Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, Passage to the limit in the Galerkin approximations of the regularized problem of three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conducting multifluid, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2020, Volume 17, 227–259

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.017>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 14:25:22

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 227–259 (2020)

DOI 10.33048/semi.2020.17.017

УДК 517.95

MSC 35A05

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ГАЛЕРКИНСКИХ
ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О
ТРЕХМЕРНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ
СЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

ABSTRACT. We study the initial-boundary value problem which describes the unsteady motion of a viscous compressible heat-conducting multicomponent fluid in a bounded domain of three-dimensional space. The passage to the limit is done in the Galerkin approximations of the regularized problem.

Keywords: Galerkin approximations, non-stationary boundary value problem, three-dimensional flow, viscous compressible heat-conducting fluid, homogeneous multi-velocity single-temperature multifluid.

В нашей предшествующей статье [4] было доказано глобальное существование решений регуляризованной задачи о пространственном нестационарном движении вязкой сжимаемой теплопроводной многокомпонентной жидкости. В данной работе совершается предельный переход по размерности галеркинских приближений.

МАМОНТОВ, А.Е., ПРОКУДИН, Д.А., PASSAGE TO THE LIMIT IN THE GALERKIN APPROXIMATIONS OF THE REGULARIZED PROBLEM OF THREE-DIMENSIONAL UNSTEADY MOTION OF A VISCOUS COMPRESSIBLE HEAT-CONDUCTING MULTIFLUID.

© 2020 Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-71-00024).

Поступила 19 декабря 2019 г., опубликована 28 февраля 2020 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Формулировка уравнений динамики смесей. Дана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\sigma_1}$, $\sigma_1 \in (0, 1)$, и число $T > 0$. Движение в Ω теплопроводной смеси из двух вязких сжимаемых жидкостей с течением времени $t \in [0, T]$ описывается следующей системой уравнений в частных производных [5], [7] (см. также [2]):

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \left(\mathbf{q} - \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 p_i \mathbf{u}_i \right) = \sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho g.$$

Данные уравнения представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы для каждой компоненты, законов сохранения импульса для каждой компоненты и закона сохранения полной энергии для смеси. Здесь $\rho_i \geq 0$ — плотность i -й компоненты; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — суммарная плотность; $\mathbf{u}_i$ — скорость i -й компоненты; $\mathcal{E}_i = \frac{\rho_i |\mathbf{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i(\rho_i, \theta)$ — полная энергия i -й компоненты, где $e_i(\rho_i, \theta)$ — внутренняя удельная энергия i -й компоненты, $\theta > 0$ — температура смеси; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ — суммарная полная энергия; $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$ — давление в i -й компоненте;

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{S}_i &= \sum_{j=1}^2 ((\lambda_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{u}_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left((\eta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} \right) \right) \end{aligned}$$

— вязкая часть тензора напряжений в i -й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} ((\nabla \otimes \mathbf{v}) + (\nabla \otimes \mathbf{v})^*)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\mathbf{v}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij} , μ_{ij} и η_{ij} образуют следующие матрицы:

$$(1.5) \quad \mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 > 0, \quad \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3} \mathbf{M} \geq 0,$$

откуда в частности следует, что

$$(1.6) \quad \mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0;$$

далее,

$$(1.7) \quad \mathbf{J}_i = (-1)^i a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$$

— приток импульса в i -ю компоненту из другой компоненты; $\mathbf{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i -ю компоненту;

$$(1.8) \quad \mathbf{q} = -k(\theta) \nabla \theta$$

— суммарный тепловой поток, k — теплопроводность; наконец, g — плотность тепловых источников внешней среды.

1.2. Определяющие уравнения. Определяющие уравнения, связывающие термодинамические параметры между собой, обязаны удовлетворять определенным ограничениям, в частности, соотношениям Гиббса

$$(1.9) \quad \theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) \quad \forall \rho_i, \theta > 0, \quad i = 1, 2,$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ — удельная энтропия i -й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$(1.10) \quad \rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \quad i = 1, 2,$$

а также условиям термодинамической устойчивости

$$(1.11) \quad \frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Замечание 1. Для гладких решений системы (1.1), (1.2), (1.3) уравнения (1.3) (ввиду (1.1), (1.2), (1.10)) можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i e_i + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i e_i \mathbf{u}_i \right) + \sum_{i=1}^2 p_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i + \operatorname{div} \mathbf{q} = \\ = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g, \end{aligned}$$

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \\ = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} + \frac{a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} + \frac{\rho g}{\theta}, \end{aligned}$$

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial e_i}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \theta \mathbf{u}_i) \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \\ - \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \operatorname{div} \mathbf{u}_i + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g. \end{aligned}$$

Следуя подходу, предложенному в [1], будем предполагать, что

$$(1.15) \quad p_i(\rho_i, \theta) = p_{ei}(\rho_i) + \theta p_{\theta i}(\rho_i), \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями p_{ei} , $p_{\theta i}$. Тогда из (1.10) получаем

$$(1.16) \quad e_i(\rho_i, \theta) = P_{ei}(\rho_i) + Q_i(\theta), \quad i = 1, 2,$$

где

$$(1.17) \quad P_{ei}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{ei}(z)}{z^2} dz, \quad i = 1, 2,$$

и с точностью до несущественных аддитивных констант верно представление

$$(1.18) \quad Q_i(\theta) = \int_0^\theta c_{\theta i}(z) dz, \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями $c_{\theta i}$. Кроме того, далее нам потребуется функция

$$(1.19) \quad \mathcal{K}(\theta) = \int_0^\theta k(z) dz.$$

Условия (1.11) будут заведомо выполнены, если p'_{ei} , $p'_{\theta i}$ неотрицательны, причем p'_{ei} или $p'_{\theta i}$ положительны, а $c_{\theta i}(z) \geq c_1 = \text{const} > 0 \quad \forall z \geq 0$. Теперь из (1.9) находим

$$(1.20) \quad s_i(\rho_i, \theta) = C_{\theta i}(\theta) - P_{\theta i}(\rho_i) + s_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$(1.21) \quad C_{\theta i}(\theta) = \int_1^\theta \frac{c_{\theta i}(z)}{z} dz, \quad P_{\theta i}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{\theta i}(z)}{z^2} dz, \quad i = 1, 2,$$

а s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (1.14) в этом случае примет следующий вид:

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) + \text{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) + \text{div} \mathbf{q} + \theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \text{div} \mathbf{u}_i = \\ = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g. \end{aligned}$$

1.3. Формулировка Задачи Н. Строгая математическая формулировка задачи о движении смесей в рамках вышеописанной модели выглядит следующим образом.

Задача Н. В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область течения, $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля $\rho_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $\theta > 0$ и векторные поля $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие системе уравнений (1.1), (1.2), (1.22) и следующим начальным и краевым условиям:

$$(1.23) \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \mathbf{u}_i|_{t=0} = \mathbf{u}_{0i}, \quad i = 1, 2, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0,$$

$$(1.24) \quad \mathbf{u}_i|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(1.25) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = L(t, \mathbf{x}, \theta) \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega.$$

Здесь ρ_{0i} (начальные плотности), $\mathbf{u}_{0i}$ (начальные скорости), θ_0 (начальная температура) — заданные функции; величина граничного теплообмена (внешней теплопроводности) L задана как функция от времени, пространственной переменной и неизвестной температуры; $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω .

Замечание 2. Строго говоря, начальные условия должны быть заданы в терминах $\rho_i(0, \cdot)$, $(\rho_i \mathbf{u}_i)(0, \cdot)$ и $\rho_i Q_i(\theta)(0, \cdot)$, однако математически более удобно работать с начальными условиями, записанными в форме (1.23).

Замечание 3. И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы

$$(1.26) \quad S = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i s_i d\mathbf{x}$$

должна не убывать со временем в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. когда $g = 0$ и $L = 0$. В общем (термодинамически незамкнутом) случае из (1.8), (1.13), (1.24) и (1.25) получаем

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{k(\theta)|\nabla \theta|^2}{\theta^2} d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\rho g}{\theta} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{L(t, \mathbf{x}, \theta)}{\theta} d\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения условий на коэффициенты

$$(1.28) \quad k \geq 0, \quad a \geq 0,$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$(1.29) \quad \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \geq 0.$$

Однако в рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (1.5), выполнение (1.29) очевидно, ввиду равенства

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) = & \sum_{i,j=1}^2 \left(\eta_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{u}_i) (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) + \right. \\ & \left. + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_i) \mathbb{I} \right) : \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} \right) \right). \end{aligned}$$

Кроме того, из условий (1.5) (см. (1.6)), в силу (1.24), следует очень важное с математических позиций неравенство

$$(1.31) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) d\mathbf{x} \geq B_0 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x}$$

с некоторой положительной постоянной $B_0 = B_0(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M})$.

1.4. Условия на определяющие функции. На функции $p_{ei}, p_{\theta i}$ будем налагать следующие условия:

$$(1.32) \quad \begin{cases} p_{ei}, p_{\theta i} \in C^1[0, \infty), & p_{ei}(0) = p_{\theta i}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \frac{1}{c_2} z^{\gamma-1} \leq p'_{ei}(z) \leq c_2 z^{\gamma-1} + c_3 & \forall z \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ p_{\theta i}(z) \leq c_4(1 + z^{\frac{\gamma}{3}}) & \forall z \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ p'_{\theta i}(z) > 0 & \forall z \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

где $c_2 = \text{const} \geq 1$, $c_3, c_4 = \text{const} > 0$,

$$(1.33) \quad \gamma = \text{const} > 6.$$

О функции k будем предполагать следующее:

$$(1.34) \quad \begin{cases} k \in C^2[0, \infty), \\ \frac{1}{c_5}(1 + z^m) \leq k(z) \leq c_5(1 + z^m) & \forall z \geq 0, \\ c_5 = \text{const} \geq 1, \quad m = \text{const} > 2. \end{cases}$$

Относительно функций $c_{\theta i}$ (см. (1.18)) примем следующие гипотезы:

$$(1.35) \quad \begin{cases} c_{\theta i} \in C^1[0, \infty), \quad i = 1, 2, \\ \frac{1}{c_6}(1 + z^{\frac{m}{2}-1}) \leq c_{\theta i}(z) \leq c_6(1 + z^{\frac{m}{2}-1}) & \forall z \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ c_6 = \text{const} \geq 1. \end{cases}$$

Замечание 4. Из (1.17) и (1.32) следует, что при всех $i = 1, 2$ и $z \geq 0$

$$(1.36) \quad \frac{1}{c_2 \gamma} z^\gamma \leq p_{ei}(z) \leq \frac{c_2}{\gamma} z^\gamma + c_3 z,$$

$$(1.37) \quad B_1 z^\gamma - B_2 \leq z P_{ei}(z) \leq B_3 z^\gamma + B_4,$$

где $B_1 = B_1(c_2, c_3, \gamma)$, $B_2 = B_2(c_2, c_3, \gamma)$, $B_3 = B_3(c_2, c_3, \gamma)$, $B_4 = B_4(c_2, c_3, \gamma)$. Из (1.21) и (1.32) нетрудно получить, что при всех $i = 1, 2$ и $z \geq 0$

$$(1.38) \quad -B_5 \leq z P_{\theta i}(z) \leq B_6 z^{\frac{\gamma}{3}} + B_7,$$

где $B_5 = B_5(c_4, \gamma)$, $B_6 = B_6(c_4, \gamma)$, $B_7 = B_7(c_4, \gamma)$. Наконец, из (1.18), (1.21) и (1.35) следует, что при всех $i = 1, 2$ и $z > 0$

$$(1.39) \quad C_{\theta i}(z) \leq Q_i(z) - Q_i(1),$$

$$(1.40) \quad B_8(c_6, m) \left(z + z^{\frac{m}{2}} \right) \leq Q_i(z) \leq B_9(c_6, m) z^{\frac{m}{2}} + B_{10}(c_6, m).$$

Кроме того, заметим что $\forall z > 0$ верно, ввиду (1.21), (1.35) и (1.40), что

$$(1.41) \quad C_{\theta i}(z) + \frac{1}{c_6} |\ln z| \leq B_{11}(B_8, c_6, m) Q_i(z), \quad i = 1, 2.$$

Замечание 5. Приведем простейший пример ситуации, когда предположения на давления и энергии выполнены:

$$(1.42) \quad p_{ei}(\rho_i) = \rho_i^\gamma, \quad p_{\theta i}(\rho_i) = \rho_i, \quad c_{\theta i}(\theta) = 1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из (1.15)–(1.21) следует, что

$$p_i(\rho_i, \theta) = \rho_i^\gamma + \rho_i \theta, \quad e_i(\rho_i, \theta) = \frac{\rho_i^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \theta + \frac{2}{m} \theta^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i(\rho_i, \theta) = \ln \left(\frac{\theta}{\rho_i} \right) + \frac{2}{m-2} \theta^{\frac{m}{2}-1} + s_{0i} - \frac{2}{m-2}, \quad m > 2, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i(\rho_i, \theta) = \ln \left(\frac{\theta^2}{\rho_i} \right) + s_{0i}, \quad m = 2, \quad i = 1, 2.$$

Условия (1.32), (1.35) очевидно выполнены, а уравнение (1.14) в этом случае примет следующий вид:

$$(1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}) \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \theta \mathbf{u}_i) \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} + \theta \sum_{i=1}^2 \rho_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g.$$

При предположениях (1.42) с $m = 2$ в стационарном случае существование слабых решений соответствующей краевой задачи доказано в [3].

1.5. Условия на входные данные. Начальные данные в Задаче $\mathcal{H}$ будем брать из класса

$$(1.43) \quad \rho_{0i} \in L_\gamma(\Omega), \quad \rho_{0i} \geq 0, \quad \int_{\Omega} \rho_{0i} d\mathbf{x} > 0, \quad \theta_0 \in L_\infty(\Omega),$$

$$\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} \theta_0 > 0, \quad \mathbf{u}_{0i} \in L_\infty(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

На внешние силы и источники наложим следующие требования:

$$(1.44) \quad \mathbf{f}_i \in L_\infty(Q_T), \quad i = 1, 2, \quad g \in L_\infty(Q_T), \quad g \geq 0.$$

На функцию L будем налагать следующие требования:

$$(1.45) \quad \begin{cases} L \in C([0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}), & L \geq 0 \quad \text{в} \quad [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ \forall \theta_1, \theta_2, \quad \theta_1 \leq \theta_2 \implies & L(\cdot, \cdot, \theta_1) \leq L(\cdot, \cdot, \theta_2). \end{cases}$$

Замечание 6. Для удобства будем считать L продолженной по $(t, \mathbf{x})$, и в результате

$$(1.46) \quad L \in C(\mathbb{R}^5).$$

1.6. Вариационное решение задачи $\mathcal{H}$ и его связь с классическими решениями.

Определение 7. Вариационным решением Задачи $\mathcal{H}$ называется набор функций $\rho_i \geq 0$, $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, и $\theta > 0$ следующего класса¹ (см. (1.19)):

$$\rho_i \in L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega)), \quad \mathbf{u}_i \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)),$$

$$\rho_i \mathbf{u}_i \in L_\infty(0, T; L_{\sigma_2}(\Omega)) \quad \text{с} \quad \sigma_2 > \frac{6}{5}, \quad i = 1, 2,$$

$$\rho_i Q_i(\theta) \in L_\infty(0, T; L_1(\Omega)) \cap L_2(0, T; L_{\sigma_3}(\Omega)) \quad \text{с} \quad \sigma_3 > \frac{6}{5}, \quad i = 1, 2,$$

$$\ln \theta, \quad \theta p_{\theta i}(\rho_i) \in L_2(Q_T), \quad i = 1, 2,$$

¹Последнее требование обеспечивает при п. в. $t \in (0, T)$ существование следа $\mathcal{K}(\theta)|_{\partial\Omega} \in W_{\frac{6}{5}}^{\frac{1}{6}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L_{\frac{4}{3}}(\partial\Omega)$, о котором и идет речь в предыдущем требовании. Символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\hookrightarrow$ здесь и далее обозначают соответственно непрерывное и компактное вложения пространств.

$$\mathcal{K}(\theta) \in L_1(Q_T), \quad L(\cdot, \cdot, \theta) \in L_1((0, T) \times \partial\Omega),$$

$$\mathcal{K}(\theta) \in W_{\frac{6}{5}}^1(\Omega) \quad \text{при н. в. } t \in (0, T),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых скалярных полей² $\phi_i \in C_0^1([0, T]; C^\infty(\bar{\Omega}))$ выполняются интегральные тождества

$$(1.47) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla \phi_i \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \rho_{0i} \phi_i|_{t=0} d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2;$$

2) для любых векторных полей $\varphi_i \in C_0^1([0, T]; C_0^\infty(\Omega))$ выполнены интегральные тождества

$$(1.48) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \varphi_i) + p_i \operatorname{div} \varphi_i + \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \varphi_i + \right. \\ \left. + \mathbf{J}_i \cdot \varphi_i \right) d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \rho_{0i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \varphi_i|_{t=0} d\mathbf{x} = \int_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \varphi_i) d\mathbf{x} dt, \quad i = 1, 2;$$

3) для любых скалярных полей $\psi \in C_0^1([0, T]; C^\infty(\bar{\Omega}))$, $\psi \geq 0$, $\nabla \psi \cdot \mathbf{n}|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$ выполняется интегральное неравенство

$$(1.49) \quad \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} dt + \\ + \int_{Q_T} \mathcal{K}(\theta) \Delta \psi d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi d\mathbf{x} dt + \\ + a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \rho g \psi d\mathbf{x} dt + \\ + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) \psi|_{t=0} d\mathbf{x} \leq \int_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) \psi d\mathbf{x} dt + \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L(t, \mathbf{x}, \theta) \psi d\sigma dt;$$

²Элементы пространства $C_0^1([0, T], X)$ обращаются в нуль при $t = T$.

4) для n . в. $t \in (0, T)$ выполняется неравенство

$$(1.50) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) + \rho_i(t) Q_i(\theta)(t) \right) d\mathbf{x} + \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} L(\tau, \mathbf{x}, \theta) d\sigma d\tau \leq \int_{Q_t} \rho g d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i} |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i} P_{ei}(\rho_{0i}) + \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Вариационное решение не является, вообще говоря, слабым — отличие состоит в том, что соотношение (1.49) представляет собой слабую формулировку супер-решения (а не решения) уравнения энергии (1.22). При этом уравнения неразрывности (1.1) и импульсов (1.2) выполнены в слабом смысле, причем вводится дополнительное требование — энергетическое неравенство (1.50) (для полной энергии). Таким образом, вариационное решение — это более обобщенное понятие чем так наз. подходящее³ слабое решение (suitable weak solution). Однако оно, как и всякое обобщенное решение, удовлетворяет двум фундаментальным требованиям:

- (1) Всякое классическое решение является обобщенным;
- (2) Всякое обобщенное решение, обладающее всеми классическими производными, входящими в уравнения, является классическим.

Первый тезис очевиден (для классических решений все интегральные соотношения в Определении 7 выполнены в виде равенств), а для проверки второго достаточно показать, что если вариационное решение обладает «классической» гладкостью, то неравенство (1.49) превращается в равенство, т. е. решение является слабым (а потому и классическим, что показывается уже по стандартной схеме рассуждений).

Действительно, пусть имеется гладкое вариационное решение. Предположим, что неравенство (1.49) для некоторой ψ строгое, т. е. найдутся число $\eta > 0$ и функция

$$\psi^* \in C_0^1([0, T]; C^\infty(\bar{\Omega})), \quad 0 \leq \psi^* \leq 1, \quad \nabla \psi^* \cdot \mathbf{n}|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$$

такие, что

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla \psi^* d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{Q_T} \mathcal{K}(\theta) \Delta \psi^* d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi^* d\mathbf{x} dt + a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi^* d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{Q_T} \rho g \psi^* d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) \psi^*|_{t=0} d\mathbf{x} + \eta = \end{aligned}$$

³Слабое решение, удовлетворяющее энергетическому неравенству.

$$= \int_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) \psi^* d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L(t, \mathbf{x}, \theta) \psi^* d\sigma dt.$$

Тогда для любой $\psi \geq \psi^*$ такой, что $\psi \in C_0^1([0, T]; C^\infty(\bar{\Omega}))$, $\nabla \psi \cdot \mathbf{n}|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$, функция $\psi := \psi - \psi^*$ годится в качестве тестовой для (1.49), и следовательно

$$(1.51) \quad \begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{Q_T} \mathcal{K}(\theta) \Delta \psi d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi d\mathbf{x} dt + a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{Q_T} \rho g \psi d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_{0i} Q_i(\theta_0) \right) \psi|_{t=0} d\mathbf{x} + \eta \leq \\ & \leq \int_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) \psi d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L(t, \mathbf{x}, \theta) \psi d\sigma dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$(1.52) \quad \zeta_\omega(z) = \frac{1}{\omega} \zeta\left(\frac{z}{\omega}\right),$$

где функция $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} \zeta \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\zeta(-x) = \zeta(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \zeta(z) dz = 1$, $\zeta(z)$ — неубывающая при $z \geq 0$. Положим в (1.51)

$$\psi = 1 - \int_{-\infty}^{t-T+\omega} \zeta_\omega(s) ds$$

с достаточно малым $\omega > 0$ (так чтобы было верно $\psi \geq \psi^*$). Устремив $\omega \rightarrow +0$, получим строгое неравенство

$$(1.53) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i(T) Q_i(\theta)(T) d\mathbf{x} > \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} dt + \\ & + a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \rho g d\mathbf{x} dt + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_{0i} Q_i(\theta_0) d\mathbf{x} - \\ & - \int_{Q_T} \theta \left(\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} L(t, \mathbf{x}, \theta) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Поскольку рассматриваемое вариационное решение удовлетворяет (1.1), (1.2) в классическом смысле, то выполняется энергетическое равенство (для кинетической энергии)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) \right) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + \\ & + a \int_{Q_t} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau = \int_{Q_t} \theta \left(\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) d\mathbf{x} d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i} |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i} P_{ei}(\rho_{0i}) \right) d\mathbf{x} \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

которое при $t = T$ вместе с (1.53) противоречит (1.50) (которое для гладких функций выполнено для всех $t \in [0, T]$, и потому можно положить $t = T$). Таким образом, сделанное предположение о возможности строгого неравенства (1.49) (для какой-либо ψ) неверно. Отметим, что попутно получается равенство в (1.50), что впрочем итак очевидно для классических решений.

1.7. Априорные оценки. В статье [4] доказаны (причем, при условии $\gamma > 3$ вместо (1.33)) априорные оценки классических решений Задачи $\mathcal{H}$ в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. $g = 0$ и $L = 0$, причем плотности неотрицательны, а температура положительна. В дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство существенно облегчают понимание процесса доказательства существования слабого решения посредством построения решений приближенных задач.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ И ЕЕ РАЗРЕШИМОСТЬ

Зададим произвольно числа $q \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \delta < 1/2$, $0 < v \leq 1$ и рассмотрим приближенную **Задачу** $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ для функций ρ_i , $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, θ (все эти функции зависят от параметров q , ε , δ и v , но пока для краткости опустим соответствующие индексы).

Нам потребуется операция усреднения $(\cdot)_{\omega}$, действующая по формуле

$$(2.1) \quad h_{\omega}(z) = (h * \zeta_{\omega})(z) := \int_{\mathbb{R}} \zeta_{\omega}(z - s) h(s) ds$$

(см. (1.52)).

2.1. Уравнения неразрывности. Вместо (1.1) будем рассматривать уравнения

$$(2.2) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = \varepsilon \Delta \rho_i, \quad i = 1, 2$$

с краевыми условиями

$$(2.3) \quad \nabla \rho_i \cdot \mathbf{n}|_{(0,T) \times \partial \Omega} = 0, \quad i = 1, 2,$$

а вместо (1.23) для плотностей поставим условия

$$(2.4) \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}^{\delta}, \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями⁴ ρ_{0i}^δ такими, что

$$(2.5) \quad \rho_{0i}^\delta \in C^{2+\sigma_4}(\bar{\Omega}), \quad \nabla \rho_{0i}^\delta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \rho_{0i}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow +0} \rho_{0i} \quad \text{в} \quad L_\gamma(\Omega),$$

$$\inf_{\Omega} \rho_{0i}^\delta > 0, \quad \int_{\Omega} \rho_{0i}^\delta d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} \rho_{0i} d\mathbf{x}, \quad \rho_{0i}^\delta \geq \delta, \quad i = 1, 2,$$

где $0 < \sigma_4 < 1$.

2.2. Уравнение энергии. Вместо (1.22) будем рассматривать уравнение

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 (\rho_i + v) Q_i(\theta) + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) + \theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i +$$

$$+ \delta \theta^{m+1} + \operatorname{div} \mathbf{q} = (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g^\delta,$$

а вместо (1.23) для температуры и (1.25) поставим соответственно условия

$$(2.7) \quad \theta|_{t=0} = \theta_0^\delta$$

и

$$(2.8) \quad k(\theta) \nabla \theta \cdot \mathbf{n} + L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta) = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega,$$

с некоторой функцией $\theta_0^\delta \in C^{2+\sigma_5}(\bar{\Omega})$, $0 < \sigma_5 < 1$ такой, что⁵

$$(2.9) \quad k(\theta_0^\delta) \nabla \theta_0^\delta \cdot \mathbf{n} + L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^\delta) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

$$\inf_{\Omega} \theta_0^\delta \geq \inf_{\Omega} \theta_0 + \delta, \quad \|\theta_0^\delta\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 2\|\theta_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \theta_0^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow +0} \theta_0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega)$$

и функциями g^δ , L^δ определенными следующим образом⁶:

$$(2.10) \quad g^\delta \in C^1(\bar{Q}_T), \quad g^\delta \geq 0, \quad g^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow +0} g \quad \text{в} \quad L_{\sigma_6}(Q_T)$$

$$\forall \sigma_6 < +\infty, \quad \|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)} \leq 2\|g\|_{L_\infty(Q_T)},$$

⁴Например, можно положить $\rho_{0i}^\delta = (\varphi_\delta \rho_{0i}) * \tilde{\zeta}_\delta + \delta + \frac{1}{|\Omega|} \max_{i=1,2} \left\{ \int_{\Omega} \rho_{0i} (1 - \varphi_\delta) d\mathbf{x} \right\}$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ -окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ -окрестности $\partial\Omega$.

⁵Например, можно положить $\theta_0^\delta = \left\{ \begin{array}{l} \inf_{\Omega} \theta_0 \text{ в } 2\delta \text{ окрестн. } \partial\Omega, \\ \theta_0 \text{ вне } 2\delta \text{ окрестн. } \partial\Omega \end{array} \right\} * \tilde{\zeta}_\delta + \delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$.

⁶Например, g^δ , L^δ — это усреднения от g , $L\psi_\delta$ по $(t, \mathbf{x})$ с ядрами классов $C^1(\mathbb{R}^4)$, $C^2(\mathbb{R}^4)$ соответственно, где ψ_δ — это срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^4)$, равная нулю в δ -окрестности многообразия $\{t = 0\} \times \partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ -окрестности этого многообразия; в случае если L имеет гладкость ниже двух по последнему аргументу, требуется дополнительно усреднение по нему. В случае $L(t, \mathbf{x}, \theta) = \ell(t, \mathbf{x}) \mathcal{K}(\theta)$, $\ell \in C(\mathbb{R}^4)$, $\ell \geq 0$, это дает $L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta) = (\ell\psi_\delta)_\delta(t, \mathbf{x}) \mathcal{K}(\theta)$ (где нижний индекс δ означает усреднение по $(t, \mathbf{x})$). На данном этапе нет необходимости обеспечивать условие согласования в (2.9), а это нужно только для задачи с регуляризующим параметром ω (см. построение решения задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ в [4]). Однако для ясности оказалось удобнее заранее обеспечить условие согласования в (2.9) за счет описанной конструкции.

$$(2.11) \quad L^\delta \in C^2(\mathbb{R}^5), \quad L^\delta \geq 0, \quad L^\delta \xrightarrow[\delta \rightarrow +0]{} L \text{ в } C(K) \quad \forall K \subset \mathbb{R}^5, \quad K — \text{компакт},$$

$$L^\delta(\cdot, \cdot, \theta) \text{ не убывает по } \theta.$$

2.3. Уравнения импульсов. Обозначим $X_q = \text{Lin}\{\psi_i\}_{i=1}^q \subset L_2(\Omega)$, где $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω , для определенности норму в X_q положим равной норме в $L_2(\Omega)$. Обозначим через P_q ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в X_q , и положим

$$\mathcal{M}_\xi = P_q(\xi(\cdot)) : X_q \rightarrow X_q, \quad \text{где } \xi \in L_\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{M}_\xi(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \xi \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_q,$$

и для всех $\xi > 0$ оператор $\mathcal{M}_\xi$ обратим (поскольку у него нулевое ядро). Вместо (1.2) будем рассматривать уравнения для $\mathbf{u}_i \in C([0, T], X_q)$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i + \varepsilon(\nabla \otimes \mathbf{u}_i)^* \nabla \rho_i = \\ & = \text{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{h}_i \perp C_0^1([0, T], X_q)$ в $L_2(Q_T)$. Условия (1.23) для скоростей и (1.24) остаются прежними с точностью до проектирования на X_q . А именно, вместо прежних начальных условий положим

$$(2.13) \quad \mathbf{u}_i|_{t=0} = \mathcal{M}_{\rho_{0i}^\delta}^{-1} P_q(\rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i}) \in X_q.$$

Тогда легко проверить, что

$$(2.14) \quad \rho_i \mathbf{u}_i|_{t=0} - \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \in X_q^\perp.$$

В интегральной записи описанные факты означают, что для любых пробных функций $\varphi_i \in C_0^1([0, T], X_q)$ справедливы равенства

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \varphi_i) + p_i \text{div} \varphi_i + \right. \\ & \left. + (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) \cdot \varphi_i \right) dx dt = \int_{Q_T} \left(\varepsilon[(\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \varphi_i] \cdot \nabla \rho_i + \right. \\ & \left. + \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \varphi_i) \right) dx dt - \int_\Omega \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \cdot \varphi_i|_{t=0} dx, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Сформулированную задачу (2.2)–(2.15) будем называть Задачей $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, \nu}$.

2.4. **План предельного перехода по параметрам q, ε, δ и v .** Доказательство разрешимости Задачи $\mathcal{H}$ проводится по следующей схеме:

- Доказать разрешимость поставленной приближенной задачи при фиксированных q, ε, δ и v (это сделано в [4] и описано ниже в разделе 2.5);
- Перейти к пределу при $q \rightarrow +\infty$, получив, в частности, в пределе уравнения (2.12) без слагаемых h_i (это делается ниже в разделах 3 и 4);
- Перейти к пределу по малым параметрам: сначала $\varepsilon \rightarrow +0$, потом $\delta \rightarrow +0$, и наконец $v \rightarrow +0$ (возможно, однако, при этом будет $v = \delta$) — это планируется сделать в следующей работе;
- На каждом этапе получать оценки решений, не зависящие от того параметра, по которому предполагается предельный переход.

2.5. **Разрешимость приближенной Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$.** В статье [4] доказано (причем, при условии $\gamma > 3$ вместо (1.33)), что Задача $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ имеет решение следующего класса (см. (1.19)):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &\in C([0, T], X_q), \quad \rho_i \in C([0, T]; C^{2+\sigma_7}(\overline{\Omega})), \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &\in C([0, T]; C^{\sigma_7}(\overline{\Omega})), \quad \rho_i > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &\in L_2(Q_T), \quad \theta \in L_\infty(Q_T) \bigcap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ \theta &\geq 0, \quad \mathcal{K}(\theta) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Здесь $0 < \sigma_7 \leq \min\{\sigma_1, \sigma_4\}$. Более того, можно показать положительность температуры (но это существенно только при $\delta \rightarrow +0$, где и будет показано, и это требование входит в Определение 7 вариационного решения).

При этом построенное решение Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ удовлетворяет, в частности, энергетическому равенству

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) + (\rho_i(t) + v) Q_i(\theta)(t) \right) d\mathbf{x} + \\ &+ \delta \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i} |\nabla \rho_i|^2 d\mathbf{x} d\tau + \\ (2.16) \quad &+ \delta \int_{Q_t} \theta^{m+1} d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} L^\delta(\tau, \mathbf{x}, \theta) d\sigma d\tau = \int_{Q_t} \rho g^\delta d\mathbf{x} d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}(\rho_{0i}^\delta) + \right. \\ &\quad \left. + (\rho_{0i}^\delta + v) Q_i(\theta_0^\delta) \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

при всех $t \in [0, T]$, и оценке

$$(2.17) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq B_{12} \left(1 + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} d\tau \right),$$

где положительная постоянная B_{12} зависит только от $B_0, B_2, B_3, B_4, B_9, B_{10}, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}, \|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)}, \{\|\mathbf{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\}, \{\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_\gamma(\Omega)}\}, \|\theta_0^\delta\|_{L_\infty(\Omega)}, T, m, \gamma, \delta$ и $|\Omega|$, и следовательно

$$(2.18) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} \leq B_{13}(B_{12}, T).$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО $q \rightarrow +\infty$ В ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕРАЗРЫВНОСТИ И ИМПУЛЬСОВ

3.1. Пределный переход в приближенных уравнениях неразрывности. Получим оценки решений задачи (2.2)–(2.15), равномерные по q , на основании которых и будет происходить предельный переход по $q \rightarrow +\infty$. Сначала заметим, что из (1.37), (2.16), (2.17) и (2.18) следуют равномерные по q и ε оценки

$$(3.1) \quad \|\rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega))} \leq B_{14}(B_1, B_2, B_{13}, T, \gamma), \quad i = 1, 2,$$

$$(3.2) \quad \|\sqrt{\rho_i} \mathbf{u}_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|\mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq B_{15}(B_{12}, B_{13}, \Omega), \quad i = 1, 2.$$

Привлекая (1.32), (2.16) и (2.18), получаем оценку ρ_i в $L_\gamma(0, T; L_{3\gamma}(\Omega))$, и поэтому при всех $\sigma_8 \in [0, 1]$

$$(3.3) \quad \|\rho_i\|_{L_{\frac{\gamma}{\sigma_8}}(0,T;L_{\frac{3\gamma}{3-2\sigma_8}}(\Omega))} \leq B_{16}(B_{13}, B_{14}, c_2, T, \gamma, \varepsilon, \sigma_8, \Omega), \quad i = 1, 2,$$

откуда (при $\sigma_8 = 3/5$) получаем $\|\rho_i\|_{L_{\frac{5\gamma}{3}}(Q_T)} \leq B_{16}, i = 1, 2$. Из второй оценки в (3.2) и (3.3) при $\sigma_8 = 1$ следует

$$\|\sqrt{\rho_i} \mathbf{u}_i\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))} \leq B_{17}(B_{15}, B_{16}, \Omega), \quad i = 1, 2,$$

а теперь, с привлечением первой оценки в (3.2), получаем при всех $\sigma_9 \in [0, 1]$

$$(3.4) \quad \|\sqrt{\rho_i} \mathbf{u}_i\|_{L_{\frac{2\gamma}{\sigma_9(\gamma+1)}}(0,T;L_{\frac{6\gamma}{(3-2\sigma_9)\gamma+\sigma_9}}(\Omega))} \leq B_{18}(B_{15}, B_{17}, \sigma_9), \quad i = 1, 2.$$

Теперь умножим уравнения (2.2) на ρ_i и проинтегрируем результат по Q_t , получим

$$\|\sqrt{\varepsilon} \nabla \rho_i\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sqrt{T} \|\rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_4(\Omega))}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_2(Q_T)} \right), \quad i = 1, 2,$$

откуда (ввиду (1.33)) следуют равномерные по q и ε оценки

$$(3.5) \quad \|\sqrt{\varepsilon} \nabla \rho_i\|_{L_2(Q_T)} \leq B_{19} (B_{14}, B_{15}, T, \gamma, \{\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_2(\Omega)}\}, |\Omega|), \quad i = 1, 2.$$

На основании (3.1), (3.2) и (3.5) из последовательности $\mathbf{u}_i^q, \rho_i^q, q \in \mathbb{N}$ может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же),

для которой при $q \rightarrow +\infty$ для всех $i = 1, 2$ имеют место сходимости (далее у величин, зависящих от q , будем писать индекс q)

$$(3.6) \quad \rho_i^q \rightarrow \rho_i \quad * \text{-слабо в } L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega)),$$

$$(3.7) \quad \nabla \rho_i^q \rightarrow \nabla \rho_i \quad \text{слабо в } L_2(Q_T),$$

$$(3.8) \quad \mathbf{u}_i^q \rightarrow \mathbf{u}_i \quad \text{слабо в } L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)).$$

Докажем сильную сходимость плотностей. Из оценок (3.3) и (3.4) следует

$$(3.9) \quad \|\rho_i^q \mathbf{u}_i^q\|_{L_{\frac{2\gamma}{\sigma_9\gamma + \sigma_8 + \sigma_9}}(0, T; L_{\frac{6\gamma}{(3-2\sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3}}(\Omega))} \leq B_{20}(B_{16}, B_{18})$$

при любых $i = 1, 2$, $(\sigma_8, \sigma_9) \in [0, 1]^2$. Из уравнений (2.2), ввиду (3.5) и (3.9) с $\sigma_8 = \sigma_9 = 0$, получаем

$$\left\| \frac{\partial \rho_i^q}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; W_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}^{-1}(\Omega))} \leq B_{21}(B_{19}, B_{20}, T, \gamma, |\Omega|), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, последовательности $\{\rho_i^q\}$, $i = 1, 2$, равномерно непрерывны по $t \in [0, T]$ со значениями в $W_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}^{-1}(\Omega) = \left(W_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}^1(\Omega)\right)^*$ (верхний индекс * означает сопряжение). Тогда благодаря (3.1) приходим (см. [6], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

$$(3.10) \quad \rho_i^q \rightarrow \rho_i \quad \text{при } q \rightarrow +\infty \text{ в } C([0, T]; L_{\gamma, \text{weak}}(\Omega)), \quad i = 1, 2.$$

Далее, т. к. имеют место вложения

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\sigma_{10}}(\Omega) \hookrightarrow W_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}^{-1}(\Omega) \quad \text{при всех } \sigma_{10} \in \left[\frac{6\gamma}{5\gamma+3}, 6\right),$$

последовательности $\{\rho_i^q\}$ ограничены в $L_\infty(0, T; L_{\sigma_{10}}(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ (ввиду (1.33)), а $\left\{\frac{\partial \rho_i^q}{\partial t}\right\}$ ограничены в $L_2(0, T; W_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем по теореме Лионса—Обена (см. [6], Теорема 1.71, стр. 59), что при $q \rightarrow +\infty$

$$(3.11) \quad \rho_i^q \rightarrow \rho_i \quad \text{сильно в } L_{\sigma_{11}}(0, T; L_{\sigma_{10}}(\Omega)) \quad \forall \sigma_{11} < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Теперь, используя (3.3), получаем

$$(3.12) \quad \rho_i^q \rightarrow \rho_i \quad \text{при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{12}}(0, T; L_{\sigma_{13}}(\Omega)), \quad i = 1, 2$$

для всех $\sigma_{12} < \frac{\gamma}{\sigma_8}$, $\sigma_{13} < \frac{3\gamma}{3-2\sigma_8}$. Выбирая в (3.9) любые σ_8, σ_9 , после выбора подпоследовательности, мы можем утверждать сходимости

$$(3.13) \quad \rho_i^q \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \mathbf{u}_i \quad * \text{-слабо в пространстве (3.9)}.$$

Теперь, переходя к пределу по $q \rightarrow +\infty$ в слабом смысле в (2.2), получаем, что предельные функции $\mathbf{u}_i, \rho_i, i = 1, 2$, удовлетворяют уравнениям

$$(3.14) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + (\rho_i \mathbf{u}_i - \varepsilon \nabla \rho_i) \cdot \nabla \phi_i \right) dx dt + \int_{\Omega} \rho_{0i}^\delta \phi_i|_{t=0} dx = 0$$

$$\forall \phi_i \in C_0^1([0, T]; C^\infty(\bar{\Omega})), \quad i = 1, 2.$$

Докажем, что предельные функции $\mathbf{u}_i, \rho_i, i = 1, 2$ удовлетворяют п. в. уравнениям, начальным и граничным условиям (2.2)–(2.4). Из классических оценок

решений параболических уравнений (см. [6], Лемма 7.38, стр. 344), получаем (ввиду (1.33)) равномерные по q и ε оценки

$$(3.15) \quad \varepsilon \|\nabla \rho_i^q\|_{L_{\sigma_{14}}(0,T;L_{\sigma_{15}}(\Omega))} \leq B_{22}(B_{20}, \{\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_\gamma(\Omega)}\}, \sigma_8, \sigma_9, \gamma, \Omega), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\sigma_{14} = \frac{2\gamma}{\sigma_9\gamma + \sigma_8 + \sigma_9}, \quad \sigma_{15} = \frac{6\gamma}{(3 - 2\sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3}$$

при любых $(\sigma_8, \sigma_9) \in [0, 1]^2 \setminus \{0, 0\}$. Тогда при $i = 1, 2$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \varepsilon \|(\nabla \otimes \mathbf{u}_i^q)^* \nabla \rho_i^q\|_{L_{\sigma_{16}}(0,T;L_{\sigma_{17}}(\Omega))} + \varepsilon \|\nabla \otimes (\rho_i^q \mathbf{u}_i^q)\|_{L_{\sigma_{16}}(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega))} \leq \\ & \leq B_{23}(B_{15}, B_{22}, \sigma_8, \sigma_9, T, \gamma, \Omega), \end{aligned}$$

$$\text{где } \sigma_{16} = \frac{2\gamma}{(\sigma_9 + 1)\gamma + \sigma_8 + \sigma_9}, \quad \sigma_{17} = \frac{6\gamma}{2(3 - \sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3},$$

$$\sigma_{18} = \frac{6\gamma}{2(2 - \sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3}, \text{ при любых}$$

$$(3.17) \quad \sigma_8 \in [0, 1], \quad \sigma_9 \in \left(\frac{3 - 2\sigma_8}{2\gamma - 1}, \frac{\gamma - \sigma_8}{\gamma + 1} \right)$$

(эти ограничения обеспечивают $\sigma_{16} > 1$, $\sigma_{17} > 1$, а $\sigma_{18} > 1$ автоматически). Снова обращаясь к классическим оценкам решений параболических уравнений (см. [6], Лемма 7.37, стр. 344), выводим

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^{1 - \frac{1}{\sigma_{16}}} \|\rho_i^q\|_{L_\infty(0,T;W_{\sigma_{18}}^{2 - \frac{2}{\sigma_{16}}}(\Omega))} + \\ & + \left\| \frac{\partial \rho_i^q}{\partial t} \right\|_{L_{\sigma_{16}}(0,T;L_{\sigma_{18}}(\Omega))} + \varepsilon \|\rho_i^q\|_{L_{\sigma_{16}}(0,T;W_{\sigma_{18}}^2(\Omega))} \leq \\ & \leq B_{24}(\sigma_8, \sigma_9, \gamma, \Omega) \left(\varepsilon^{1 - \frac{1}{\sigma_{16}}} \|\rho_{0i}^\delta\|_{W_{\sigma_{18}}^{2 - \frac{2}{\sigma_{16}}}(\Omega)} + \frac{B_{23}}{\varepsilon} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Из (3.16), (3.18) получаем, что предельные функции ρ_i , $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, принадлежат следующим функциональным классам:

$$(3.19) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \in L_{\sigma_{16}}(0, T; L_{\sigma_{18}}(\Omega)), \quad \rho_i \in L_{\sigma_{16}}(0, T; W_{\sigma_{18}}^2(\Omega)),$$

$$\nabla \otimes (\rho_i \mathbf{u}_i) \in L_{\sigma_{16}}(0, T; L_{\sigma_{18}}(\Omega)), \quad i = 1, 2,$$

и удовлетворяют уравнениям (2.2) почти всюду в Q_T . Заметим, что из (3.19) вытекает $\rho_i \in C([0, T]; L_{\sigma_{18}}(\Omega))$, $i = 1, 2$. Из (3.10) следует, что для всех $t \in [0, T]$ $\rho_i^q(t) \rightarrow \rho_i(t)$ при $q \rightarrow +\infty$ слабо в $L_\gamma(\Omega)$, $i = 1, 2$, в частности, при $t = 0$ это позволяет утверждать, что начальные условия (2.4) выполняются п. в. в Ω и для предельных функций. Из (3.18) заключаем, что для п. в. $t \in (0, T)$ верно $\rho_i^q(t) \rightarrow \rho_i(t)$ при $q \rightarrow +\infty$ слабо в $W_{\sigma_{18}}^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\sigma_{19}}^1(\partial\Omega) \forall \sigma_{19} < \frac{2\sigma_{18}}{3 - \sigma_{18}}$, $i = 1, 2$, а т. к. граничное условие (2.3) выполняется для ρ_i^q , $i = 1, 2$, то $\nabla \rho_i \cdot \mathbf{n} = 0$ для п. в. $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \partial\Omega$, $i = 1, 2$.

3.2. Пределный переход в приближенных уравнениях импульсов.

Следующим этапом является предельный переход в (2.15) по $q \rightarrow +\infty$. Взяв в (2.15) для всех $q \in \mathbb{N}$ в качестве пробных функций $\varphi_i = \chi_i \omega_i$, $i = 1, 2$, где $\chi_i \in C_0^1[0, T)$, $\omega_i \in X_q$, $i = 1, 2$, получим для п. в. $t \in (0, T)$ и всех $i = 1, 2$ равенства

$$(3.20) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho_i^q \mathbf{u}_i^q)}{\partial t} \cdot \omega_i dx = \int_{\Omega} \left(-\mathbb{S}_i^q : (\nabla \otimes \omega_i) + p_{ei}(\rho_i^q) \operatorname{div} \omega_i + \right. \\ \left. + \theta^q p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \omega_i + (\rho_i^q \mathbf{u}_i^q \otimes \mathbf{u}_i^q) : (\nabla \otimes \omega_i) - \varepsilon((\nabla \otimes \mathbf{u}_i^q) \omega_i) \cdot \nabla \rho_i^q + \right. \\ \left. + (J_i^q + \rho_i^q \mathbf{f}_i) \cdot \omega_i \right) dx =: \sum_{k=1}^6 \langle I_{ik}^q, \omega_i \rangle.$$

Из оценок (2.16), (3.1), (3.2), (3.3), (3.9) и (3.16) следует, что для всех $i = 1, 2$ величины I_{ik}^q , $k = 1, \dots, 6$ ограничены равномерно по q соответственно в пространствах $L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$, $L_{\frac{1}{\sigma_8}}(0, T; W_{\frac{3}{3-2\sigma_8}}^{-1}(\Omega))$, $L_{\frac{3}{\sigma_8+1}}(0, T; W_{\frac{9}{6-2\sigma_8}}^{-1}(\Omega))$, $L_{\sigma_{16}}(0, T; W_{\sigma_{18}}^{-1}(\Omega))$, $L_{\sigma_{16}}(0, T; L_{\sigma_{17}}(\Omega)) \hookrightarrow L_{\sigma_{16}}(0, T; W_{\frac{3\sigma_{17}}{3-\sigma_{17}}}^{-1}(\Omega))$ и $L_2(Q_T) \hookrightarrow L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$. В результате, приходим к равномерной по q ограниченности $\frac{\partial(\rho_i^q \mathbf{u}_i^q)}{\partial t}$, $i = 1, 2$ в пространстве $L_{\sigma_{20}}(0, T; W_{\sigma_{21}}^{-1}(\Omega))$, где

$$(3.21) \quad \sigma_{20} = \min \left\{ \frac{1}{\sigma_8}, \frac{3}{\sigma_8 + 1}, \sigma_{16} \right\}, \\ \sigma_{21} = \min \left\{ 2, \frac{3}{3-2\sigma_8}, \frac{9}{6-2\sigma_8}, \sigma_{18}, \frac{3\sigma_{17}}{3-\sigma_{17}} \right\}.$$

Поскольку имеют место вложения $W_{\sigma_{18}}^{-1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\sigma_{22}}(\Omega) \hookrightarrow W_1^{-1}(\Omega)$ при всех $\sigma_{22} \in \left[1, \frac{3\sigma_{18}}{3-\sigma_{18}}\right)$, последовательности $\{\rho_i^q \mathbf{u}_i^q\}$ ограничены в $L_{\sigma_{16}}(0, T; W_{\sigma_{18}}^{-1}(\Omega))$, а $\left\{\frac{\partial(\rho_i^q \mathbf{u}_i^q)}{\partial t}\right\}$ ограничены в $L_1(0, T; W_1^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем по теореме Лионса—Обена, что

$$\rho_i^q \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \mathbf{u}_i \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{23}}(0, T; L_{\sigma_{22}}(\Omega)), \quad i = 1, 2,$$

при всех $\sigma_{23} \in [1, \sigma_{16})$. Привлекая оценку (3.9), получаем

$$(3.22) \quad \rho_i^q \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \mathbf{u}_i \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{24}}(0, T; L_{\sigma_{25}}(\Omega)), \quad i = 1, 2,$$

где

$$1 \leq \sigma_{24} < \frac{2\gamma}{(\sigma_9 + \sigma_{26})\gamma + \sigma_8 + \sigma_9}, \\ 1 \leq \sigma_{25} < \frac{6\gamma}{(2 - \sigma_{26} - 2\sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3} \quad \forall \sigma_{26} \in (0, 1].$$

Теперь в силу (3.8) заключаем, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(3.23) \quad \rho_i^q \mathbf{u}_i^q \otimes \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \text{ слабо в } L_{\sigma_{27}}(0, T; L_{\sigma_{28}}(\Omega)), \quad i = 1, 2,$$

где $\sigma_{27} < \frac{2\gamma}{(\sigma_9 + \sigma_{26} + 1)\gamma + \sigma_8 + \sigma_9}$, $\sigma_{28} < \frac{6\gamma}{(3 - \sigma_{26} - 2\sigma_9)\gamma + \sigma_9 - 2\sigma_8 + 3}$, причем можно считать, что $\sigma_{28} > 1$ ввиду уже введенных условий, а $\sigma_{27} > 1$ при выполнении неравенства $\sigma_{26} < 1 - \sigma_9 - \frac{\sigma_8 + \sigma_9}{\gamma}$, правая часть которого положительна ввиду (3.17).

Докажем теперь сильную сходимость градиентов плотностей в $L_2(Q_T)$. Из (2.2)–(2.4) следуют при $i = 1, 2$ равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\rho_i^q(t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \varepsilon \int_0^T (T-t) \|\nabla \rho_i^q(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt = \\ (3.24) \quad & = \frac{T}{2} \|\rho_{0i}^\delta\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T (T-t) \int_{\Omega} (\rho_i^q)^2(t) \operatorname{div} \mathbf{u}_i^q(t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

С другой стороны, при $i = 1, 2$ имеют место аналогичные тождества для предельных функций

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\rho_i(t)\|_{L_2(Q_T)}^2 + \varepsilon \int_0^T (T-t) \|\nabla \rho_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt = \\ (3.25) \quad & = \frac{T}{2} \|\rho_{0i}^\delta\|_{L_2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T (T-t) \int_{\Omega} \rho_i^2(t) \operatorname{div} \mathbf{u}_i(t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (3.24) при $q \rightarrow +\infty$, используя (3.8), (3.12), и вычитая из получившихся тождеств (3.25), приходим к соотношениям

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^T (T-t) \|\nabla \rho_i^q(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T (T-t) \|\nabla \rho_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, \quad i = 1, 2.$$

Эти равенства вместе с (3.7) и (3.15) (ввиду (3.17) $\sigma_{14} > 2$, $\sigma_{15} > 2$) доказывают, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(3.26) \quad \nabla \rho_i^q \rightarrow \nabla \rho_i \text{ сильно в } L_2(Q_T), \quad i = 1, 2,$$

а значит, снова благодаря (3.15), $\nabla \rho_i^q \rightarrow \nabla \rho_i$ сильно в $L_{\sigma_{29}}(0, T; L_{\sigma_{30}}(\Omega))$ при всех $\sigma_{29} \in (2, \sigma_{14})$, $\sigma_{30} \in (2, \sigma_{15})$, $i = 1, 2$. Отсюда, используя (3.8), получаем также, что при $q \rightarrow +\infty$ для всех $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & (\nabla \otimes \mathbf{u}_i^q)^* \nabla \rho_i^q \rightarrow (\nabla \otimes \mathbf{u}_i)^* \nabla \rho_i \text{ слабо в } L_{\sigma_{31}}(0, T; L_{\sigma_{32}}(\Omega)) \\ (3.27) \quad & \forall \sigma_{31} \in \left(1, \frac{2\sigma_{14}}{2 + \sigma_{14}}\right), \sigma_{32} \in \left(1, \frac{2\sigma_{15}}{2 + \sigma_{15}}\right). \end{aligned}$$

Далее, докажем сходимость температуры. Сначала, действуя аналогично выводу (2.17) и (2.18), из (2.16) выводим, что

$$(3.28) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_i^q + v) Q_i(\theta^q) d\mathbf{x} + \delta \int_{Q_T} (\theta^q)^{m+1} d\mathbf{x} dt + \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta^q) d\sigma dt \leq B_{25}(\arg B_{12}),$$

откуда получаем (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же), что при $q \rightarrow +\infty$

$$(3.29) \quad \theta^q \rightarrow \theta \text{ слабо в } L_{m+1}(Q_T).$$

Теперь предельный переход в уравнениях (2.15) по $q \rightarrow +\infty$ становится тривиальным. Действительно, умножая (3.20) на $\chi_i \in C_0^1[0, T]$ и интегрируя по $[0, T]$, находим

$$(3.30) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i^q \mathbf{u}_i^q \cdot \frac{\partial(\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t} + (\rho_i^q \mathbf{u}_i^q \otimes \mathbf{u}_i^q) : (\nabla \otimes (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)) + p_{ei}(\rho_i^q) \operatorname{div}(\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) + \right. \\ \left. + \theta^q p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div}(\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{J}_i^q \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) + \rho_i^q \mathbf{f}_i \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) d\mathbf{x} dt = \\ = \int_{Q_T} \left(\varepsilon((\nabla \otimes \mathbf{u}_i^q) \chi_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \nabla \rho_i^q + \mathbb{S}_i^q : (\nabla \otimes (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)) \right) d\mathbf{x} dt - \\ - \int_{\Omega} \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\omega}_i \in X_{q_0} \quad \forall q_0 \leq q, \quad i = 1, 2.$$

Переход к пределу в первом слагаемом в левой части (3.30) осуществляется благодаря (3.13), во втором — (3.23), третьем — (1.32), (3.12) (при $\sigma_8 \in (0, 1)$), четвертом — (1.32), (3.3), (3.12), (3.29), пятом — (3.8), шестом — (3.12), в первом слагаемом в правой части (3.30) переход возможен благодаря (3.27), во втором — (3.8). В результате предельного перехода получаем, что предельные функции ρ_i , $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, θ удовлетворяют аналогу (3.30) при всех $\boldsymbol{\omega}_i \in X_{q_0}$, $\forall q_0 \in \mathbb{N}$, $\chi_i \in C_0^1[0, T]$, $i = 1, 2$, который мы запишем в следующем виде:

$$(3.31) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial(\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t} - (\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i)) \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) - \nabla p_i(\rho_i, \theta) \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) + \right. \\ \left. + (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) d\mathbf{x} dt = \int_{Q_T} \left(\varepsilon((\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \chi_i \boldsymbol{\omega}_i) \cdot \nabla \rho_i - \right. \\ \left. - (\operatorname{div} \mathbb{S}_i) \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega} \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \cdot (\chi_i \boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0} d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2,$$

где интегралы от обобщенных функций понимаются как их действия на соответствующие регулярные сомножители. Поскольку (при $\sigma_8 < 1$) все сомножители при ω_i в (3.31) принадлежат пространству $L_1(0, T; W_{\sigma_{33}}^{-1}(\Omega))$ (а последний принадлежит $L_\infty(\Omega)$), где

$$\sigma_{33} = \min \left\{ \sigma_{28}, \frac{\sigma_{13}}{\gamma}, \frac{6\sigma_{13}}{\sigma_{13} + 2\gamma}, \frac{3\sigma_{32}}{3 - \sigma_{32}}, 2 \right\},$$

то формула (3.31) остается справедливой и если заменить ω_i на произвольные функции $\tilde{\omega}_i \in W_{\sigma_{33}}^1(\Omega)$ (здесь и далее штрих у показателя означает сопряжение по Лебегу).

Ввиду (3.9) с $\sigma_8 = \sigma_9 = 0$ и вышеупомянутой ограниченности $\frac{\partial(\rho_i^q \mathbf{u}_i^q)}{\partial t}$ в пространстве $L_{\sigma_{20}}(0, T; W_{\sigma_{21}}^{-1}(\Omega))$ можно считать (см. [6], Лемма 6.2, стр. 301), что $\rho_i^q \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \mathbf{u}_i$ в $C([0, T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \text{weak}}(\Omega))$, $i = 1, 2$, т. е. $\rho_i \mathbf{u}_i \in C([0, T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \text{weak}}(\Omega))$, $i = 1, 2$ и принимают значения $\rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i}$, $i = 1, 2$ в смысле этого пространства. Поэтому (3.31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[-\frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} \cdot (\chi_i \tilde{\omega}_i) - (\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i)) \cdot (\chi_i \tilde{\omega}_i) - \nabla p_i(\rho_i, \theta) \cdot (\chi_i \tilde{\omega}_i) + \right. \\ \left. + (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) \cdot (\chi_i \tilde{\omega}_i) \right] d\mathbf{x} dt = \int_{Q_T} \left(\varepsilon((\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \chi_i \tilde{\omega}_i) \cdot \nabla \rho_i - \right. \\ \left. - (\operatorname{div} \mathbb{S}_i) \cdot (\chi_i \tilde{\omega}_i) \right) d\mathbf{x} dt, \quad \tilde{\omega}_i \in W_{\sigma_{33}}^1(\Omega), \quad \chi_i \in C_0^1[0, T], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что интегральные тождества (2.15) (для предельных функций) справедливы для всех $\varphi_i \in C_0^1([0, T]; C_0^1(\Omega))$, $i = 1, 2$. Отметим, что (см. [6], Упражнение 6.3, стр. 302) существуют векторные поля $\mathbf{q}_i \in C([0, T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \text{weak}}(\Omega))$, $i = 1, 2$, такие, что для п. в. $t \in (0, T)$ имеют место равенства $\mathbf{q}_i(t) = \rho_i(t) \mathbf{u}_i(t)$ п. в. в Ω , $i = 1, 2$. Тогда (см. [6], Лемма 7.17, стр. 321), в результате изменения поля скоростей $\mathbf{u}_i$ каждой составляющей смеси на множестве нулевой меры в $(0, T)$, получаем

$$(3.32) \quad \rho_i \mathbf{u}_i \in C([0, T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \text{weak}}(\Omega)), \quad i = 1, 2.$$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО $q \rightarrow +\infty$ В ПРИБЛИЖЕННОМ УРАВНЕНИИ ЭНЕРГИИ

4.1. **Оценки тепловых энергий.** Умножая (2.6) на $\frac{1}{1 + \theta^q}$ и интегрируя результат по Q_t , приходим к равенству

$$\begin{aligned} (4.1) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_i^q + v) \left(\int_0^{\theta^q} \frac{c_{\theta i}(z)}{1+z} dz \right) d\mathbf{x} + \delta \int_{Q_t} \frac{(\theta^q)^{m+1}}{1 + \theta^q} d\mathbf{x} d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta^q)}{1 + \theta^q} d\sigma d\tau = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_{0i}^\delta + v) \left(\int_0^{\theta_0^\delta} \frac{c_{\theta i}(z)}{1+z} dz \right) d\mathbf{x} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{Q_t} \frac{k(\theta^q) |\nabla \theta^q|^2}{(1 + \theta^q)^2} d\mathbf{x} d\tau + (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \frac{\mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i^q)}{1 + \theta^q} d\mathbf{x} d\tau + \\
& + a \int_{Q_t} \frac{|\mathbf{u}_1^q - \mathbf{u}_2^q|^2}{1 + \theta^q} d\mathbf{x} d\tau - \int_{Q_t} \frac{\theta^q}{1 + \theta^q} \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \mathbf{u}_i^q d\mathbf{x} d\tau - \\
& - \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \frac{Q_i(\theta^q)}{(1 + \theta^q)^2} \nabla \rho_i^q \cdot \nabla \theta^q d\mathbf{x} d\tau + \int_{Q_t} \frac{\rho^q g^\delta}{1 + \theta^q} d\mathbf{x} d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Поскольку все слагаемые в правой части (4.1) кроме двух последних неотрицательны, то с учетом (1.34) и (3.28) получаем, что

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad & \frac{1}{c_5} \int_{Q_T} \frac{(1 + (\theta^q)^m) |\nabla \theta^q|^2}{(1 + \theta^q)^2} d\mathbf{x} dt \leq \int_{Q_T} \frac{\theta^q}{1 + \theta^q} \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) |\operatorname{div} \mathbf{u}_i^q| d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \frac{Q_i(\theta^q)}{(1 + \theta^q)^2} |\nabla \rho_i^q| |\nabla \theta^q| d\mathbf{x} + B_{25},
\end{aligned}$$

откуда, ввиду (1.32), (1.35), (3.1), (3.2) и (3.5), следует оценка⁷

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & \|\nabla \theta^q\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \nabla \left((\theta^q)^{\frac{m}{2}} \right) \right\|_{L_2(Q_T)} \leq \\
& \leq B_{26} (B_{14}, B_{15}, B_{19}, B_{25}, c_4, c_5, c_6, m, T, \gamma, |\Omega|).
\end{aligned}$$

Следовательно (см. (3.28)),

$$(4.4) \quad \|Q_i(\theta^q)\|_{L_2(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq B_{27} (B_{25}, B_{26}, c_6, m, T, \delta, |\Omega|), \quad i = 1, 2.$$

4.2. Сильная сходимость последовательности температур. Докажем, что

$$(4.5) \quad \theta^q \rightarrow \theta \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{34}}(Q_T)$$

при всех $\sigma_{34} < m + 1$. Для этого можно предложить два способа:

- (1) иметь дело с уравнением энергии в форме соотношения для тепловой энергии (реализовано в разделе 4.3);
- (2) перейти к уравнению для температуры (реализовано в разделе 4.4).

Первый способ⁸ означает работу с уравнением (2.6). В общем случае (произвольных $c_{\theta i}$) это приводит к непреодолимым трудностям при выводе аналога соотношения (4.10), и работает только для линейно зависящих $c_{\theta i}$. С другой стороны, второй способ, хотя и не требует линейной зависимости $c_{\theta i}$, но вызывает более громоздкую работу с уравнением в форме (4.18) и налагает дополнительные ограничения (4.19).

⁷В дальнейшем при ссылке на формулу (4.3) и ее аналоги, возникающие в процессе следующих предельных переходов, подразумевается оценка в пространстве $L_m(0, T; L_{3m}(\Omega))$.

⁸Именно так делается в случае однокомпонентной среды [1].

Замечание 8. В процессе предельного перехода $q \rightarrow +\infty$ мы имеем возможность выбирать любой из двух предложенных способов. В дальнейшем, в процессе предельного перехода $\varepsilon \rightarrow +0$, будет наложено ограничение (4.9), и тем самым в требованиях (4.19) нет необходимости. Тем самым мы возвращаемся в рамки исходных требований на t наложенных в (1.34).

В результате, реализуя тот или иной вариант, мы приходим к (4.5).

4.3. Вывод сильной сходимости температур при помощи уравнения для Q_i и в предположении, что $c_{\theta i} = k_i c_\theta$. Из (4.4) следуют следующие сходимости при $q \rightarrow +\infty$:

$$(4.6) \quad Q_i(\theta^q) \rightarrow \overline{Q_i(\theta)} \text{ слабо в } L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad i = 1, 2$$

($\overline{Q_i(\theta)}$, $i = 1, 2$ обозначают слабые пределы последовательностей $Q_i(\theta^q)$, $i = 1, 2$ в пространстве $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$). Привлекая (3.1), (3.12) и (4.4), тогда получаем при $i = 1, 2$, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.7) \quad \rho_i^q Q_i(\theta^q) \rightarrow \rho_i \overline{Q_i(\theta)} \text{ слабо в } L_2(0, T; L_{\sigma_{35}}(\Omega)) \quad \forall \sigma_{35} \leq \frac{6\gamma}{6+\gamma}.$$

Далее, из уравнения энергии (2.6) следует, что $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) Q_i(\theta^q)$ равномерно по q ограничены в пространстве $L_1(0, T; W_{\frac{3}{2}}^{-3}(\Omega))$. Поэтому, из (3.28), (4.6), (4.7) и Леммы 6.3, стр. 131 из [1] при $\sigma_{35} > \frac{6}{5}$ имеем при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) Q_i(\theta^q) \rightarrow \sum_{i=1}^2 (\rho_i + v) \overline{Q_i(\theta)} \text{ сильно в } L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)).$$

В дополнение к (1.35) примем, что

$$(4.9) \quad c_{\theta i}(z) = k_i c_\theta(z), \text{ где } k_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2,$$

а функция c_θ обладает теми же свойствами, что и $c_{\theta i}$ (см. (1.35)). Тогда из (4.6) и (4.8) следует, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.10) \quad |Q(\theta^q)|^2 \sum_{i=1}^2 k_i (\rho_i^q + v) \rightarrow |\overline{Q(\theta)}|^2 \sum_{i=1}^2 k_i (\rho_i + v) \text{ в } D'((0, T) \times \Omega),$$

где

$$(4.11) \quad Q(\theta) = \int_0^\theta c_\theta(z) dz,$$

а $\overline{Q(\theta)}$ — это слабый предел $Q(\theta^q)$ в пространстве $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ (отметим, что $\overline{Q_i(\theta)} = k_i \overline{Q(\theta)}$, $i = 1, 2$). С другой стороны, поскольку очевидно

$$\sqrt{\rho_i^q} \rightarrow \sqrt{\rho_i} \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_2(Q_T), \quad i = 1, 2,$$

то

$$\sqrt{\rho_i^q} Q_i(\theta^q) \rightarrow \sqrt{\rho_i} \overline{Q_i(\theta)} \text{ слабо в } L_1(Q_T), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому, и из того, что $\sqrt{\rho_i^q} Q_i(\theta^q)$, $i = 1, 2$ равномерно по q ограничены в пространстве $L_2(0, T; L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega))$, получаем сходимости

$$(4.12) \quad \sqrt{\rho_i^q} Q_i(\theta^q) \rightarrow \sqrt{\rho_i \overline{Q_i(\theta)}} \text{ слабо в } L_2(Q_T), \quad i = 1, 2$$

и вследствие чего оценки

$$(4.13) \quad \int_{Q_T} \rho_i |\overline{Q_i(\theta)}|^2 d\mathbf{x}dt \leq \liminf_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \rho_i^q |Q_i(\theta^q)|^2 d\mathbf{x}dt, \quad i = 1, 2.$$

Можно и иначе (аналогично выводу неравенства (7.65) на стр. 170 в [1]) получить оценки (4.13). Поскольку функция

$$\Phi(z, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{z}, & z > 0, \\ 0, & z = s = 0, \\ +\infty, & z \leq 0, \quad s \neq 0 \end{cases}$$

является выпуклой и полунепрерывной снизу, то применяя (3.12), (4.7) и Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] с $O = Q_T$, $M = 3$, $N = 2$, $n = q$, $\mathbf{v}_n = ((\rho_i^q + \omega), (\rho_i^q + \omega) Q_i(\theta^q))$, $\mathbf{v} = ((\rho_i + \omega), (\rho_i + \omega) \overline{Q_i(\theta)}) = (z, s)$, $\omega > 0$ получаем, что

$$(4.14) \quad \int_{Q_T} \rho_i |\overline{Q_i(\theta)}|^2 d\mathbf{x}dt \leq \liminf_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} (\rho_i^q + \omega) |Q_i(\theta^q)|^2 d\mathbf{x}dt \quad \forall \omega > 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда очевидно следует (4.13).

Таким образом, соотношения (4.13) вместе с (4.10) дают

$$(4.15) \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} |Q(\theta^q)|^2 d\mathbf{x}dt = \int_{Q_T} |\overline{Q(\theta)}|^2 d\mathbf{x}dt,$$

откуда мы можем сделать вывод о том, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.16) \quad Q(\theta^q) \rightarrow \overline{Q(\theta)} \text{ сильно в } L_2(Q_T).$$

Значит в силу (1.35)

$$(4.17) \quad \begin{aligned} & \lim_{q_1, q_2 \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} |\theta^{q_1} - \theta^{q_2}|^2 d\mathbf{x}dt \leq \\ & \leq c_6 \lim_{q_1, q_2 \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} (Q(\theta^{q_1}) - Q(\theta^{q_2}))(\theta^{q_1} - \theta^{q_2}) d\mathbf{x}dt = 0, \end{aligned}$$

что с учетом (3.28) дает (4.5).

4.4. **Вывод сильной сходимости температур при помощи уравнения для θ для общих $c_{\theta i}$, но с повышенными требованиями на m .** Перепишем уравнение энергии (2.6) в виде

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \theta^q}{\partial t} = & \frac{1}{\sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) c_{\theta i}(\theta^q)} \left[-\varepsilon \sum_{i=1}^2 Q_i(\theta^q) \Delta \rho_i^q - \sum_{i=1}^2 \rho_i^q c_{\theta i}(\theta^q) \mathbf{u}_i^q \nabla \theta^q + \right. \\ & + \operatorname{div} (k(\theta^q) \nabla \theta^q) - \theta^q \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \mathbf{u}_i^q - \delta(\theta^q)^{m+1} + \\ & \left. + (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i^q) + a |\mathbf{u}_1^q - \mathbf{u}_2^q|^2 + \rho^q g^\delta \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{div} (k(\theta^q) \nabla \theta^q)}{\sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) c_{\theta i}(\theta^q)} &= \operatorname{div} \left(\frac{k(\theta^q) \nabla \theta^q}{\sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) c_{\theta i}(\theta^q)} \right) + \\ &+ \frac{k(\theta^q) \nabla \theta^q \sum_{i=1}^2 ((\nabla \rho_i^q) c_{\theta i}(\theta^q) + (\rho_i^q + v) c'_{\theta i}(\theta^q) \nabla \theta^q)}{\left(\sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) c_{\theta i}(\theta^q) \right)^2}. \end{aligned}$$

В силу (1.32), (1.33), (1.34), (1.35), (1.40), (2.10), (3.1), (3.2), (3.17), (3.18), (3.28), (4.3) и дополнительных ограничений^{9,10}

$$(4.19) \quad m \geq 27, \quad |c'_{\theta i}(z)| \leq c_7(1 + z^{m-4}), \quad i = 1, 2, \quad c_7 = \operatorname{const} > 0,$$

правая часть (4.18) равномерно по q ограничена в пространстве $L_1(0, T; W_1^{-1}(\Omega))$. Поскольку имеют место вложения

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\sigma_{36}}(\Omega) \hookrightarrow W_1^{-1}(\Omega) \quad \text{при всех } \sigma_{36} \in [1, 6),$$

последовательность $\{\theta^q\}$ ограничена в $L_{m+1}(0, T; L_{\sigma_{36}}(\Omega)) \cap L_1(0, T; W_2^1(\Omega))$ (см. (3.28), (4.3)), а $\left\{ \frac{\partial \theta^q}{\partial t} \right\}$ ограничена в $L_1(0, T; W_1^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же, получаем по теореме

⁹Наиболее жесткое ограничение на m возникает в процессе предельного перехода в слабом, содержащем $(\theta^q)^{\frac{m}{2}+1} \nabla \theta^q \cdot \nabla \rho_i^q$. А именно, требуется $\frac{6}{2\gamma-1} + \frac{12}{m} < 1$. Если не ужесточать требования на γ по сравнению с (1.33), то это означает $m > \frac{132}{5}$.

¹⁰Можно потребовать $\frac{1}{c_6} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) z^{\frac{m}{2}-2} \leq c'_{\theta i}(z) \leq c_6 \left(\frac{m}{2} - 1 \right) z^{\frac{m}{2}-2}$, $\frac{1}{c_6} \leq c_{\theta i}(0) \leq c_6$, тогда (1.35)₂ следует автоматически, но недостаток этого подхода в том, что налагается дополнительное ненужное требование монотонности $c_{\theta i}$.

Лионса—Обена, что

$$(4.20) \quad \theta^q \rightarrow \theta \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{37}}(0, T; L_{\sigma_{36}}(\Omega)) \quad \forall 1 \leq \sigma_{37} < m + 1,$$

откуда и из (3.28) следует (4.5).

4.5. Ренормализованное уравнение энергии. Рассмотрим произвольную регуляризирующую функцию $\hat{h}$ такую, что¹¹

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \hat{h} &\in C^2[0, +\infty), \quad \hat{h}(0) > 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \hat{h}(z) = 0, \quad \hat{h}'(z) \leq 0, \\ \hat{h}''(z)\hat{h}(z) &\geq 2 \left(\hat{h}'(z) \right)^2 \quad \forall z \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(4.22) \quad 0 \leq -\hat{h}'(z) < \frac{\hat{h}(0) - B_{28}\hat{h}'(0)}{z + B_{28}} \quad \text{при всех } z \geq 0 \text{ и } B_{28} \geq 0,$$

т. к. $((z + B_{28})\hat{h}'(z))' \geq \hat{h}'(z)$. В частности, $z\hat{h}'(z) > -\hat{h}(0)$.

Умножив уравнение (2.6) на $\hat{h}(\theta)$, получим так называемое ренормализованное уравнение энергии (см. раздел 4.3.3, стр. 78 в [1])

$$(4.23) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 (\rho_i^q + v) \hat{Q}_i(\theta^q) + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i^q \hat{Q}_i(\theta^q) \mathbf{u}_i^q \right) - \Delta \hat{\mathcal{K}}(\theta^q) + \\ &+ \delta \hat{h}(\theta^q) (\theta^q)^{m+1} = (1 - \delta) \hat{h}(\theta^q) \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i^q) + a \hat{h}(\theta^q) |\mathbf{u}_1^q - \mathbf{u}_2^q|^2 + \\ &+ \hat{h}(\theta^q) \rho^q g^\delta - \theta^q \hat{h}(\theta^q) \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \mathbf{u}_i^q - \\ &- k(\theta^q) \hat{h}'(\theta^q) |\nabla \theta^q|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \Delta \rho_i^q \left(\hat{Q}_i(\theta^q) - \hat{h}(\theta^q) Q_i(\theta^q) \right), \end{aligned}$$

где

$$(4.24) \quad \hat{Q}_i(\theta^q) = \int_0^{\theta^q} \hat{h}(z) c_{\theta i}(z) dz, \quad i = 1, 2, \quad \hat{\mathcal{K}}(\theta^q) = \int_0^{\theta^q} \hat{h}(z) k(z) dz.$$

Теперь умножим уравнение (4.23) на тестовую функцию ψ такую, что

$$(4.25) \quad \psi \in C^2(\overline{Q}_T), \quad \psi \geq 0, \quad \psi(T, \cdot) = 0, \quad \nabla \psi \cdot \mathbf{n}|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0$$

¹¹Например, можно взять $\hat{h} = \frac{c_8}{1 + \varphi}$ с любыми $c_8 > 0$ и $\varphi \in C^2[0, +\infty)$ такой, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi' \geq 0$, $\varphi'' \leq 0$, $\varphi(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow +\infty$.

и проинтегрируем результат по Q_T , получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} (\rho_i^q + v) \widehat{Q}_i(\theta^q) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \rho_i^q \widehat{Q}_i(\theta^q) \mathbf{u}_i^q \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} dt + \\
 & + \int_{Q_T} \widehat{\mathcal{K}}(\theta^q) \Delta \psi d\mathbf{x} dt - \delta \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) (\theta^q)^{m+1} \psi d\mathbf{x} dt = \\
 & = (\delta - 1) \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i^q) \right) \psi d\mathbf{x} dt - \\
 (4.26) \quad & - \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) \rho^q g^\delta \psi d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \theta^q \widehat{h}(\theta^q) \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) (\operatorname{div} \mathbf{u}_i^q) \psi d\mathbf{x} dt + \\
 & + \int_{Q_T} k(\theta^q) \widehat{h}'(\theta^q) |\nabla \theta^q|^2 \psi d\mathbf{x} dt - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_{0i}^\delta + v) \widehat{Q}_i(\theta_0^\delta) \psi|_{t=0} d\mathbf{x} + \\
 & + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \widehat{h}(\theta^q) L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta^q) \psi d\sigma dt - a \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) |\mathbf{u}_1^q - \mathbf{u}_2^q|^2 \psi d\mathbf{x} dt + \\
 & + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \nabla \rho_i^q \cdot \nabla \left(\left(\widehat{Q}_i(\theta^q) - \widehat{h}(\theta^q) Q_i(\theta^q) \right) \psi \right) d\mathbf{x} dt.
 \end{aligned}$$

4.6. Предельный переход в ренормализованном уравнении энергии.

Замечание 9. Переходя далее к пределу (по ε , δ и v), мы будем делать это для конкретных $\widehat{h}$, выделяя соответствующие подпоследовательности решений для каждой из них. Это возможно (используя при необходимости диагональный процесс) сразу для всех необходимых $\widehat{h}$, если они образуют не более чем счетное множество. А именно, мы будем использовать следующие регуляризующие функции:

- $\widehat{h}(z) = \frac{1}{(1+z)^\omega}$, $0 < \omega \leq 1$,
- $\widehat{h}(z) = \frac{1}{z+\omega}$, $0 < \omega \leq 1$.

Пока же, в процессе предельного перехода по q , используются только общие ограничения (4.21).

Перейдем в (4.26) к нижнему пределу при $q \rightarrow +\infty$. Из (4.4), (4.5) и (4.21) следует, что

$$(4.27) \quad \widehat{Q}_i(\theta^q) \rightarrow \widehat{Q}_i(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{38}}(Q_T), \quad i = 1, 2, \quad \forall \sigma_{38} \in [1, 2),$$

а значит в силу (1.35), (3.28) и (4.21)

$$(4.28) \quad \widehat{Q}_i(\theta^q) \rightarrow \widehat{Q}_i(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{39}}(Q_T), \quad i = 1, 2$$

для всех $\sigma_{39} < 2 + \frac{2}{m}$ и, следовательно, из (3.12), (3.13) (при $\sigma_8 = \sigma_9 = \frac{1}{2}$) выводим

$$(4.29) \quad (v + \rho_i^q) \widehat{Q}_i(\theta^q) \rightarrow (v + \rho_i) \widehat{Q}_i(\theta) \text{ сильно в } L_1(Q_T), \quad i = 1, 2,$$

$$\rho_i^q \widehat{Q}_i(\theta^q) \mathbf{u}_i^q \rightarrow \rho_i \widehat{Q}_i(\theta) \mathbf{u}_i \text{ слабо в } L_{\frac{2\sigma_{39}}{\sigma_{39}+2}}(Q_T), \quad i = 1, 2,$$

при условии, что $\sigma_{39} > 2$. Из (1.34), (3.28), (4.5), (4.21) и (4.24) имеем¹² при $q \rightarrow +\infty$, что

$$(4.30) \quad \widehat{K}(\theta^q) \rightarrow \widehat{K}(\theta) \text{ сильно в } L_1(Q_T),$$

$$(4.31) \quad \widehat{h}(\theta^q)(\theta^q)^{m+1} \rightarrow \widehat{h}(\theta)\theta^{m+1} \text{ сильно в } L_1(Q_T).$$

Так как правая часть (1.30) является неотрицательно определенной квадратичной формой от компонент тензоров $\nabla \otimes \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, а функция

$$\Phi(z, s) = \begin{cases} \widehat{h}(z)s^2, & z \geq 0, \\ +\infty, & z < 0 \end{cases}$$

является (нестрого) выпуклой и полунепрерывной снизу (см. (4.21)), то применяя Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и сходимости (3.8), (3.29) (или (4.5)), получаем, что

$$(4.32) \quad \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi \, d\mathbf{x}dt \leq \liminf_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i^q : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i^q) \right) \psi \, d\mathbf{x}dt,$$

$$(4.33) \quad a \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi \, d\mathbf{x}dt \leq a \liminf_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta^q) |\mathbf{u}_1^q - \mathbf{u}_2^q|^2 \psi \, d\mathbf{x}dt.$$

Замечание 10. Неравенство (4.32) можно получить рассматривая полунепрерывную снизу, выпуклую функцию непосредственно от тензорных аргументов

$$\widetilde{\Phi}(z, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) = \begin{cases} \widehat{h}(z) \sum_{i,j=1}^2 (2\mu_{ij} \mathbb{A}_i : \mathbb{A}_j + \lambda_{ij} (\text{tr} \mathbb{A}_i)(\text{tr} \mathbb{A}_j)), & z \geq 0, \\ +\infty, & z < 0. \end{cases}$$

Далее, из (4.5), (4.21) и теоремы Витали (см., например [6], Теорема 1.18, стр. 15) следует, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.34) \quad \widehat{h}(\theta^q) \rightarrow \widehat{h}(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{40}}(Q_T)$$

при всех $\sigma_{40} < +\infty$. Из (3.12) получаем, что

$$(4.35) \quad \rho_i^q \rightarrow \rho_i \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{41}}(Q_T)$$

¹²Функция $\widetilde{\Psi}(z) = z^{m+1} \widehat{h}(z)$ в силу (4.21) является N -функцией, растущей медленнее чем z^{m+1} . Поэтому (3.28) и (4.5) гарантируют (4.31). Аналогично (4.30). Другими словами, работает теорема Витали (см., например [6], Теорема 1.18, стр. 15).

при всех $\sigma_{41} < \frac{5\gamma}{3}$, а значит, в силу (1.32), при $i = 1, 2$ имеем

$$(4.36) \quad p_{\theta i}(\rho_i^q) \rightarrow p_{\theta i}(\rho_i) \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{42}}(Q_T) \quad \forall \sigma_{42} < 5.$$

Тогда, благодаря¹³ (3.8), (4.5), (4.34), (4.35), (4.36), приходим к сходимостям

$$(4.37) \quad \widehat{h}(\theta^q)\rho^q \rightarrow \widehat{h}(\theta)\rho \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_{43}}(Q_T) \text{ при всех } \sigma_{43} < \frac{5\gamma}{3},$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2$,

$$(4.38) \quad \theta^q \widehat{h}(\theta^q) \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i^q) \operatorname{div} \mathbf{u}_i^q \rightarrow \theta \widehat{h}(\theta) \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i$$

при $q \rightarrow +\infty$ слабо в $L_{\sigma_{44}}(Q_T)$

с любым $\sigma_{44} > 1$.

На основании (3.28) и (4.3) из последовательности θ^q может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $q \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$(4.39) \quad \theta^q \rightarrow \theta \text{ слабо в } L_2(0, T; W_2^1(\Omega)).$$

Более того, привлекая (4.5), получаем, что

$$(4.40) \quad \theta^q \rightarrow \theta \text{ сильно в } L_{\sigma_{45}}(0, T; L_{\sigma_{46}}(\partial\Omega)),$$

где

$$\sigma_{45} = \frac{2\sigma_{34}}{\sigma_{34}\sigma_{47} + 2(1 - \sigma_{47})}, \quad \sigma_{46} = \frac{4\sigma_{34}}{\sigma_{34}\sigma_{47} + 6(1 - \sigma_{47})} \quad \forall \sigma_{47} \in [0, 1).$$

Лемма 11. Из оценки граничного интеграла в (3.28), сходимости (4.40) и свойств (2.11), (4.21) следует (для подпоследовательности) сходимость

$$(4.41) \quad \widehat{h}(\theta^q)L^\delta(\cdot, \cdot, \theta^q) \rightarrow \widehat{h}(\theta)L^\delta(\cdot, \cdot, \theta) \text{ при } q \rightarrow +\infty \text{ сильно в } L_1((0, T) \times \partial\Omega).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Витали о сходящейся последовательности. Сходимость $\widehat{h}(\theta^q)L^\delta(\cdot, \cdot, \theta^q) \rightarrow \widehat{h}(\theta)L^\delta(\cdot, \cdot, \theta)$ почти всюду на $(0, T) \times \partial\Omega$ можно (для подпоследовательности) утверждать в силу (4.40) и непрерывности функций L^δ и $\widehat{h}$ (см. (2.11), (4.21)). Для проверки равномерной интегрируемости зададим произвольно $\varepsilon_1 > 0$ и найдем такое $M > 0$, что $\widehat{h}(z) < \frac{\varepsilon_1}{2B_{25}}$ для всех $z > M$. Далее, в силу непрерывности L^δ определена величина $B_{29}(M) = \max_{t \in [0, T], \mathbf{x} \in \partial\Omega, z \leq M} L^\delta(\cdot, \cdot, z)$. Теперь положим $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{2\widehat{h}(0)B_{29}(M)}$. Тогда для любого измеримого множества $E \subset (0, T) \times \partial\Omega$ такого что $\mu(E) < \delta_1$, имеем $\int_E \widehat{h}(\theta^q)L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta^q) d\sigma dt < \varepsilon_1$, как это легко видеть, разбив интеграл на множества где $\theta^q \leq M$ и $\theta^q > M$.

¹³Необходимо также использовать интерполяцию пространств $L_{m+1}(Q_T) \cap L_m(0, T; L_{3m}(\Omega))$ и $L_\infty(0, T; L_3(\Omega)) \cap L_3(0, T; L_9(\Omega))$.

Замечание 12. Возможен другой (вместо Леммы 11) способ доказательства сходимости (4.41). А именно, наложим дополнительные (т. е. сверх (1.45), (1.46)) требования на функцию L :

$$(4.42) \quad L(\cdot, \cdot, z) \leq c_9(1 + z^m) \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

где $c_9 = \text{const} > 0$. Тогда (при условии, например, конструкции в сноске к (2.10), (2.11)) получаем в дополнение к (2.11), что

$$(4.43) \quad L^\delta(\cdot, \cdot, z) \leq B_{30}(c_9)(1 + z^m) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

В результате, благодаря (3.28) и (4.3) имеем ограниченность θ^q в $L_m(0, T, L_{2m}(\partial\Omega))$, что ввиду (4.21), (4.40) и теоремы Витали влечет (4.41).

Ввиду (1.35), (3.26), (4.3), (4.24), (4.5), (4.21), (4.22) получаем, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.44) \quad \begin{aligned} & \nabla \rho_i^q \cdot \nabla \left(\left(\widehat{Q}_i(\theta^q) - \widehat{h}(\theta^q) Q_i(\theta^q) \right) \psi \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \nabla \rho_i \cdot \nabla \left(\left(\widehat{Q}_i(\theta) - \widehat{h}(\theta) Q_i(\theta) \right) \psi \right) \text{ слабо в } L_1(Q_T), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Так как в силу (1.34), (3.28), (4.3) и (4.22) последовательность $\sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q$ равномерно по q ограничена в пространстве $L_{\frac{2(m+1)}{m+2}}(Q_T)$, то при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.45) \quad \sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q \rightarrow \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)}\nabla\theta \text{ слабо в } L_{\frac{2(m+1)}{m+2}}(Q_T).$$

С другой стороны, из (1.34), (4.5) и (4.21) следует, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.46) \quad \sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)} \rightarrow \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)} \text{ п. в. в } Q_T,$$

откуда и из (1.34), (3.28), теоремы Витали приходим к тому, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.47) \quad \sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)} \rightarrow \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)} \text{ сильно в } L_{\sigma_{48}}(Q_T)$$

при любых $\sigma_{48} < \frac{2(m+1)}{m-1}$. Тогда из (4.39), (4.47) получаем, что при $q \rightarrow +\infty$

$$(4.48) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\psi} \sqrt{-\widehat{h}'(\theta^q)k(\theta^q)}\nabla\theta^q \rightarrow \sqrt{\psi} \sqrt{-\widehat{h}'(\theta)k(\theta)}\nabla\theta \\ & \text{слабо в } L_{\sigma_{49}}(Q_T), \quad \forall \sigma_{49} < \frac{m+1}{m}. \end{aligned}$$

Теперь мы готовы воспользоваться Следствием 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и заключить, что

$$(4.49) \quad \int_{Q_T} \left(-\widehat{h}'(\theta) \right) k(\theta) |\nabla\theta|^2 \psi \, d\mathbf{x}dt \leq \liminf_{q \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \left(-\widehat{h}'(\theta^q) \right) k(\theta^q) |\nabla\theta^q|^2 \psi \, d\mathbf{x}dt.$$

Правая, а следовательно и левая части (4.49) (неотрицательны и) конечны в силу того, что для всех остальных слагаемых в (4.26) получены соответствующие

оценки, имеется нужный знак, и совершен предельный переход. В результате перехода в (4.26) к нижнему пределу при $q \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} (\rho_i + v) \widehat{Q}_i(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\mathbf{x} dt + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \rho_i \widehat{Q}_i(\theta) \mathbf{u}_i \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} dt + \\
& + \int_{Q_T} \widehat{\mathcal{K}}(\theta) \Delta \psi d\mathbf{x} dt - \delta \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) \theta^{m+1} \psi d\mathbf{x} dt \leq \\
& \leq (\delta - 1) \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi d\mathbf{x} dt - \\
(4.50) \quad & - a \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi d\mathbf{x} dt - \int_{Q_T} \widehat{h}(\theta) \rho g^\delta \psi d\mathbf{x} dt + \\
& + \int_{Q_T} \theta \widehat{h}(\theta) \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) (\operatorname{div} \mathbf{u}_i) \psi d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} k(\theta) \widehat{h}'(\theta) |\nabla \theta|^2 \psi d\mathbf{x} dt - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\rho_{0i}^\delta + v) \widehat{Q}_i(\theta_0^\delta) \psi|_{t=0} d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \widehat{h}(\theta) L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta) \psi d\sigma dt + \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \nabla \rho_i \cdot \nabla \left(\left(\widehat{Q}_i(\theta) - \widehat{h}(\theta) Q_i(\theta) \right) \psi \right) d\mathbf{x} dt
\end{aligned}$$

для всех функций ψ удовлетворяющих условиям, перечисленным в (4.25).

4.7. Энергетическое неравенство. Последним этапом в разделе 4 является получение энергетического неравенства для предельных функций ρ_i , $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, θ . Для этого возьмем в слабой формулировке (2.6) в качестве пробной функции произвольную $\chi \in C_0^1[0, T)$, а в (2.15) положим $\varphi_i = \chi \mathbf{u}_i^q$, $i = 1, 2$, и получим (с учетом (2.2), (2.3)) после интегрирования и суммирования равенство

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \left(\frac{1}{2} \rho_i^q |\mathbf{u}_i^q|^2 + \rho_i^q P_{ei}(\rho_i^q) + (\rho_i^q + v) Q_i(\theta^q) \right) \frac{d\chi}{dt} d\mathbf{x} dt + \\
(4.51) \quad & + \delta \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \mathbb{S}_i^q : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i^q) \chi d\mathbf{x} dt + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \frac{p_{ei}'(\rho_i^q)}{\rho_i^q} |\nabla \rho_i^q|^2 \chi d\mathbf{x} dt + \\
& + \delta \int_{Q_T} (\theta^q)^{m+1} \chi d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta^q) \chi d\sigma dt = \int_{Q_T} \rho^q g^\delta \chi d\mathbf{x} dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \rho_i^q \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i^q \chi \, d\mathbf{x} \, dt + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}(\rho_{0i}^\delta) + \right. \\
& \left. + (\rho_{0i}^\delta + v) Q_i(\theta_0^\delta) \right) \chi(0) \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\chi(0) = 1$, $\chi \geq 0$. Используя Следствие 2.2, стр. 36 Теоремы 2.11, стр. 34 из [1] и соотношения (1.17), (1.18), (1.32), (1.35), (1.44), (2.10), (3.8), (3.12), (3.22), (3.23), (3.28), (3.29), (4.35), (4.40) и (4.5), в результате перехода к нижнему пределу в (4.51) при $q \rightarrow +\infty$ приходим¹⁴ к энергетическому неравенству

$$\begin{aligned}
(4.52) \quad & - \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \left(\frac{1}{2} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 + \rho_i P_{ei}(\rho_i) + (\rho_i + v) Q_i(\theta) \right) \frac{d\chi}{dt} \, d\mathbf{x} \, dt + \\
& + \delta \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \chi \, d\mathbf{x} \, dt + \delta \int_{Q_T} \theta^{m+1} \chi \, d\mathbf{x} \, dt + \\
& + \int_0^T \int_{\partial\Omega} L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta) \chi \, d\sigma \, dt \leq \int_{Q_T} \rho g^\delta \chi \, d\mathbf{x} \, dt + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i \chi \, d\mathbf{x} \, dt + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}(\rho_{0i}^\delta) + \right. \\
& \left. + (\rho_{0i}^\delta + v) Q_i(\theta_0^\delta) \right) d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

из которого следует¹⁵ неравенство (для п. в. $t \in (0, T)$):

$$\begin{aligned}
(4.53) \quad & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) + (\rho_i + v)(t) Q_i(\theta)(t) \right) d\mathbf{x} + \\
& + \delta \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \, d\mathbf{x} \, d\tau + \delta \int_{Q_t} \theta^{m+1} \, d\mathbf{x} \, d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\partial\Omega} L^\delta(\tau, \mathbf{x}, \theta) \, d\sigma \, d\tau \leq \int_{Q_t} \rho g^\delta \, d\mathbf{x} \, d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i \, d\mathbf{x} \, d\tau +
\end{aligned}$$

¹⁴Для предельного перехода в интеграле, содержащем L^δ , воспользуемся теоремой Фату (см., например, [6], стр. 14). Конечность результата гарантируется знаком и оценками остальных интегралов. Заметим, что при выводе (4.50) предельный переход в граничном интеграле не может быть осуществлен таким же образом, ввиду другого знака перед интегралом.

¹⁵И наоборот, из (4.53) следует (4.52) при дополнительном ограничении $\chi' \leq 0$. Для доказательства достаточно умножить (4.53) на $-\chi'(t)$ и взять $\int_0^T dt$.

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^{\delta} |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^{\delta} P_{ei}(\rho_{0i}^{\delta}) + (\rho_{0i}^{\delta} + \nu) Q_i(\theta_0^{\delta}) \right) d\mathbf{x}.$$

В самом деле, взяв произвольное $\tau \in (0, T)$, положим

$$\chi(t) = \chi^{\omega}(t) := 1 - \int_{-\infty}^t \zeta_{\omega}(s - \tau) ds$$

с $\omega < \min\{\tau, T - \tau\}$ (см. (1.52)) и устремим $\omega \rightarrow +0$, что дает (4.53) при п. в. $t := \tau$.

REFERENCES

- [1] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1080.76001
- [2] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–196. Zbl 1290.35203
- [3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat-conducting fluids*, Izv. Math., **78**:3 (2014), 554–579. Zbl 1359.76244
- [4] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global estimates and solvability of the regularized problem of the three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conductive multfluid*, Sib. Electron Mat. Izv., **16** (2019), 547–590. Zbl 1421.35285
- [5] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Hemisphere, N.Y., 1990.
- [6] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1088.35051
- [7] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995. MR1370661

ALEXANDER EVGENYEVICH MAMONTOV,
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
15, LAVRENT'eva AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: aem@hydro.nsc.ru

DMITRIY ALEXEYEVICH PROKUDIN
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
15, LAVRENT'eva AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: prokudin@hydro.nsc.ru