Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Sidorov, Isomorphisms of semirings of continuous nonnegative functions with max-addition and isomorphisms of lattices of their subalgebras, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2020, Volume 17, 318–337

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.021>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.92.164.108

April 26, 2023, 03:35:22

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 318–337 (2020)

512.556

DOI 10.33048/semi.2020.17.021

06B05, 16S60, 54H99

ИЗОМОРФИЗМЫ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С МАХ-СЛОЖЕНИЕМ И
ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ИХ ПОДАЛГЕБР

В.В. СИДОРОВ

ABSTRACT. Let $\mathbb{R}_+^\vee$ be the semifield with zero of nonnegative real numbers with operations of max-addition and multiplication and $C^\vee(X)$ be the semiring of continuous $\mathbb{R}_+^\vee$ -valued functions on an arbitrary topological space X with pointwise operation max-addition and multiplication. We call a subset $A \subseteq C^\vee(X)$ a subalgebra of the semiring $C^\vee(X)$ if $f \vee g, fg, rf \in A$ for any $f, g \in A$ and $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. For arbitrary topological spaces X and Y , we describe isomorphisms of the lattices of subalgebras (subalgebras with unity) of the semirings $C^\vee(X)$ and $C^\vee(Y)$.

Keywords: semirings of continuous functions, subalgebra, isomorphism, lattice of subalgebras, Hewitt space, max-addition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа продолжает работу [1]. Для замкнутости изложения напомним идейные предпосылки исследования, а также необходимые понятия и результаты в удобной для нас форме.

1.1. Исходные понятия. Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, где $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Нейтральные элементы по сложению и умножению (если они существуют) называются *нулем* и *единицей* и обозначаются через 0 и 1. При наличии нуля дополнительно требуется, чтобы $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in S$. Полукольцо S с нулем и единицей,

SIDOROV, V.V., ISOMORPHISMS OF SEMIRINGS OF CONTINUOUS NONNEGATIVE FUNCTIONS WITH MAX-ADDITION AND ISOMORPHISMS OF LATTICES OF THEIR SUBALGEBRAS.

© 2020 Сидоров В.В.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект №1.5879.2017/8.9).

Поступила 10 ноября 2019 г., опубликована 5 марта 2020 г.

отличное от кольца, называется *полуполем с нулем*, если $\langle S \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ — коммутативная группа. Легко показать, что если S — полуполе с нулем и $a, b \in S \setminus \{0\}$, то $a + b, ab \neq 0$. Алгебраическая структура $\langle S \setminus \{0\}, +, \cdot \rangle$ называется *полуполем*. Множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел и $\mathbb{P}$ положительных действительных чисел с операциями сложения и умножения являются полуполем с нулем и полуполем соответственно.

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ положим $a \vee b = \max\{a, b\}$ и $a \wedge b = \min\{a, b\}$. Если в полуполях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{P}$ заменить обычное сложение на *max-сложение* $\vee$, то получим полуполе с нулем $\mathbb{R}_+^\vee$ и полуполе $\mathbb{P}^\vee$.

Замечание 1. Далее и до конца работы $S = \mathbb{R}_+^\vee$ или $S = \mathbb{P}^\vee$.

Обозначим через $C(X, S)$ *полукольцо непрерывных S -значных функций*, заданных на произвольном топологическом пространстве X , с поточечными операциями *max-сложения* и умножения функций. Положим $C^\vee(X) = C(X, \mathbb{R}_+^\vee)$ и $U^\vee(X) = C(X, \mathbb{P}^\vee)$. Отметим, что $U^\vee(X)$ — полуполе.

Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$ -значных функций на X является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его непустое подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии непустое подмножество $A \subseteq C(X, S)$ назовем *подалгеброй*, если $f \vee g, fg, rf \in A$ для всех $f, g \in A$ и $r \in S$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Обозначим через $\mathbb{A}(C(X, S))$ *решетку подалгебр полукольца $C(X, S)$* по отношению включения $\subseteq$, а через $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ — ее *подрешетку подалгебр с единицей* (строгое включение будем обозначать через $\subset$).

Замечание 2. Легко видеть, что точная нижняя грань произвольного непустого семейства подалгебр $\{A_i\}_{i \in I}$ равна их пересечению $\bigcap_{i \in I} A_i$, а точная верхняя грань состоит из конечных *max-сумм* функций вида $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$, где $f_1, \dots, f_n \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $n \in \mathbb{N}$. Если $S = \mathbb{P}^\vee$, то пересечение $\bigcap_{i \in I} A_i$, возможно, пусто. Поэтому пустое множество $\emptyset$ договоримся считать подалгеброй полуполя $U^\vee(X)$. Очевидно, что подалгебра $\emptyset$ является нулем решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого непустого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus F$ найдется функция $f \in C(X)$ или, что равносильно, $f \in C(X, S)$ такая, что $f(F) = \{a\}$ и $f(x) = b$, где $a \neq b$. Идеал M кольца $C(X)$ называется $\mathbb{R}$ -*идеалом*, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbb{R}$ действительных чисел. Идеалы $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, $x \in X$, называются *фиксированными максимальными идеалами*. Тихоновское пространство X называется *хьюиттовским*, если все $\mathbb{R}$ -идеалы кольца $C(X)$ являются фиксированными максимальными идеалами. Известны следующие характеристики (см. [2]): топологическое пространство является тихоновским (хьюиттовским) тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Хьюиттовскими пространствами будут, например, компакты, т. е. компактные хаусдорфовы пространства.

Хьюиттовские пространства играют важную роль в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций. Отметим

Предложение 1 ([2, теоремы 3.9 и 8.7]). *Для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C(X, S)$, $C(\tau X, S)$ и $C(\nu\tau X, S)$, а также решетки их подалгебр (подалгебр с единицей).*

1.2. Мотивировка и основные результаты работы. В теории колец $C(X)$ интересен вопрос о том, насколько топологическое пространство X или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и связанных с ним алгебраических систем $A(X)$. Сюда же относится задача определяемости топологических пространств. *Определяемость топологического пространства X* в классе K топологических пространств некоторой производной алгебраической структурой $A(X)$ означает, что для произвольного топологического пространства $Y \in K$ изоморфизм структур $A(X)$ и $A(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y .

Согласно знаменитой теореме Гельфанда–Колмогорова (см. [3]) произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Эта теорема была впоследствии распространена на все действительно-компактные (теперь называемые хьюиттовскими) топологические пространства (см. [4, теорема 57]). Было замечено (см. [5, теорема 1]), что в теореме Хьюитта можно заменить кольцо $C(X)$ на решетку $\mathbb{A}(C(X))$ его подалгебр. Мы перенесли этот результат на случай решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ полуколец $C(X, S)$. Более точно, мы доказали, что произвольное хьюиттовское пространство X определяется каждой из следующих решеток:

- $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ (2014 г., см. [6, теорема 2.15]);
- $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ (2015 г., см. [7, теорема 1]);
- $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ (2017 г., см. [8, теорема 2]);
- $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ (2019 г., см. [9, теорема 1]).

Отсюда и из предложения 1 получаем, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$ или их под решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$ влечет изоморфизм полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$. Возникают следующие естественные вопросы.

Вопрос 1. Как устроены изоморфизмы полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, которые индуцируют изоморфизмы решеток их подалгебр (подалгебр с единицей)?

Вопрос 2. Как устроены изоморфизмы решеток подалгебр (подалгебр с единицей) полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$? В частности, существуют ли изоморфизмы этих решеток, которые не индуцируются изоморфизмами самих полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$?

Ответы на вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ были получены (см. [6]) лишь в случае решеток всех подалгебр полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, а случай решеток подалгебр с единицей до настоящего момента разобран не был. В недавней работе [1] нами даны ответы на вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{P}^\vee$. Главная цель настоящей работы — ответить на вопросы 1 и 2 в случае $S = \mathbb{R}_+^\vee$, сведя его к случаю $S = \mathbb{P}^\vee$. В частности, описать изоморфизмы решеток подалгебр с единицей полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$.

Замечание 3. В силу предложения 1 все рассматриваемые далее топологические пространства, не умаляя общности, будем считать хьюиттовскими.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Однопорожденные подалгебры. Ключевую роль в работе играет техника однопорожденных подалгебр, суть которой заключается в том, что свойства подалгебр описываются в терминах решеточных свойств однопорожденных подалгебр, точной верхней гранью которых они являются.

Наименьшую подалгебру полукольца $C(X, S)$, которая содержит функцию f , назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f \rangle$. Наименьшую подалгебру с единицей, которая содержит функцию f , обозначим через $[f]$. При работе в решетке $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ подалгебру $[f]$ также будем называть однопорожденной. Для записи функций подалгебр $\langle f \rangle$ и $[f]$ многочленами от f будем использовать запись по возрастающим степеням f , а коэффициенты многочленов будем обозначать символами a, b и r (часто с индексами). Легко видеть, что если $S = \mathbb{R}_+^\vee$, то

$$\langle f \rangle = \{a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, n \in \mathbb{N}\},$$

$$[f] = \{a_0 \vee a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеристика* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

Замечание 4. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости, в записи решеточной характеристики некоторых свойств будем использовать условия, которые сформулированы не в терминах решетки, но решеточная характеристика которых была получена ранее. Вместо оборотов «существует решеточная характеристика» и «решеточная характеристика» будем использовать сокращения «с. р. х.» и «р. х.» соответственно.

Множество функций-констант полукольца $C(X, S)$ образует подалгебру, которую обозначим через S (это не вызовет путаницы).

Предложение 2. В решетках $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ с. р. х. подалгебры S .

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 2]. Для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ — это [9, предложение 2]. $\square$

Решетки $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ — *полные*, т. е. любое подмножество их элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани (см. замечание 2). Элемент A полной решетки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ ее элементов $A \leq \bigvee_{i \in I} A_i$ влечет $A \leq \bigvee_{i \in J} A_i$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Элемент A решетки называется *$\vee$ -неразложимым*, если $A = B \vee C$ влечет $A = B$ или $A = C$.

Дадим р. х. однопорожденных подалгебр.

Предложение 3. Подалгебры $\langle f \rangle$ и $[f]$ — это в точности $\vee$ -неразложимые компактные элементы решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ соответственно.

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 15]. Для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ — это [6, теорема 2.4] и [9, предложение 3]. $\square$

Замечание 5. В силу предложения 2 решетка $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ имеет р. х. в решетке $\mathbb{A}(C(X, S))$. Отсюда и из предложения 3 получаем, что подалгебры $[f]$ имеют р. х. в решетке $\mathbb{A}(C(X, S))$.

Для произвольной подалгебры $[f]$ через $\mathbb{A}_1([f])$ обозначим *решетку подалгебр с единицей, включенных в $[f]$* . Из предложения 2 получаем

Предложение 4. Для любой подалгебры $[f]$ полукольца $C(X, S)$ в решетках $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ с.р.х. решетки $\mathbb{A}_1([f])$.

Для произвольной функции f полукольца $C(X, S)$ положим

$$\begin{aligned}\text{Min } f &= \{x \in X : f(x) = \inf f\}, \\ \text{Max } f &= \{x \in X : f(x) = \sup f\}, \\ Z(f) &= \{x \in X : f(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Предложение 5. Для любой подалгебры $[f]$ полукольца $C(X, S)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $|\text{Im } f| = 1$ тогда и только тогда, когда $|\mathbb{A}_1([f])| = 1$;
- 2) $|\text{Im } f| = 2$ и $Z(f) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $|\mathbb{A}_1([f])| = 2$;
- 3) $|\text{Im } f| = 2$ и $Z(f) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $|\mathbb{A}_1([f])| = 3$;
- 4) $|\text{Im } f| \geq 3$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_1([f])$ — бесконечная решетка.

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [8, предложение 4]. Для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ — это [9, лемма 5]. $\square$

Легко видеть, что для произвольных функций f и g полукольца $C(X, S)$

$$(1) \quad [f] = \langle f \rangle \vee S, \quad \langle f \rangle = \langle g \rangle \implies [f] = [g].$$

Отсюда и из предложений 4 и 5 получаем

Предложение 6. Условия $|\text{Im } f| = 1$, $|\text{Im } f| = 2$ и $|\text{Im } f| \geq 3$ имеют р.х. в решетках $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ для любой подалгебры $[f]$, а значит, и в решетке $\mathbb{A}(C(X, S))$ для любой подалгебры $\langle f \rangle$.

Решим вопрос о равенстве однопорожденных подалгебр.

Предложение 7. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ или $[f] = [g]$, то $|\text{Im } f| = |\text{Im } g|$;
- 2) если $|\text{Im } f| = 1$, то $\langle f \rangle = \{0\}$ при $f = 0$, $\langle f \rangle = S$ при $f > 0$ и $[f] = S$;
- 3) если $|\text{Im } f| = 2$, то $[f] = [g]$ тогда и только тогда, когда

$$(2) \quad |\text{Im } g| = 2, \quad \text{Max } f = \text{Max } g, \quad Z(f) = Z(g),$$

или, что равносильно,

$$(3) \quad |\text{Im } g| = 2, \quad \text{Min } f = \text{Min } g, \quad Z(f) = Z(g);$$

4) если $|\text{Im } f| = 2$, то $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ тогда и только тогда, когда $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$;

5) если $|\text{Im } f| \geq 3$, то

$$(4) \quad \langle f \rangle = \langle g \rangle \iff [f] = [g] \iff f = rg \text{ для некоторого } r \in \mathbb{P}^\vee.$$

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 11].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Если $[f] = [g]$, то $|\text{Im } f| = |\text{Im } g|$ согласно [9, лемма 3], а значит, если $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, то $|\text{Im } f| = |\text{Im } g|$ в силу (1).

Утверждение 2) очевидно. Утверждение 3) — это [9, лемма 4].

Достаточность в утверждениях 4) и 5) очевидна. Установим необходимость.

Пусть $|\text{Im } f| = 2$. Если $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, то $[f] = [g]$ в силу (1), а значит, выполняется условие (3). Поэтому если $Z(f) = Z(g) \neq \emptyset$, то $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Если $Z(f) = Z(g) = \emptyset$, то $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$ согласно [6, лемма 2.6].

Наконец, пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Тогда в силу [9, лемма 4] равенство $[f] = [g]$ равносильно условию $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Поэтому если $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, то $[f] = [g]$ в силу (1), а значит, $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. $\square$

2.2. Подалгебры специального вида. Для подмножества $Z \subseteq X$ через e_Z и $\bar{e}_Z$ обозначим функции полукольца $C(X, S)$ такие, что $e_Z = \bar{e}_Z = 1$ на $X \setminus Z$, $e_Z = 0$ и $\bar{e}_Z = 1/2$ на Z . Если множество $Z = \{x, y, \dots, z\}$ конечно, то будем писать $e_{x,y,\dots,z}$ и $\bar{e}_{x,y,\dots,z}$.

Из предложения 7 получаем, что для любой подалгебры $[f] \neq S$

$$(5) \quad \begin{aligned} [f] = [e_Z] &\iff (|\operatorname{Im} f| = 2, Z(f) = Z), \\ [f] = [\bar{e}_Z] &\iff (|\operatorname{Im} f| = 2, \operatorname{Min} f = Z, Z(f) = \emptyset). \end{aligned}$$

Легко показать, что если пространство X — тихоновское (в частности, хьюиттовское) и множество $Z = \{x, y, \dots, z\} \subseteq X$ конечно, то для произвольного набора $r_x, r_y, \dots, r_z \in S$ существует функция $f \in C(X, S)$ такая, что $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$. Здесь и далее $f|_Z$ — ограничение функции f на Z , а равенство $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$ означает, что $f(x) = r_x, f(y) = r_y, \dots, f(z) = r_z$.

Предложение 8. Для произвольных функций $f, g, h \in C^\vee(X)$, $X = \{x, y, z\}$, справедливы следующие утверждения:

- 1) если $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 1, 0)$ и $h(x) \geq h(y) \geq h(z)$, то $h \in [f] \vee [g]$;
- 2) если $f = (1, 0, 0)$, $g = (0, 1, 0)$ и $Z(h) = \{z\}$, то $h \in [f] \vee [g]$;
- 3) если $1 = f(x) > f(y)$, $g = (1, 1, 0)$ и $h(x) \geq h(y) > h(z)$, то $h \in [f] \vee [g]$;
- 4) если $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$, $1 = g(y) > g(x)$ и $Z(h) = \{z\}$, то $h \in [f] \vee [g]$.

Доказательство. 1)–2) Заметим, что $h = h(x)f \vee h(y)g \vee h(z) \in [f] \vee [g]$.

3) Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $h(x)f^m(y) \leq h(y)$. Тогда

$$h = h(x)f^m g \vee h(y)g \vee h(z) \in [f] \vee [g].$$

4) Для $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $h(x) > h(y)f(x)g^m(x)/f(y)$ и $h(y) > h(x)f^n(y)$,

$$h = h(x)f^n \vee \frac{h(y)}{f(y)} \cdot fg^m \in [f] \vee [g].$$

$\square$

Для непустого подмножества $Z \subseteq X$ через Min_Z и Max_Z обозначим подалгебры с единицей полукольца $C(X, S)$, заданные равенствами

$$\operatorname{Min}_Z = \{f \in C(X, S) : Z \subseteq \operatorname{Min} f\}, \quad \operatorname{Max}_Z = \{f \in C(X, S) : Z \subseteq \operatorname{Max} f\}.$$

Для конечного множества $Z = \{x, y, \dots, z\}$ будем писать $\operatorname{Min}_{x,y,\dots,z}$ и $\operatorname{Max}_{x,y,\dots,z}$. Через $bC(X, S)$, $spC(X, S)$, $spbC(X, S)$ и $uC(X, S)$ обозначим подалгебры, заданные равенствами

$$\begin{aligned} bC(X, S) &= \{f \in C(X, S) : \sup f < \infty\}, \\ spC(X, S) &= \{f \in C(X, S) : \inf f > 0 \text{ или } f = 0\}, \\ spbC(X, S) &= bC(X, S) \cap spC(X, S), \\ uC(X, S) &= \{f \in C(X, S) : f > 0 \text{ или } f = 0\}. \end{aligned}$$

Подалгебру назовем *b-подалгеброй*, если она включена в подалгебру $bC(X, S)$. Для произвольной подалгебры A через bA обозначим *b-подалгебру* $A \cap bC(X, S)$.

Аналогичным образом определим понятия sp -подалгебры, spb -подалгебры и u -подалгебры, а также подалгебры spA , $spbA$ и uA . Ясно, что в случае $S = \mathbb{P}^\vee$ любая подалгебра является u -подалгеброй.

Предложение 9. В решетках $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ с.р.х. b -, sp -, spb - и u -подалгебр. В частности, для любой подалгебры $[f]$ с.р.х. подалгебры $u[f]$.

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 4].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Согласно [9, предложения 5, 6, 7] в решетке $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ с.р.х. b -, sp - и u -подалгебр, а значит, и spb -подалгебр. Далее, пусть $A \in \mathbb{A}(C^\vee(X))$. Воспользуемся предложением 2 и рассмотрим решетку $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ и ее элемент $A \vee \mathbb{R}_+^\vee$. Остается заметить, что подалгебра A является b -, sp -, spb - или u -подалгеброй тогда и только тогда, когда ей является подалгебра $A \vee \mathbb{R}_+^\vee$. $\square$

Предложение 10. Для любых подалгебр $[f]$, $|\text{Im } f| = 2$, и $spb\text{Min}_x$, $x \in X$,

$$(6) \quad x \in \text{Min } f \iff u[f] \subseteq spb\text{Min}_x.$$

В частности,

$$x \in Z(f) \iff (u[f] \neq [f], u[f] \subseteq spb\text{Min}_x).$$

Доказательство. Допустим, $Z(f) = \emptyset$. Тогда $[f] = spb[f] = u[f]$, так как $|\text{Im } f| = 2$. В этом случае утверждение (6), очевидно, верно.

Пусть $Z(f) \neq \emptyset$. Заметим, что $u[f]$ — spb -подалгебра, так как $|\text{Im } f| = 2$, и

$$u[f] = \{0\} \cup \{a_0 \vee a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_0 > 0, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Поэтому если $x \in \text{Min } f$, то $x \in \text{Min } g$ для всех $g \in u[f]$, т.е. $u[f] \subseteq spb\text{Min}_x$.

Обратно, пусть $u[f] \subseteq spb\text{Min}_x$. Допустим, $x \notin \text{Min } f$, т.е. $f(x) > f(y)$ для некоторой точки $y \in X$. Тогда $x \notin \text{Min } g$, где $g = (f(x) + f(y))/2 \vee f \in u[f]$; противоречие. Значит, $x \in \text{Min } f$. $\square$

Предложение 11. Для любых не u -подалгебр $[f]$ и $[g]$, где $|\text{Im } f|, |\text{Im } g| \geq 3$,

$$(7) \quad [f] = [g] \iff u[f] = u[g].$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Установим достаточность.

Пусть $u[f] = u[g]$. Отметим, что $Z(f), Z(g) \neq \emptyset$, так как $[f], [g]$ — не u -подалгебры. Допустим, $Z(f) \neq Z(g)$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) > 0$ и $f(y) = g(x) = 0$ для некоторых $x, y \in X$. Положим $h = f(x)/2 \vee f$. Тогда $h(y) = f(x)/2 < f(x) = h(x)$. С другой стороны, $h(y) \geq h(x)$, так как $g(y) \geq g(x)$, $h \in u[f]$ и $u[f] = u[g]$; противоречие. Значит, $Z(f) = Z(g)$.

Далее, пусть, не умаляя общности, $f(x) = g(x) = 1$ и $f(y) = g(y) = 0$ для некоторых $x, y \in X$. Докажем, что $f = g$ или, что равносильно, $f(z) = g(z)$ для всех $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Если $f(z) = 0$, то $g(z) = 0$, так как $Z(f) = Z(g)$.

Пусть $f(z) > 0$. Тогда $g(z) > 0$, так как $Z(f) = Z(g)$. Положим $r = 1 \wedge f(z)/2 \wedge g(z)/2$. Тогда $r \vee f \in u[g]$ и $r \vee g \in u[f]$, так как $r \vee f, r \vee g > 0$ и $u[f] = u[g]$. Значит, функции $r \vee f$ и $r \vee g$ имеют вид

$$r \vee f = a_0 \vee a_1 g \vee \dots \vee a_n g^n, \quad r \vee g = b_0 \vee b_1 f \vee \dots \vee b_m f^m,$$

где $a_0 = b_0 = r$, так как $f(y) = g(y) = 0$, и $a_n, b_m > 0$, $n, m \geq 1$, так как $f(z), g(z) > r$. Это вместе с $(r \vee f)(x) = f(x) = (r \vee g)(x) = g(x) = 1 \geq r$

означает, что

$$\begin{cases} f(z) = a_1 g(z) \vee \dots \vee a_n g^n(z), \\ g(z) = b_1 f(z) \vee \dots \vee b_m f^m(z), \\ 1 = a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_n, \\ 1 = b_0 \vee b_1 \vee \dots \vee b_m. \end{cases}$$

Отсюда $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \leq 1$ и

$$f(z) = a_1 (b_1 f(z) \vee \dots \vee b_m f^m(z)) \vee \dots \vee a_n (b_1 f(z) \vee \dots \vee b_m f^m(z))^n.$$

Кроме того, если $j \geq 2$, то $f(z) > a_1 b_j f^j(z)$, и если $i \geq 2$, то $f(z) > a_i b_j^i f^{ij}(z)$ для всех $j = 1, \dots, m$. Следовательно, $f(z) = a_1 b_1 f(z)$. Поэтому $a_1 = b_1 = 1$, так как $a_1, b_1 \leq 1$ и $f(z) > 0$. Значит, $f(z) = g(z)$, так как $f(z) \geq a_1 g(z) = g(z)$ и $g(z) \geq b_1 f(z) = f(z)$. $\square$

Наконец, докажем

Предложение 12. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *произвольные автоморфизмы α_1 и α_2 решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ такие, что $\alpha_1(\text{spbMin}_x) = \alpha_2(\text{spbMin}_x) = \text{spbMin}_x$ для всех spbMin_x , $x \in X$, равны тогда и только тогда, когда*

$$(8) \quad \alpha_1([f]) = \alpha_2([f]) \text{ для любой } u\text{-подалгебры } [f].$$

2) *произвольные автоморфизмы α_1 и α_2 решетки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ такие, что $\alpha_1(\text{spbMin}_x) = \alpha_2(\text{spbMin}_x) = \text{spbMin}_x$ для всех spbMin_x , $x \in X$, равны тогда и только тогда, когда*

$$(9) \quad \alpha_1(\langle f \rangle) = \alpha_2(\langle f \rangle) \text{ для любой } u\text{-подалгебры } \langle f \rangle.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Установим достаточность.

1) Пусть выполняется условие (8). Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим произвольную подалгебру $[f]$. Тогда в силу предложения 3 имеем $\alpha_1([f]) = [f_1]$ и $\alpha_2([f]) = [f_2]$ для некоторых подалгебр $[f_1]$ и $[f_2]$ полукольца $C^\vee(X)$. Если мы докажем, что $[f_1] = [f_2]$, то $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$ для всех $A \in \mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, так как любая подалгебра с единицей является точной верхней гранью включенных в нее однопорожденных подалгебр с единицей.

Если $f = 0$ или $f > 0$, то $[f]$ — u -подалгебра. Значит, $[f_1] = [f_2]$ в силу (8).

Пусть $|\text{Im } f| \geq 2$ и $Z(f) \neq \emptyset$. Тогда в силу предложения 9 и (8) имеем

$$\begin{aligned} \{[g_1] \subseteq [f_1] : [g_1] \text{ — } u\text{-подалгебра}\} &= \{\alpha_1([g]) : [g] \subseteq [f] \text{ и } [g] \text{ — } u\text{-подалгебра}\} = \\ &= \{\alpha_2([g]) : [g] \subseteq [f] \text{ и } [g] \text{ — } u\text{-подалгебра}\} = \{[g_2] \subseteq [f_2] : [g_2] \text{ — } u\text{-подалгебра}\}. \end{aligned}$$

Отсюда $u[f_1] = u[f_2]$, так как любая u -подалгебра с единицей есть точная верхняя грань включенных в нее однопорожденных u -подалгебр с единицей. Поэтому если $|\text{Im } f| = 2$, то в силу предложений 6 и 10

$$|\text{Im } f_1| = |\text{Im } f_2| = |\text{Im } f| = 2, \text{ Min } f_1 = \text{Min } f_2 = \text{Min } f, Z(f_1) = Z(f_2) = Z(f).$$

Значит, $[f_1] = [f_2] = [f]$ по предложению 7.

Наконец, если $|\text{Im } f| \geq 3$, то $|\text{Im } f_1|, |\text{Im } f_2| \geq 3$ в силу предложения 6. Значит, $[f_1] = [f_2]$ по предложению 11.

2) Пусть выполняется условие (9). Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим произвольную подалгебру $\langle f \rangle$. Тогда в силу предложения 3 имеем $\alpha_1(\langle f \rangle) = \langle f_1 \rangle$

и $\alpha_2(\langle f \rangle) = \langle f_2 \rangle$ для некоторых подалгебр $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ полукольца $C^\vee(X)$. Если мы докажем, что $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle$, то $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$ для всех $A \in \mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, так как любая подалгебра является точной верхней гранью включенных в нее однопорожденных подалгебр.

Если $f = 0$ или $f > 0$, то $\langle f \rangle$ — u -подалгебра. Значит, $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle$ в силу (9). В частности, $\alpha_1(\mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2(\mathbb{R}_+^\vee)$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 2$ и $Z(f) \neq \emptyset$. Заметим, что для любой u -подалгебры $[g]$ подалгебра $\langle g \rangle$ также будет u -подалгеброй. Поэтому в силу (9) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1([g]) &= \alpha_1(\langle g \rangle \vee \mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_1(\langle g \rangle) \vee \alpha_1(\mathbb{R}_+^\vee) = \\ &= \alpha_2(\langle g \rangle) \vee \alpha_2(\mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2(\langle g \rangle \vee \mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2([g]). \end{aligned}$$

Поэтому выполняется условие (8). Отсюда (см. доказательство утверждения 1)) $[f_1] = [f_2]$, причем $Z(f_1) = Z(f_2) = Z(f)$ в случае $|\operatorname{Im} f| = 2$. Кроме того, $|\operatorname{Im} f_1| = |\operatorname{Im} f_2| = |\operatorname{Im} f|$ в силу предложения 6. Значит, $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle$ по предложению 7. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Дадим ответы на основные вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$.

3.1. Изоморфизмы полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, которые индуцируют изоморфизмы решеток их подалгебр (подалгебр с единицей).

Заметим, что $(f \vee g)^t = f^t \vee g^t$ и $(fg)^t = f^t g^t$ для любых $f, g \in C(X, S)$ и $t \in \mathbb{P}$. Поэтому для любого $t \in \mathbb{P}$ правило $f \mapsto f^t$ задает автоморфизм полукольца $C(X, S)$, который обозначим через ψ_t . Поскольку

$$A \subseteq B \iff \psi_t(A) \subseteq \psi_t(B), \quad A \text{ — подалгебра} \iff \psi_t(A) \text{ — подалгебра}$$

для любых подмножеств $A, B \subseteq C(X, S)$ и $\psi_t(S) = S$, автоморфизм ψ_t индуцирует автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$, которые обозначим через α_{ψ_t} и α_{1, ψ_t} соответственно.

Замечание 6. Легко видеть, что правило $A \mapsto A \setminus \{0\}$ задает изоморфизм решеток подалгебр (подалгебр с единицей) полукольца $C^\vee(X)$ и полуполя $U^\vee(X)$.

Теорема 1. Для произвольного изоморфизма ψ полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$ равносильны следующие условия:

- 1) ψ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$;
- 2) ψ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$;
- 3) ψ действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi^{-1})$ для некоторого автоморфизма ψ_t полукольца $C(X, S)$ и некоторого гомеоморфизма φ пространств X и Y .

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 1].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Импликации 3) $\Rightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 2) очевидны. Докажем обратные импликации.

Рассмотрим изоморфизм ψ полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$, который индуцирует изоморфизм решеток их подалгебр (подалгебр с единицей). В силу предложений 2 и 9 ограничение этого изоморфизма на решетку $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(uC^\vee(Y))$. Отсюда и из замечания 6 получаем, что ψ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Поэтому по теореме 1 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ получаем, что ψ на $U^\vee(X)$ действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi^{-1})$ для некоторого автоморфизма ψ_t полуполя $U^\vee(X)$ и

некоторого гомеоморфизма φ пространств X и Y . Следовательно, для любых функций $f \in C^\vee(X)$ и $r \in \mathbb{P}^\vee$

$$(10) \quad \psi(f) \vee r^t = \psi(f) \vee \psi(r) = \psi(f \vee r) = \psi_t((f \vee r) \circ \varphi^{-1}) = \\ \psi_t((f \circ \varphi^{-1}) \vee (r \circ \varphi^{-1})) = \psi_t(f \circ \varphi^{-1}) \vee \psi_t(r \circ \varphi^{-1}) = \psi_t(f \circ \varphi^{-1}) \vee r^t.$$

Легко видеть, что для произвольных функций $g, h \in C^\vee(Y)$

$$g = h \iff g \vee r^t = h \vee r^t \text{ для всех } r \in \mathbb{P}^\vee.$$

Вместе с (10) это означает, что $\psi(f) = \psi_t(f \circ \varphi^{-1})$. $\square$

3.2. Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$. Опишем изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$. Нам понадобится

Предложение 13. Пусть $X = \{x, y\}$. Тогда для любых функций $f, g \in C^\vee(X)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) если $f(x) > f(y)$ и $g(x) < g(y)$, то $uC^\vee(X) \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$;
- 2) если $f(x) = g(x) > f(y) > 0$, то $g \in \langle f \rangle$ равносильно $f(y) \geq g(y) > 0$.

Доказательство. 1) Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(y) = 1$. Тогда для любой функции $h > 0$ найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $h(y)g^m(x) \leq h(x)$ и $h(x)f^n(y) \leq h(y)$, так как $1 > f(y), g(x)$. Значит, $uC^\vee(X) \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$, так как

$$h = h(x)f^n \vee h(y)g^m \in \langle f \rangle \vee \langle g \rangle.$$

2) Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(x) = 1$. Если $g \in \langle f \rangle$, то функция g имеет вид

$$g = a_1 f \vee \dots \vee a_n f^n,$$

где $a_1 \vee \dots \vee a_n = 1$, так как $f(x) = g(x) = 1$. Кроме того, $f(y) \geq f^i(y) > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, так как $1 > f(y) > 0$. Значит, $f(y) \geq g(y) > 0$.

Обратно, пусть $f(y) \geq g(y) > 0$. Поскольку $1 > f(y)$, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g(y) \geq f^n(y)$. Тогда

$$g = \frac{g(y)}{f^n(y)} \cdot f \vee f^n \in \langle f \rangle.$$

$\square$

Наибольшее значение функции $f \in C(X, S)$ обозначим через $\max f$. Отрезок $[0, 1]$ с естественным порядком является цепью. Для произвольных порядковых автоморфизмов φ_x и φ_y цепи $[0, 1]$ через $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ обозначим взаимно-однозначное преобразование полукольца $C(X, S)$, действующее по правилу

$$(11) \quad f = (f(x), f(y)) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } f = 0, \\ \max f \cdot \left(\varphi_x \left(\frac{f(x)}{\max f} \right), \varphi_y \left(\frac{f(y)}{\max f} \right) \right), & \text{если } f \neq 0. \end{cases}$$

Для функции $f \in C(X, S)$ и подмножества $A \subseteq C(X, S)$ обозначим через f' и A' их образы $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}(f)$ и $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}(A)$. Из определения $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ находим, что

$$(12) \quad \max f = \max f', \quad Z(f) = Z(f')$$

и

$$(13) \quad f(x) < f(y) \iff f'(x) < f'(y), \quad f(x) = f(y) \iff f'(x) = f'(y).$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

- если $f = 0$, то $\langle f \rangle = \{0\}$;

- если $f \in \mathbb{P}^\vee$, то $\langle f \rangle = S$;
- если $f(x) > f(y) = 0$, то $\langle f \rangle = \{a \cdot (1, 0) : a \in \mathbb{R}_+^\vee\}$;
- если $f(x) > f(y) > 0$, то $\langle f \rangle = \{a \cdot (1, b) : a \in S, f(y)/f(x) \geq b > 0\}$ в силу утверждения 2 предложения 13.

Вместе с (11) это означает, что

$$(14) \quad (\langle f \rangle)' = \langle f' \rangle \text{ для всех } f \in C(X, S).$$

Предложение 14. Любое преобразование $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C(X, S))$, $X = \{x, y\}$, причем

$$(15) \quad \psi_{\varphi_x, \varphi_y} : \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x, \text{spbMin}_y \mapsto \text{spbMin}_y.$$

Доказательство. Утверждение (15) получаем из определения $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$.

Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 6].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Заметим, что $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}(U^\vee(X)) = U^\vee(X)$. Вместе с предложением 14 для $S = \mathbb{P}^\vee$ и замечанием 6 это означает, что преобразование $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}(uC^\vee(X))$. В частности,

$$(16) \quad (uA)' \text{ — подалгебра для любой подалгебры } A \subseteq C^\vee(X).$$

Докажем, что $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$. Поскольку $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ — взаимно-однозначное преобразование, включения $A \subseteq B$ и $A' \subseteq B'$ равносильны для любых подмножеств $A, B \subseteq C^\vee(X)$. Поэтому достаточно показать, что A — подалгебра тогда и только тогда, когда A' — подалгебра для любого подмножества $A \subseteq C^\vee(X)$.

Пусть A — подалгебра. Докажем, что A' — подалгебра или, что равносильно, $f' \vee g', f'g', rf' \in A'$ для любых $f', g' \in A'$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$.

Заметим, что $rf' \in A$, так как $f \in A$ и A — подалгебра. Поэтому $rf' \in A'$, так как $(rf')' = rf'$ в силу (11). В частности,

$$(17) \quad h' \in A' \iff (rh' \in A' \text{ для всех } r \in \mathbb{P}^\vee) \iff (rh' \in A' \text{ для некоторого } r \in \mathbb{P}^\vee).$$

Если $f' = 0$ или $g' = 0$, то $f' \vee g', f'g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Если $f', g' > 0$, то $f, g \in uA$. Поэтому $f', g' \in (uA)'$. Значит, $f' \vee g', f'g' \in A'$, так как $(uA)' \subseteq A'$ и $(uA)'$ — подалгебра в силу (16).

Остается разобрать случай, когда $f'(x) > f'(y) = 0$ и $g' \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $f'(x) = 1$, так как в силу (17)

$$f' \vee g' \in A' \iff \frac{f'}{f(x)} \vee \frac{g'}{f(x)} \in A', \quad f'g' \in A' \iff \frac{f'}{f(x)} \cdot g' \in A'.$$

Заметим, что $f'g' \in A'$, так как $f'g' = g'(x)f'$ и $g'(x)f' \in A'$ в силу (17).

Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 1: $g' \in \mathbb{P}^\vee$. Если $g' \leq f'(y)$ или $g' \geq 1$, то $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $1 > g' > f'(y)$. Заметим, что $g = g'$ в силу (11). Поэтому $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$, так как $g \in \mathbb{P}^\vee$, $g \in A$ и A — подалгебра. В частности, $\varphi_y^{-1}(g') \in A$. Следовательно, $\varphi_y^{-1}(g') \vee f \in A$, так как $f \in A$ и A — подалгебра. Значит, $f' \vee g' \in A'$, так как

$$(\varphi_y^{-1}(g') \vee f)' = (1, \varphi_y^{-1}(g'))' = (1, g') = f' \vee g'.$$

Случай 2: $g'(x) > g'(y)$. Если $g'(y) = 0$, то $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $g'(y) > 0$. Тогда если $g'(x) \geq 1$, то $f' \vee g' = g' \in A'$. Наконец, если $g'(x) < 1$, то $g'(x)(f' \vee g') = (g'(x), g'(x)g'(y)) \in \langle g' \rangle$ по утверждению 2 предложения 13, так как $g'(y) > g'(x)g'(y) > 0$. Значит, $f' \vee g' \in A'$, так как $\langle g' \rangle \subseteq A'$ в силу (14).

Случай 3: $g'(y) > g'(x)$. Тогда $uC^\vee(X) \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ по утверждению 2 предложения 13, так как $f(x) > f(y)$ и $g(x) < g(y)$ в силу (11). Следовательно, $uC^\vee(X) \subseteq A$, так как $f, g \in A$. Отсюда $uC^\vee(X) \subseteq A'$, так как $(uC^\vee(X))' = uC^\vee(X)$ в силу (11). Значит, $f' \vee g' \in A'$, так как $f' \vee g' \in uC^\vee(X)$.

Итак, если A — подалгебра, то A' — подалгебра.

Обратно, пусть A — подмножество полукольца $C^\vee(X)$ такое, что его образ A' является подалгеброй. Заметим, что $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}^{-1} = \psi_{\varphi_x^{-1}, \varphi_y^{-1}}$. Поэтому, как было показано ранее, множество $\psi_{\varphi_x^{-1}, \varphi_y^{-1}}(A') = A$ является подалгеброй. $\square$

Обозначим через $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y}$ автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C(X, S))$, который согласно предложению 14 индуцирует преобразование $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$.

Теорема 2. Для любого изоморфизма α решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$ справедливы следующие утверждения:

1) отображение $\varphi_\alpha: X \rightarrow Y$, заданное правилом

$$\varphi_\alpha(x) = x' \iff \alpha(\text{spbMin}_x) = \text{spbMin}_{x'},$$

является гомеоморфизмом;

2) если $|X| \neq 2$, то α индуцируется изоморфизмом полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, который действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi_\alpha^{-1})$ для некоторого автоморфизма ψ_t полукольца $C(X, S)$;

3) если $|X| = 2$, то α индуцируется отображением полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, которое действует по правилу $f \mapsto \psi_{\varphi_x, \varphi_y}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})$ для некоторого преобразования $\psi_{\varphi_x, \varphi_y}$ полукольца $C(X, S)$.

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 2].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение изоморфизма α на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$. Отсюда и из утверждения 1) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что отображение φ_α является гомеоморфизмом пространств X и Y .

Отождествим точки пространств X и Y гомеоморфизмом φ_α . После чего, не умаляя общности, будем считать, что α — автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ такой, что $\text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$.

Случай $|X| \neq 2$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма α на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 2) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что ограничение автоморфизма α на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ индуцируется ограничением на полуполе $U^\vee(X)$ некоторого автоморфизма ψ_t полукольца $C^\vee(X)$. Тогда $\alpha(\langle f \rangle) = \alpha_{\psi_t}(\langle f \rangle)$ для всех u -подалгебр $\langle f \rangle$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_{\psi_t}: \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha = \alpha_{\psi_t}$ по утверждению 2 предложения 12.

Случай $X = \{x, y\}$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма α на решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 3) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что найдутся автоморфизмы φ_x и φ_y цепи $(0, 1]$ такие, что $\alpha = \alpha_{\varphi_x, \varphi_y}$ на решетке

$\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Дроопределим автоморфизмы φ_x и φ_y цепи $(0, 1]$ до автоморфизмов цепи $[0, 1]$ равенствами $\varphi_x(0) = 0$ и $\varphi_y(0) = 0$. Тогда $\alpha(\langle f \rangle) = \alpha_{\varphi_x, \varphi_y}(\langle f \rangle)$ для любой $\mathfrak{u}$ -подалгебры $\langle f \rangle$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y} : \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha = \alpha_{\varphi_x, \varphi_y}$ по утверждению 2 предложения 12. $\square$

Предложение 15. *Произвольные автоморфизмы $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y}$ и α_{ψ_t} равны тогда и только тогда, когда $\varphi_x(r) = \varphi_y(r) = r^t$ для всех $r \in (0, 1]$.*

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 7].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Если $\varphi_x(r) = \varphi_y(r) = r^t$ для всех $r \in (0, 1]$, то $\psi_{\varphi_x, \varphi_y} = \psi_t$, так как $\varphi_x(0) = \varphi_y(0) = 0^t = 0$. Значит, $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y} = \alpha_{\psi_t}$.

Обратно, если $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y} = \alpha_{\psi_t}$, то $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y} = \alpha_{\psi_t}$ на решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Из предложения 15 для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что $\varphi_x(r) = \varphi_y(r) = r^t$, $r \in (0, 1]$. $\square$

Замечание 7. Из предложения 15 получаем, что семейство автоморфизмов $\alpha_{\varphi_x, \varphi_y}$ строгим образом включает семейство автоморфизмов α_{ψ_t} . Вместе с теоремами 1 и 2 это означает, что в случае $|X| = |Y| = 2$ существуют изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$, которые не индуцируются изоморфизмами полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$.

3.3. Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$. Опишем изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$.

Пусть $X = \{x, y, z\}$. Для произвольной функции $f \in C(X, S)$ такой, что $\text{Im } f = \{a, b, c\}$ и $a > b > c$, обозначим через $\text{mid } f$ значение b . Рассмотрим множество Mid_y , заданное равенством

$$\text{Mid}_y = \{f \in C(X, S) : |\text{Im } f| = 3, f(y) = \text{mid } f\}.$$

Нетрудно заметить, что для любых $a, s \in \mathbb{P}$ и $f \in \text{Mid}_y$, где $s > 1 > a > 0$ и $f(x) > f(y) > f(z)$, найдутся единственные $k \in \mathbb{R}$ и $r, p \in \mathbb{P}$ такие, что

$$f = \begin{cases} a^k \left(1, a^r, (a^r)^{1+p(s-1)}\right), & \text{если } f(z) > 0, \\ a^k (1, a^r, 0), & \text{если } f(z) = 0. \end{cases}$$

Аналогичное верно и для функций $f \in \text{Mid}_y$, $f(x) < f(y) < f(z)$.

Для произвольного набора $T_y = (a, b, s, t)$, где $s, t > 1 > a, b > 0$, положим

$$c = a^{s-1}, \quad l = \frac{s}{s-1}, \quad d = b^{t-1}, \quad q = \frac{t}{t-1}.$$

Тогда

$$l, q > 1 > c, d > 0, \quad (s-1)(l-1) = (t-1)(q-1) = 1.$$

Легко видеть, что правило

$$(18) \quad f \mapsto \begin{cases} b^k \left(1, b^r, (b^r)^{1+p(t-1)}\right), & \text{если } f = a^k \left(1, a^r, (a^r)^{1+p(s-1)}\right), \\ b^k (1, b^r, 0), & \text{если } f = a^k (1, a^r, 0), \\ d^k \left((d^r)^{1+p(q-1)}, d^r, 1\right), & \text{если } f = c^k \left((c^r)^{1+p(l-1)}, c^r, 1\right), \\ d^k (0, d^r, 1), & \text{если } f = c^k (0, c^r, 1), \end{cases}$$

задает взаимно-однозначное преобразование множества Mid_y , которое обозначим через ψ_{T_y} . Множества Mid_x и Mid_z и их преобразования ψ_{T_x} и ψ_{T_z} определим аналогичным образом. Тогда для любой тройки $T = (T_x, T_y, T_z)$ правило

$$(19) \quad f \mapsto \begin{cases} \psi_{T_x}(f), & \text{если } f \in \text{Mid}_x, \\ \psi_{T_y}(f), & \text{если } f \in \text{Mid}_y, \\ \psi_{T_z}(f), & \text{если } f \in \text{Mid}_z, \\ f, & \text{если } |\text{Im } f| \leq 2, \end{cases}$$

задает взаимно-однозначное преобразование полукольца $C(X, S)$, которое обозначим через ψ_T . Для произвольной функции $f \in C(X, S)$ и подмножества $A \subseteq C(X, S)$ обозначим через f' и A' их образы $\psi_T(f)$ и $\psi_T(A)$.

Из определения ψ_T находим, что для любой функции $f \in C(X, S)$

$$(20) \quad Z(f) = Z(f'), \quad f(u) < f(v) \iff f'(u) < f'(v) \text{ для любых } u, v \in X.$$

Отсюда и из (5) находим, что

$$(21) \quad ([e_Z])' = [e_Z], \quad ([\bar{e}_Z])' = [\bar{e}_Z] \text{ для всех } Z \subseteq X.$$

Предложение 16. Любое преобразование ψ_T индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C(X, S))$, $X = \{x, y, z\}$, причем

$$(22) \quad \psi_T: \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x, \text{spbMin}_y \mapsto \text{spbMin}_y, \text{spbMin}_z \mapsto \text{spbMin}_z.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование ψ_T , где $T = (T_x, T_y, T_z)$ и

$$T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x), \quad T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y), \quad T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z).$$

Утверждение (22) получаем из определения преобразования ψ_T .

Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 8].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Поскольку $\psi_T(U^\vee(X)) = U^\vee(X)$ и $\psi_T(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$, из предложения 16 для $S = \mathbb{P}^\vee$ и замечания 6 получаем, что преобразование ψ_T индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$. Поэтому $(uA)'$ — подалгебра с единицей для любой подалгебры A с единицей полукольца $C^\vee(X)$. Отсюда

$$(23) \quad f' \vee g', f'g' \in (uA)' \subseteq A' \text{ для любых } f', g' \in A', f', g' > 0,$$

так как если $f', g' > 0$, то $f, g \in uA$ в силу (18).

Докажем, что ψ_T индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$. Поскольку ψ_T — взаимно-однозначное преобразование, включения $A \subseteq B$ и $A' \subseteq B'$ равносильны для любых подмножеств $A, B \subseteq C^\vee(X)$. Поэтому достаточно показать, что A — подалгебра с единицей тогда и только тогда, когда A' — подалгебра с единицей для любого подмножества $A \subseteq C^\vee(X)$.

Пусть A — подалгебра с единицей полукольца $C^\vee(X)$ и $f', g' \in A'$. Докажем, что A' — подалгебра с единицей, т. е. $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A'$ и $f' \vee g', f'g', rf' \in A'$ для любых $f', g' \in A'$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. Заметим, что $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A'$, так как $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$ и $\psi_T(\mathbb{R}_+^\vee) = \mathbb{R}_+^\vee$. Поэтому достаточно показать, что $f' \vee g'$ и $f'g' \in A'$ для всех $f', g' \in A'$.

Если $f' = 0$ или $g' = 0$, то $f' \vee g', f'g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $f', g' \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $|\text{Im } g'| \geq |\text{Im } f'|$ и $f'(x) \geq f'(y) \geq f'(z)$.

Случай 1: $f' \in \mathbb{P}^\vee$, $|\text{Im } g'| \leq 2$. Тогда $f' = f$, $g' = g$ и $|\text{Im } f \vee g|, |\text{Im } fg| \leq 2$. Кроме того, $f \vee g, fg \in A$, так как $f, g \in A$ и A — подалгебра. Значит,

$$f' \vee g' = f \vee g = (f \vee g)' \in A', \quad f'g' = fg = (fg)' \in A'.$$

Случай 2: $f' \in \mathbb{P}^\vee$, $|\operatorname{Im} g'| = 3$. Если $g' > 0$, то $f' \vee g', f'g' \in A'$ в силу (23).

Пусть $Z(g') \neq \emptyset$. Не умаляя общности, будем считать, что $g' = b_y^k(1, b_y^r, 0)$ для некоторых $k \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{P}$. Поскольку $f' \in \mathbb{P}^\vee$, имеем $f' = b_y^l$ для некоторого $l \in \mathbb{R}$. Кроме того, $a_y^l g' \in A$, так как $g \in A$ и A — подалгебра. Значит,

$$f'g' = b_y^{l+k}(1, b_y^r, 0) = (a_y^{l+k}(1, a_y^r, 0))' = (a_y^l g)' \in A'.$$

Докажем, что $f' \vee g' \in A'$. Если $f' < g'(y)$, то $f' = b_y^k(b_y^r)^{1+p(t-1)}$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Положим $e = a_y^k(a_y^r)^{1+p(s-1)}$. Тогда $e \vee f \in A$, так как $e, f \in A$ и A — подалгебра. Значит,

$$f' \vee g' = b_y^k(1, b_y^r, (b_y^r)^{1+p(t-1)}) = \left(a_y^k(1, a_y^r, (a_y^r)^{1+p(s-1)})'\right)' = (e \vee f)' \in A'.$$

Пусть $f' \geq g'(y)$. Тогда $(f' \vee g')(x) \geq (f' \vee g')(y) = (f' \vee g')(z)$. Поэтому $f' \vee g' \in [\bar{e}_{y,z}]$. Кроме того, $[g(y) \vee g] \subseteq A$, так как $g(y), g \in A$ и A — подалгебра. Следовательно, $[\bar{e}_{y,z}] \subseteq A'$, так как $[\bar{e}_{y,z}] = [g(y) \vee g]$ и $([\bar{e}_{y,z}])' = [\bar{e}_{y,z}]$ в силу (21). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Итак, (см. случаи 1 и 2) для любых ненулевых функций $f', g' \in A'$ имеем

$$(24) \quad \begin{aligned} f' \vee g' \in A' &\iff \frac{f'}{\max f'} \vee \frac{g'}{\max g'} \in A', \\ f'g' \in A' &\iff \frac{f'}{\max f'} \cdot \frac{g'}{\max g'} \in A'. \end{aligned}$$

Поэтому при доказательстве $f' \vee g' \in A'$ или $f'g' \in A'$, не умаляя общности, будем считать, что $\max f' = 1$ или $\max f' = \max g' = 1$ соответственно.

Отметим также, что если $f' \vee g' > 0$, то для $r = \min(f' \vee g')$

$$r \vee f', r \vee g' > 0, \quad f' \vee g' = (r \vee f') \vee (r \vee g').$$

Поэтому (см. случаи 1 и 2) $r \vee f', r \vee g' \in A'$. Значит, в силу (23) имеем

$$(25) \quad f' \vee g' > 0 \implies f' \vee g' \in A'.$$

Случай 3: $f' = (1, 0, 0)$. Тогда $f'g' \in \{f', 0\} \subseteq A'$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.1: $g'(y), g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 3.2: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Тогда $[f] = [(1, 0, 0)]$ и $[g] = [(1, 1, 0)]$.

Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(x) \geq h(y) \geq h(z)\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B = [f] \vee [g]$ по утверждению 1) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.3: $g'(x) = g'(z) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.2.

Случай 3.4: $g'(y) > g'(x) = g'(z) = 0$. Тогда $[f] = [(1, 0, 0)]$ и $[g] = [(0, 1, 0)]$.

Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 2) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.5: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 3.4.

Случай 3.6: $g'(x) > g'(y) = g'(z) = 0$. Тогда $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Случай 3.7: $g'(x) > g'(y) > g'(z) = 0$. Если $f'(x) \leq g'(x)$, то $f' \vee g' = g' \in A'$.

Пусть $1 = f'(x) > g'(x)$. Тогда $1 = f(x) > g(x)$ и $g' = b_y^k(1, b_y^r, 0)$ для некоторых $k, r \in \mathbb{P}$. Значит,

$$f' \vee g' = (1, b_y^r, 0) = (1, a_y^r, 0)' = (f \vee g)' \in A'.$$

Случай 3.8: $g'(x) > g'(z) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.7.

Случай 3.9: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f \vee g/(2g(y))] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f \vee g/(2g(y))] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.10: $g'(z) > g'(x) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.9.

Случай 4: $f' = (1, b_y^r, b_y^r), r \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$. Поскольку $f' > 0$, в силу (25) достаточно разобрать случай $Z(g) \neq \emptyset$.

Случай 4.1: $|Z(g')| = 2$ или $g' = (0, 1, 1)$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (24), так как $f'g'/\max(f'g') = g' \in A'$.

Случай 4.2: $g' = (1, 1, 0)$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(x) \geq h(y) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 4.3: $g' = (1, 0, 1)$. Аналогичен случаю 4.2.

Случай 4.4: $g' = (1, b_y^l, 0), l \in \mathbb{P}$. Положим $h = (1, a_y^l, a_y^l)$. Тогда

$$f'g' = (1, b_y^{r+l}, 0) = (1, a_y^{r+l}, 0)' = (fh)' \in A',$$

так как $h \in [\bar{e}_{y,z}] = [f] \subseteq A$ и $fh \in A$.

Случай 4.5: $g' = (1, 0, b_z^l), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.4.

Случай 4.6: $g' = (b_x^l, 1, 0), l \in \mathbb{P}$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [g] \vee [f]$ по утверждению 4) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[g] \vee [f] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 4.7: $g' = (b_x^l, 0, 1), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.6.

Случай 4.8: $g' = (0, 1, b_z^l), l \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' = b_y^r g' \in A'$ (см. случай 2).

Случай 4.9: $g' = (0, b_y^l, 1), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.8.

Случай 5: $f' = (1, 1, 0)$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.1: $g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 5.2: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Тогда $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Случай 5.3: $g'(x) > g'(y) = g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(x) \geq h(y) \geq h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 1) предложения 8, так как $[f] = [(1, 1, 0)]$ и $[g] = [(1, 0, 0)]$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.4: $g'(y) > g'(x) = g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 5.3.

Случай 5.5: $g'(x) > g'(y) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(x) \geq h(y) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $[f] = [(1, 1, 0)]$ и $[g] = [(1, a_y^l, 0)]$, $l \in \mathbb{P}$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.6: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 5.5.

Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 5.7: $|\operatorname{Im} g'| = 2$, причем $Z(g') \neq \emptyset$, или $g'(x) = g'(y)$. Тогда $2 = |\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| \geq |\operatorname{Im} fg|$. Значит, $f'g' = fg = (fg)' \in A'$.

Случай 5.8: $1 = g'(x) > g'(y) = g'(z) > 0$ или $1 = g'(y) > g'(x) = g'(z) > 0$. Аналогичен случаю 4.2.

Случай 5.9: $g' = (1, b_y^r, 1)$, $r \in \mathbb{P}$. Положим $h = a_y^r f \vee fg^n$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(b_y^r)^n \leq a_y^r$. Тогда $h \in A$ и $h = (1, a_y^r, 0)$. Значит, $f'g' \in A'$, так как $f'g' = (1, b_y^r, 0) = h'$.

Случай 5.10: $g' = (b_x^r, 1, 1)$, $r \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 5.9.

Случай 5.11: $g' = (1, b_y^r, g'(z))$, где $b_y^r > g'(z) \geq 0$ и $r \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' \in A'$, так как $fg \in A$ и $f'g' = (1, b_y^r, 0) = (1, a_y^r, 0)' = (fg)'$.

Случай 5.12: $g' = (b_x^r, 1, g'(z))$, где $b_x^r > g'(z) \geq 0$ и $r \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 5.11.

Случай 5.13: $1 = g'(z) > g'(y) > g'(x)$. Если $g'(x) = 0$, то $(g'(y)/g(y))fg \in A$. Значит, $f'g' = (0, g'(y), 0) = ((g'(y)/g(y))fg)' \in A$.

Если $g'(x) > 0$, то положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(y) \geq h(x) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $f = (1, 1, 0)$ и $g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 5.14: $1 = g'(z) > g'(x) > g'(y)$. Аналогичен случаю 5.13.

Случай 6: $f' = (1, 1, b_z^r)$, $r \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 6.1: $g' > 0$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (25), так как $f'g' > 0$.

Случай 6.2: $|Z(g')| = 2$. Тогда $f' = f$, $g' = g$ и $(fg)' = fg$, так как $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = |\operatorname{Im} fg| = 2$. Значит, $f'g' \in A'$, так как $fg \in A$.

Случай 6.3: $g' = (1, 1, 0)$. Тогда $f'g' = g' \in A'$.

Случай 6.4: $g' = (1, 0, 1)$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : h(x) \geq h(z) > h(y) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(z)$ и $g = (1, 0, 1)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 6.5: $g' = (0, 1, 1)$. Аналогичен случаю 6.4.

Случай 6.6: $g' = (1, b_y^l, 0)$ или $g' = (b_x^l, 1, 0)$, где $l \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' = g' \in A'$.

Случай 6.7: $g' = (1, 0, b_z^l)$, $l \in \mathbb{P}$. Тогда $g = (1, 0, a_z^l)$ и $h \in [g] \subseteq A$, где $h = (1, 0, a_z^{l+r})$. Значит, $f'g' = (1, 0, b_z^{l+r}) = h' \in A'$.

Случай 6.8: $g' = (0, 1, b_z^l)$, $l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 6.7.

Случай 6.9: $g' = (0, b_y^l, 1)$, $l \in \mathbb{P}$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{x\} \text{ или } h = 0\}$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(y) > f(z)$ и $1 = g(z) > g(y) > g(x) = 0$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 6.10: $g' = (b_x^l, 0, 1)$, $l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 6.9.

Случай 7: $f' = (1, b_y^r, 0)$, $r \in \mathbb{P}$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 7.1: $g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 7.2: $g' = b_y^k (1, b_y^l, 0)$ для некоторых $k \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{P}$. Не умаляя общности, будем считать, что $f'(x) \geq g'(x)$, т. е. $k \geq 0$. Заметим, что

$$f \vee g = (1, a_y^r, 0) \vee a_y^k (1, a_y^l, 0) = (1, a_y^r \vee a_y^{k+l}, 0) \in A.$$

Значит, $f' \vee g' = (1, b_y^r \vee b_y^{k+l}, 0) = (f \vee g)' \in A'$.

Случай 7.3: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$ и $1 = g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 7.4: $|\text{Im } g'| = 3$, $g'(x) = 0$ или $g'(y) = 0$. Тогда $f'g' / \max(f'g') = (fg / \max(fg))'$. Значит, $f'g' \in A'$ в силу (24), так как $fg / \max(fg) \in A$.

Случай 7.5: $g'(y) > g'(x) > 0$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) : Z(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда B — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$ и $1 = g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 7.6: $g'(x) > g'(y) > 0$. Тогда $g' = g'(x) (1, b_y^l, g'(z)/g'(x))$ для некоторого $l \in \mathbb{P}$. Положим $h = g'(x) (a_y^l f \vee f^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(y) \leq a_y^l f(y)$. Тогда $h = g'(x) (1, a_y^{r+l}, 0) \in [f] \subseteq A$. Значит, $f'g' = g'(x) (1, b_y^{r+l}, 0) = h' \in A'$.

Случай 8: $f' = (1, b_y^r, (b_y^r)^{1+p(t-1)})$, $r, p \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 8.1: $g' > 0$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (25), так как $f'g' > 0$.

Случай 8.2: $Z(g') \neq \emptyset$. Аналогичен случаю 7.

Итак, если A — подалгебра, то A' — подалгебра.

Обратно, пусть A — подмножество полукольца $C^\vee(X)$ такое, что его образ A' является подалгеброй. Заметим, что $\psi_T^{-1} = \psi_{T'}$, где $T' = (T'_x, T'_y, T'_z)$ и

$$T'_x = (b_x, a_x, t_x, s_x), \quad T'_y = (b_y, a_y, t_y, s_y), \quad T'_z = (b_z, a_z, t_z, s_z).$$

Поэтому, как было показано ранее, $\psi_{T'}(A') = A$ — подалгебра. $\square$

Обозначим через α_{1, ψ_T} автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, $|X| = 3$, который согласно предложению 16 индуцирует преобразование ψ_T .

Теорема 3. Для любого изоморфизма α_1 решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$ справедливы следующие утверждения:

1) отображение $\varphi_{\alpha_1}: X \rightarrow Y$, заданное правилом

$$\varphi_{\alpha_1}(x) = x' \iff \alpha_1(\text{spbMin}_x) = \text{spbMin}_{x'},$$

является гомеоморфизмом;

2) если $|X| \neq 3$, то α_1 индуцируется изоморфизмом полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, который действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1})$ для некоторого автоморфизма ψ_t полукольца $C(X, S)$;

3) если $|X| = 3$, то α индуцируется отображением полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, которое действует по правилу $f \mapsto \psi_T(f \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1})$ для некоторого преобразования ψ_T полукольца $C(X, S)$.

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 3].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение изоморфизма α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Отсюда и из утверждения 1) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что отображение φ_{α_1} является гомеоморфизмом пространств X и Y .

Отождествим точки пространств X и Y гомеоморфизмом φ_{α_1} . После чего, не умаляя общности, будем считать, что α_1 — автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ такой, что $\alpha_1: \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$.

Пусть $|X| \neq 3$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 2) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что ограничение изоморфизма α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ индуцируется ограничением на полуполе $U^\vee(X)$ некоторого автоморфизма ψ_t полукольца $C^\vee(X)$. Тогда $\alpha_1([f]) = \alpha_{1, \psi_t}([f])$ для всех u -подалгебр $[f]$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_1, \alpha_{1, \psi_t}: \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha_1 = \alpha_{1, \psi_t}$ по утверждению 1) предложения 12.

Пусть $|X| = 3$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма α_1 на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 3) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что найдется преобразование ψ_T полукольца $C^\vee(X)$ такое, что $\alpha_1 = \alpha_{1, \psi_T}$ на решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Тогда $\alpha_1([f]) = \alpha_{1, \psi_T}([f])$ для всех u -подалгебр $[f]$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_1, \alpha_{1, \psi_T}: \text{spbMin}_x \mapsto \text{spbMin}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha_1 = \alpha_{1, \psi_T}$ по утверждению 1) предложения 12. $\square$

Предложение 17. Произвольные автоморфизмы α_{1, ψ_t} и α_{1, ψ_T} , где

$$T: T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x), T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y), T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z),$$

равны тогда и только тогда, когда

$$(26) \quad b_x = a_x^t, t_x = s_x, \quad b_y = a_y^t, t_y = s_y, \quad b_z = a_z^t, t_z = s_z.$$

Доказательство. Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 9].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Если выполняется условие (26), то, очевидно, $\psi_t = \psi_T$. Значит, $\alpha_{1, \psi_t} = \alpha_{1, \psi_T}$.

Обратно, если $\alpha_{1, \psi_t} = \alpha_{1, \psi_T}$, то $\alpha_{1, \psi_t} = \alpha_{1, \psi_T}$ на решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Отсюда и из предложения 26 для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что условие (26) выполняется. $\square$

Замечание 8. Из предложения 17 получаем, что семейство автоморфизмов α_{1, ψ_T} строгим образом включает семейство автоморфизмов α_{1, ψ_t} . Вместе с теоремами 1 и 3 это означает, что в случае $|X| = |Y| = 3$ существуют изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$, которые не индуцируются изоморфизмами полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$.

REFERENCES

- [1] V.V. Sidorov, *Isomorphisms of lattices of subalgebras of the semifields of continuous positive functions with max-addition*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1493–1530. Zbl 07128004
- [2] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, New York, 1976. Zbl 0327.46040
- [3] I.M. Gelfand, A.N. Kolmogorov, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **22**:1 (1939), 11–15. Zbl 0021.41103
- [4] E. Hewitt, *Rings of real-valued continuous functions. I*, Trans. Am. Math. Soc., **64**:1 (1948), 45–99. Zbl 0032.28603
- [5] E.M. Vechtomov, *Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces*, Mat. Notes, **62**:5 (1997), 575–580. Zbl 0924.54021
- [6] V.V. Sidorov, *Lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions with the max-plus*, J. Math. Sci., **221**:3 (2017), 409–435. Zbl 06856055
- [7] E.M. Vechtomov, V.V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Tr. Inst. Mat. i Mech. UrO RAN **21**:3 (2015), 78–88.
- [8] V.V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras with unit of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Lobachevskii J. Math., **38**:4 (2017), 741–750. Zbl 1379.54016
- [9] V.V. Sidorov, *Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras*, Lobachevskii J. Math., **40**:1 (2019), 90–100. Zbl 07080623

VADIM VENIAMINOVICH SIDOROV
 VYATKA STATE UNIVERSITY,
 36, MOSKOVSKAYA STR.,
 KIROV, 610000, RUSSIA
 E-mail address: sedoy_vadim@mail.ru