которых зависят коэффициенты рассматриваемого поля, выражаются через переменные $z_m, \bar{z}_m$. Поэтому полином $f(z_1, \dots, z_n)$ может зависеть только от переменной z_m , а значит размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ прямого произведения равна сумме размерности алгебр прямых сомножителей.

Утверждение 9 доказано. $\square$

Для поверхностей $M_{s,n}$ имеет место аналог следствия 2.

Пусть $\tilde{M}_{s,n}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z_n, \bar{z}_n) = F(z_n, \bar{z}_n) + o(d)$, $\tilde{F}_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) = F_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) + o(d)$.

Следствие 3. Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $\tilde{M}_{s,n}$ имеет размерность s .

Случай $n > 1$ рассмотрен.

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯМ $M_{s,n}$

Пусть H – гильбертово пространство с координатами $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w)$, где w бесконечномерна, M – подмногообразие H , заданное в окрестности начала координат системой уравнений $\mathcal{F}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = 0$. Для всех точек (ζ, ω) из этой окрестности комплексные подмногообразия $Q(\zeta, \omega) := \{(z, w) : \mathcal{F}(z, \zeta, w, \omega) = 0\}$ называются многообразиями Сегре. Переменные w рассматриваются как зависящие от переменных $z : w = w(z)$.

Для вполне невырожденных многообразий M^n , рассмотренных выше, можно выписать систему дифференциальных уравнений второго порядка, решениями которой являются их многообразия Сегре. Для этого применим конструкцию, описанную в [9]. Данная конструкция переносится на случай бесконечномерного пространства, поскольку теорема о неявной функции, теорема о существовании и единственности решения для систем дифференциальных

уравнений и теорема Фробениуса применимы и в бесконечномерном пространстве (см. [10]).

Рассмотрим систему уравнений $2i\mathcal{F}^n(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, определяющую M^n в окрестности нуля, и осуществим такую линейную замену координат, что первое уравнение системы примет вид $\tilde{w}_1 = z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n$ (далее для простоты обозначений тильду над w_1 опускаем).

Продифференцировав соответствующее ему уравнение $w_1 - \omega_1 = 2i(z_1\zeta_1 + \dots + z_n\zeta_n)$ по переменным $z_1, \dots, z_n$, выразим переменные $\zeta_1, \dots, \zeta_n$:

$$(w_1)_{z_1} = 2i\zeta_1,$$

...

$$(w_1)_{z_n} = 2i\zeta_n,$$

где нижний индекс z_j обозначает частную производную по этой переменной.

Отсюда получаем искомую систему:

$$(w_1)_{z_j z_k} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

$$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}^n)_t(z, \zeta, w, \omega(\zeta, z, w)))_{z_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t > 1,$$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1 .

Если полиномы $F(z_n, \bar{z}_n), F_{1,m}(z_m, \bar{z}_m), 1 \leq m \leq n-1$, участвующие в определении многообразия $M_{s,n}$, равны соответственно мономам $z_n\bar{z}_n$ и $z_m\bar{z}_m, 1 \leq m \leq n-1$, то для многообразия $M_{s,n}$, заданного с помощью системы $2i\mathcal{F}_{s,n}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, дифференциальные уравнения выписываются аналогично (после линейной замены координат):

$$(w_1)_{z_j z_k} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

$$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}_{s,n})_t(z, \zeta, w, \omega(\zeta, z, w)))_{z_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t > 1,$$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1 .

Конструкции, описанные для многообразий M^n и $M_{s,n}$, являются частными случаями следующей более общей ситуации. Рассмотрим многообразие M типа (n, k) , заданное в окрестности нуля системой уравнений $2i\mathcal{F}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, имеющей вид:

$$v_1 = \sum_j |z_j|^2,$$

$$v_2 = F_2(z, \bar{z}, u_1),$$

...

$$v_l = F_l(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{l-1}),$$

...

где F_l – однородные полиномы степени d_l , n – CR-размерность, а величины n и k могут быть как конечными, так и бесконечными.

Соответствующие параметры ζ_j выражаются через производные $(w_1)_{z_j}$, а выражения для параметров $\omega_j = \omega_j(\zeta, z, w)$ вычисляются рекуррентным образом.

Получаем аналогичную рассмотренным выше систему:

$$(w_1)_{z_j z_k} = 0, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

$$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F})_t(z, \zeta, w, \omega(\zeta, z, w)))_{z_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t > 1,$$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1 .

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно также построить систему уравнений для многообразия $\tilde{M}$, заданного в окрестности нуля системой уравнений $2i\tilde{\mathcal{F}}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = w - \bar{w}$, имеющей вид:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sum_j |z_j|^2 + O(3), \\
v_2 &= F_2(z, \bar{z}, u_1) + O(d_1), \\
&\dots \\
v_l &= F_l(z, \bar{z}, u_1, \dots, u_{l-1}) + O(d_l), \\
&\dots
\end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] V.K. Beloshapka, *Real submanifolds in complex space: their polynomial models, automorphisms, and classification problems*, Russ. Math. Surv., **57**:1 (2002), 1–41. Zbl 1053.32022
- [2] V.K. Beloshapka, *Universal models for real submanifolds*, Math. Notes, **75**:4 (2004), 475–488. Zbl 1063.32010
- [3] V.K. Beloshapka, *On holomorphic transformations of a quadric*, Math. USSR, Sb., **72**:1 (1992), 189–205. Zbl 0728.32011
- [4] R.V. Gammel', I.G. Kossovskii, *The envelope of holomorphy of a model third-degree surface and the rigidity phenomenon*, Proc. Steklov Inst. Math., **253** (2006), 22–36. Zbl 1351.32059
- [5] Jan Gregorovic, *On the Beloshapka's rigidity conjecture for real submanifolds in complex space*, <https://arxiv.org/abs/1807.03502>
- [6] M. Sabzevari, A. Spiro, *On the geometric order of totally nondegenerate CR manifolds*, <https://arxiv.org/abs/1807.03076>
- [7] V.K. Beloshapka, *Model-surface method: an infinite-dimensional version*, Proc. Steklov Inst. Math., **279** (2012), 14–24. Zbl 1302.32039
- [8] V.K. Beloshapka, *On the dimension of the group of automorphisms of an analytic hypersurface*, Math. USSR, Izv., **14**:2 (1980), 223–245. Zbl 0456.32015
- [9] A.B. Sukhov, *On transformations of analytic CR-structures*, Izv. Math., **67**:2 (2003), 303–332. Zbl 1083.32504
- [10] H. Cartan, *Differentsialnoe ischislenie. Differentsialnye formy*. Mir, Moskau, 1971. Zbl 0223.35004
- [11] S.S. Chern, J.K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math., **133**:3–4 (1974), 219–271. Zbl 0302.32015
- [12] A.V. Loboda, *Sphericity of rigid hypersurfaces in C^2* , Math. Notes, **62**:3 (1997), 329–349. Zbl 0923.32017

MARIA ALEKSANDROVNA STEPANOVA
 LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
 1, LENINSKIE GORY,
 MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-mail address: `step_masha@mail.ru`