Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Makhnev, I. N. Belousov, D. V. Paduchikh, Inverse problems of graph theory: graphs without triangles, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, Volume 18, Issue 1, 27–42

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.003>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.73.141

April 26, 2023, 15:55:52

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 27–42 (2021)

DOI 10.33048/semi.2021.18.003

УДК 519.17

MSC 05C25

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГРАФОВ:
ГРАФЫ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.А. МАХНЕВ, И.Н. БЕЛОУСОВ, Д.В. ПАДУЧИХ

ABSTRACT. Graph Γ_i for a distance-regular graph Γ of diameter 3 can be strongly regular for $i = 2$ or $i = 3$. Finding intersection array of graph Γ by the parameters of Γ_i is an inverse problem. Earlier direct and inverse problems have been solved by A.A. Makhnev, M.S. Nirova for $i = 3$ and by A.A. Makhnev and D.V. Paduchikh for $i = 2$. In this work it is considered the case when graph Γ_3 is strongly regular without triangles and $v \leq 100000$.

Keywords: distance regular graph, strongly regular graph without triangles.

ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Множество вершин графа Γ будем обозначать $V(\Gamma)$, а через $\bar{\Gamma}$ обозначим дополнение графа Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении

MAKHNEV, A.A., BELOUSOV, I.N., PADUCHIKH, D.V., INVERSE PROBLEMS OF GRAPH THEORY: GRAPHS WITHOUT TRIANGLES.

© 2021 МАХНЕВ А.А., БЕЛОУСОВ И.Н., ПАДУЧИХ Д.В.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

Поступила 2 марта 2020 г., опубликована 21 января 2021 г.

$\Gamma_{i-1}(u)$ с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе Γ числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются *числами пересечений* графа Γ (см. [1]). *Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$. *Сильно регулярным* графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется регулярный граф степени k на v вершинах, в котором для двух различных вершин a, b выполнено

$$|V([a] \cap [b])| = \begin{cases} \lambda, & \text{при } a \in [b], \\ \mu, & \text{при } a \notin [b]. \end{cases}$$

Очевидно, что сильно регулярный граф с $\mu \neq 0$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) \in \{i, j\}$.

Алгеброй Бозе-Меснера M дистанционно регулярного графа Γ с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ называется вещественная матричная алгебра с базисом $\{A_i \mid i = 0, \dots, D\}$, где A_i — матрица смежности графа Γ_i при $i \in \{1, \dots, 10\}$ и A_0 — единичная матрица порядка $|V(\Gamma)|$. Алгебра M имеет и другой базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i . Матрица перехода P от базиса $(A_0, A_1, \dots, A_D)$ к базису $(E_0, E_1, \dots, E_D)$ называется *матрицей собственных значений* графа Γ . Дистанционно регулярный граф называется *формально самодуальным*, если для его матрицы собственных значений выполняется равенство $P^2 = |V(\Gamma)|A_0$.

Относительно покомпонентного умножения $\circ$ выполняются равенства $E_i \circ E_j = \frac{1}{v} \sum_{k=0}^D q_{ij}^k E_k$. Числа q_{ij}^k называются *параметрами Крейна* и являются неотрицательными числами [1, теорема 2.3.2]. Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D$, такое, что $q_{ij}^k = 0$ при $|j - k| > 1$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α -частичной геометрией порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$,

$k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v, k, λ, μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v - k - 1, 1; 1, v - k - 1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ . В этом случае прямая и обратная задачи имеют решение.

Обратная задача для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3 решалась в [3]. Заметим, что в этом случае Γ имеет собственное значение равное -1 [1, предложение 4.2.17]. В [3, лемма 3] показано, что в дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с собственным значением -1 граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(b_0, b_1/c_2)$. Обратно для графа Γ_3 , являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(b_0, t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0 - \alpha + 1; 1, c_2, \alpha\}$.

В настоящей работе обратная задача теории графов уточняется для графа Γ с сильно регулярным графом Γ_3 , не имеющем треугольников.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников. Тогда Γ_3 — граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$, неглавными собственными значениями r , $-(\mu + r)$, причем $k = (r + 1)\mu + r^2$, $r \neq 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$.

Основной результат статьи

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v, (r + 1)\mu + r^2, 0, \mu)$, $v \leq 100000$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если $\mu = 1$ или $\mu = 4$, то граф не существует;
- (2) если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$;
- (3) если $\mu = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.
- (4) если $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$, то Γ имеет массив пересечений из таблицы 1.

В ходе доказательства теоремы 1 возникла идея описать графы, удовлетворяющие ее условиям и имеющие нецелое собственное значение.

Теорема 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с нецелым собственным значением и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$ (спектр 111^1 , $(1 + 2\sqrt{55})^{145}$, -1^{407} , $(1 - 2\sqrt{55})^{145}$), $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$ (спектр 230^1 ,

ТАБЛИЦА 1. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников с $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$ и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
(15, 6, 27)	(1458, 141, 0, 15)	{188, 162, 21; 1, 27, 168}
(14, 7, 28)	(2002, 161, 0, 14)	{230, 196, 21; 1, 28, 210}
(28, 8, 44)	(3872, 316, 0, 28)	{395, 352, 36; 1, 44, 360}
(36, 9, 54)	(5832, 441, 0, 36)	{539, 486, 45; 1, 54, 495}
(45, 10, 65)	(8450, 595, 0, 45)	{714, 650, 55; 1, 65, 660}
(16, 12, 41)	(8075, 352, 0, 16)	{594, 492, 28; 1, 41, 567}
(66, 12, 90)	(16200, 1002, 0, 66)	{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092}
(78, 13, 104)	(21632, 1261, 0, 78)	{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365}
(91, 14, 119)	(28322, 1561, 0, 91)	{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680}
(120, 16, 152)	(46208, 2296, 0, 120)	{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448}
(34, 17, 68)	(24752, 901, 0, 34)	{1325, 1156, 51; 1, 68, 1275}
(136, 17, 170)	(57800, 2737, 0, 136)	{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907}
(153, 18, 189)	(71442, 3231, 0, 153)	{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420}
(90, 21, 134)	(67520, 2421, 0, 90)	{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849}
(40, 25, 105)	(70930, 1665, 0, 40)	{2664, 2625, 65; 1, 105, 2600}

$(5 + 7\sqrt{65})/2^{253}, -1^{1495}, (5 - 7\sqrt{65})/2^{253}), \{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$ (спектр 335^1 , $(2 + 3\sqrt{111})^{536}, -1^{2479}, (2 - 3\sqrt{111})^{536}$) или $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$. (спектр $2959^1, (5 + 2\sqrt{4431})^{5380}, -1^{56759}, (5 - 2\sqrt{4431})^{5380}$).

Среди графов из заключения теоремы 1 выделены Q -полиномиальные графы.

Следствие 1. Если граф из заключения теоремы 1 является Q -полиномиальным, то он имеет массив пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, $\{188, 162, 21; 1, 27, 168\}$, $\{395, 352, 36; 1, 44, 360\}$, $\{539, 486, 45; 1, 54, 495\}$, $\{714, 650, 55; 1, 65, 660\}$, $\{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092\}$, $\{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365\}$, $\{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680\}$, $\{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448\}$, $\{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907\}$, $\{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420\}$.

Интересно, что любой из перечисленных графов Γ является формально самодуальным, в частности, $q_{33}^3 = 0$, более того граф Γ_2 сильно регулярен. Следующий результат классифицирует формально самодуальные дистанционно регулярные графы Γ , для которых Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников

Следствие 2. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, $k = r^2 + \mu(r + 1)$ формально самодуален тогда и только тогда, когда $\mu = r(r - 1)/2$, $c_2 = (r + 3)r/2$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{(r^2 + 2r - 1)(r + 2)/2, (r + 3)r^2/2, (r + 1)r/2; 1, (r + 3)r/2, (r + 2)(r + 1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4.

Графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 4, 12\}$ и $\{20, 10, 6; 1, 5, 15\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, но не существуют (в обоих случаях $q_{13}^1 < 0$).

В [7] было доказано, что дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 , причем Γ_3 граф без треугольников с $\mu = 6$ имеет массив пересечений $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.

По [8] графы с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ и $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существуют.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Всюду далее Γ — дистанционно регулярный диаметра s Γ_3 являющимся сильно регулярным графом без треугольников. По [3, лемма 3] $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф $pG_\alpha(b_0, t)$, при некоторых натуральных α, b_0, t , и Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0 - \alpha + 1; 1, c_2, \alpha\}$.

По [4, глава 8] граф Γ_3 является либо

- (1) полным двудольным графом, либо
- (2) графом с $0 < \mu < k$, имеющим собственные значения $r, -(\mu + r)$ и $k = (r+1)\mu + r^2$, причем μ делит $r^2(r^2 - 1)$, $\mu + 2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Рассмотрим случай 1. Предположим, что Γ_3 — полный двудольный граф. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — объединение двух изолированных клик, противоречие с тем, что Γ_3 связный граф как псевдогеометрический для $pG_\alpha(b_0, t)$. Итак, случай 1 невозможен.

Рассмотрим случай 2. Пусть Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v, k, 0, \mu)$ и собственными значениями $k = (r+1)\mu + r^2, r, -(\mu + r)$. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(b_0, r)$. Число вершин во второй окрестности вершины графа Γ_3 с одной стороны равно $k(k-1)/\mu$, с другой, равно степени графа $\bar{\Gamma}_3$, т.е. $b_0(r+1)$. Значит, $b_0 = k(\mu + r - 1)/\mu$. Далее, из равенства $\mu(\Gamma_3) = v - 2k - \lambda$ (см., например [1, теорема 1.3.1]) имеем $\alpha(r+1) = k(k-1)/\mu + k + 1 - 2k$ и $\alpha = (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)$. Из целочисленности α следует, что μ делит $r^2(r-1)$.

Осталось показать, что $r \neq 1$. При $r = 1$ граф Γ имеет массив $\{2\mu + 1, c_2, \mu + 1; 1, c_2, \mu + 1\}$ и в силу [1, предложение 4.1.6(i)] получим $c_2 = \mu + 1$. С другой стороны, по [1, теорема 5.4.1] должно выполняться одно из неравенств: либо $\mu + 1 \geq 3c_2/2$, либо $\mu + 1 \geq c_2 + b_2$, противоречие.

Предложение 1 доказано.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, СЛУЧАИ $\mu \in \{1, 2, 4, 6\}$

По предложению 1 Γ имеет массив пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$, где $v = 1 + k + k(k-1)/\mu$, $k = (r+1)\mu + r^2$, μ делит $r^2(r-1)$, где $r > 1$ — наибольшее неглавное собственное значение графа Γ_3 .

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ через L_1 обозначим трехдиагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

и через $(u_0(\theta_j) = 1, u_1(\theta_j) = \frac{\theta_j}{b_0}, u_2(\theta_j), u_3(\theta_j))^T$ — правый собственный вектор, отвечающий собственному значению θ_j матрицы L_1 . Заметим, что по [1, 4.1B]

собственные значения графа Γ совпадают с собственными значениями матрицы L_1 . Из [1, теорема 4.1.4 (Биггс)] кратности собственных значений графа Γ вычисляются по формуле

$$(1) \quad m_j = \frac{v}{\sum_{i=0}^3 k_i u_i(\theta_j)^2},$$

где $k_i = k_{i-1}b_{i-1}/c_i$ — число вершин в i -ой окрестности вершины и $v = k_0 + k_1 + k_2 + k_3$ — число вершин графа.

Используя формулу (1) получаем кратности неглавных собственных значений графа Γ :

$$(2) \quad m_{1,3} = \frac{2(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r}{f_1 \pm \sqrt{z}f_2},$$

$$(3) \quad m_2 = \frac{(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)}{(\mu + 2r)\mu},$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= c_2^2 \mu^2 r^3 - 2c_2 \mu^3 r^3 + \mu^4 r^3 - 4c_2 \mu^2 r^4 + 4\mu^3 r^4 - 2c_2 \mu r^5 + 6\mu^2 r^5 + 4\mu r^6 + r^7 + \\ &+ 3c_2^2 \mu^2 r^2 - 6c_2 \mu^3 r^2 + 3\mu^4 r^2 - 8c_2 \mu^2 r^3 + 8\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 - r^6 + 3c_2^2 \mu^2 r - \\ &- 2c_2 \mu^3 r + 3\mu^4 r + 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 + 2c_2 \mu r^3 - 2\mu^2 r^3 - 4\mu r^4 - r^5 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \\ &+ \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4, \\ f_2 &= c_2 \mu r^2 - \mu^2 r^2 - 2\mu r^3 - r^4 + 2c_2 \mu r - 2\mu^2 r - 2\mu r^2 + c_2 \mu + \mu^2 + 4\mu r + r^2, \\ z &= c_2^2 \mu^2 r^2 - 2c_2 \mu^3 r^2 + \mu^4 r^2 - 4c_2 \mu^2 r^3 + 4\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 + 4\mu r^5 + r^6 + \\ &+ 2c_2^2 \mu^2 r - 4c_2 \mu^3 r + 2\mu^4 r - 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 - 4\mu r^4 - 2r^5 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + \\ &+ 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4. \end{aligned}$$

Лемма 2.1. *Параметр μ не равен 1.*

Доказательство. Пусть μ равно 1. Тогда $k = r^2 + r + 1$. С другой стороны Γ_3 — граф Мура диаметра 2 и $k \in \{2, 3, 7, 57\}$ (см., например, [1, теорема 6.7.1]). Отсюда $r \in \{2, 7\}$.

Пусть $r = 2$. Тогда Γ_3 — граф Хоффмана-Синглтона, $v = 50$ и $k = 7$. Отсюда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{12}(14, 2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 2c_2, 3; 1, c_2, 12\}$. Из целочисленности кратности m_1 следует, что $c_2 = 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$. Противоречие с [1, теорема 4.1.5] для $i = j = 3$.

Если Γ — граф с параметрами $(3250, 57, 0, 1)$, то $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{392}(399, 7)$ и Γ имеет массив пересечений $\{399, 7c_2, 8; 1, c_2, 392\}$. Противоречие с [1, лемма 4.3.1], а именно, $k_3 a_3 = 57 \cdot 7$ — нечетное число. $\square$

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что число v вершин в графе Γ не превосходит 100000.

Лемма 2.2. *Если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.*

Доказательство. Если $\mu = 2$, то $k = (r + 1)^2 + 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(r + 1)k/2, c_2 r, 2 + r; 1, c_2, (r + 1)(k/2 - 1)\}$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 + z/4$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 - z/4$.

Используя формулы (2) и (3), находим кратности неглавных собственных значений:

$$m_1 = 2(r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r / ((r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16) + (r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4)\sqrt{z}),$$

$$m_2 = (r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)/4,$$

$$m_3 = 2(r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r / ((r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16) - (r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4)\sqrt{z}), \text{ где } z = r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16.$$

Если $m_1 = m_3$, то $r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4 = 0$ и $2c_2(r + 1) = r^3 + 3r^2 + 4r - 4$. В этом случае $r + 1$ делит 6 и $r = 1, 2$ или 5, соответственно $c_2 = 1, 2$ или 18. Теперь Γ_3 имеет параметры $(16, 5, 0, 2)$, $(56, 10, 0, 2)$ или $(704, 37, 0, 2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{5, 1, 3; 1, 1, 4\}$, $\{15, 4, 4; 1, 2, 12\}$ или $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. В первом случае получим противоречие с [1, лемма 4.1.6(i)], а во втором с [1, предложение 5.4.4.].

Пусть число z является квадратом и $z = u^2 = (2(r + 1)c_2 - (r^3 + 3r^2 + 4r - 4))^2 + 16r(r^2 + 3r + 4)$.

Имеются следующие решения $u = (4r(r^2 + 3r + 4)/t + t)$ и $c_2 = [u - 2t + (r^3 + 3r^2 + 4r - 4)]/(2(r + 1))$. При подстановке этих выражений в формулы для кратностей m_1 и m_3 получим $m_1 = (r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r/(4r^3 + 12r^2 + t^2 + 16r)$ и $m_3 = (r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)t^2/(4(4r^3 + 12r^2 + t^2 + 16r))$.

Первый массив, который удовлетворяет условиям целочисленности m_1, m_3 и c_2 , равен $\{578865, 571584, 106; 1, 5496, 578760\}$ ($r = 104, c_2 = 5496, t = 4576$).

Итак, Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.3. *Параметр μ не равен 4.*

Доказательство. Если $\mu = 4$, то Γ имеет массив пересечений $\{(r+3)k/4, c_2r, 4 + r; 1, c_2, (r+3)(k/4 - 1)\}$. Положим $r = 2w$ и $z^2 = 4w^6 - 8c_2w^4 + 28w^5 + 4c_2^2w^2 - 32c_2w^3 + 81w^4 + 4c_2^2w - 46c_2w^2 + 128w^3 + c_2^2 - 16c_2w + 120w^2 + 8c_2 + 64w + 16$. Тогда собственные значения равны $k = \theta_0 = 2w^3 + 7w^2 + 8w + 3$, $\theta_1 = w^3 - (c_2 - 4)w + 7/2w^2 - 1/2c_2 + 1/2z + 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = w^3 - (c_2 - 4)w + 7/2w^2 - 1/2c_2 - 1/2z + 1$.

Далее, кратности неглавных собственных значений равны $m_1 = 4(2w^2 + 5w + 4)(2w^2 + 3w + 2)(2w + 3)(w + 1)^2w/(8w^7 - 16c_2w^5 + 60w^6 + 8c_2^2w^3 - 72c_2w^4 + 190w^5 + 4zw^4 + 12c_2^2w^2 - 124c_2w^3 + 337w^4 - 4zc_2w^2 + 16zw^3 + 6c_2^2w - 78c_2w^2 + 368w^3 - 4zc_2w + 23zw^2 + c_2^2 + 248w^2 - zc_2 + 8zw + 8c_2 + 96w - 4z + 16)$,

$$m_2 = 1/2(2w^2 + 5w + 4)(2w + 3)(w + 1),$$

$$m_3 = 4(2w^2 + 5w + 4)(2w^2 + 3w + 2)(2w + 3)(w + 1)^2w/(8w^7 - 16c_2w^5 + 60w^6 + 8c_2^2w^3 - 72c_2w^4 + 190w^5 - 4zw^4 + 12c_2^2w^2 - 124c_2w^3 + 337w^4 + 4zc_2w^2 - 16zw^3 + 6c_2^2w - 78c_2w^2 + 368w^3 + 4zc_2w - 23zw^2 + c_2^2 + 248w^2 + zc_2 - 8zw + 8c_2 + 96w + 4z + 16).$$

Если $m_1 = m_3$, то $4zw^4 - 4zc_2w^2 + 16zw^3 - 4zc_2w + 23zw^2 - zc_2 + 8zw - 4z = 0$, поэтому $c_2(2w + 1)^2 = 4w^4 + 16w^3 + 23w^2 + 8w - 4$ и $2w + 1$ делит $16w^2 + 8w - 4$, противоречие. Значит, число $4w^6 - 8c_2w^4 + 28w^5 + 4c_2^2w^2 - 32c_2w^3 + 81w^4 + 4c_2^2w - 46c_2w^2 + 128w^3 + c_2^2 - 16c_2w + 120w^2 + 8c_2 + 64w + 16$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(w, c_2), [m_1, m_2, m_3]$:

$$(1, 2), [\frac{77}{17}, 55, \frac{280}{17}], \quad (1, 5), [10, 55, 11], \quad (1, 9), [\frac{154}{9}, 55, \frac{35}{9}], \quad (2, 6), [\frac{264}{19}, 231, \frac{2016}{19}], \\ (2, 10), [\frac{504}{13}, 231, \frac{1056}{13}], \quad (2, 13), [\frac{1848}{25}, 231, \frac{1152}{25}], \quad (3, 12), [\frac{2146}{67}, 666, \frac{25056}{67}],$$

$(3, 17), [\frac{696}{7}, 666, \frac{2146}{7}], (4, 20), [\frac{805}{13}, 1540, \frac{12650}{13}], (4, 26), [\frac{6325}{31}, 1540, \frac{25760}{31}],$
 $(4, 27), [\frac{14720}{57}, 1540, \frac{44275}{57}], (4, 32), [\frac{8855}{13}, 1540, \frac{4600}{13}], (5, 30), [\frac{15879}{149}, 3081, \frac{313560}{149}],$
 $(5, 37), [\frac{15678}{43}, 3081, \frac{79395}{43}], (6, 37), [\frac{25760}{263}, 5565, \frac{1075158}{263}], (6, 42), [\frac{17066}{101}, 5565, \frac{405720}{101}],$
 $(6, 50), [\frac{11270}{19}, 5565, \frac{68264}{19}], (6, 59), [\frac{85330}{29}, 5565, \frac{36064}{29}], (7, 56), [\frac{66308}{263}, 9316, \frac{1843072}{263}],$
 $(7, 65), [\frac{65824}{73}, 9316, \frac{464156}{73}], (8, 72), [\frac{29799}{83}, 14706, \frac{948024}{83}],$
 $(8, 82), [\frac{16929}{13}, 14706, \frac{136224}{13}], (8, 94), [\frac{566181}{65}, 14706, \frac{199584}{65}],$
 $(9, 78), [\frac{128925}{629}, 22155, \frac{11284280}{629}], (9, 90), [\frac{201505}{409}, 22155, \frac{7219800}{409}],$
 $(9, 101), [\frac{66850}{37}, 22155, \frac{604515}{37}], (10, 110), [\frac{162052}{247}, 32131, \frac{6456560}{247}],$
 $(10, 122), [\frac{322828}{133}, 32131, \frac{3241040}{133}], (10, 137), [\frac{3727196}{181}, 32131, \frac{1122880}{181}],$
 $(11, 103), [\frac{5817}{31}, 45150, \frac{1179189}{31}], (11, 132), [\frac{500262}{587}, 45150, \frac{21938400}{587}],$
 $(11, 141), [\frac{383922}{197}, 45150, \frac{7146600}{197}], (11, 145), [\frac{498600}{157}, 45150, \frac{5502882}{157}],$
 $(11, 153), [\frac{214398}{19}, 45150, \frac{511896}{19}].$

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{20, 10, 6; 1, 5, 15\}$ и Γ_3 имеет параметры $(77, 16, 0, 4)$. Противоречие с тем, что для этого графа $q_{13}^1 < 0$. $\square$

Лемма 2.4. Если $\mu = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.

Доказательство. Если $\mu = 6$, то $k = (r + 3)^2 - 3$, $r - 1$ не делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{(r + 5)k/6, c_2r, 6 + r; 1, c_2, (r + 5)(k/6 - 1)\}$. $z^2 = (36c_2^2 - 12c_2k + k^2)r^2 + 36c_2^2 - 60(c_2 - 1)k + 25k^2 + 2(36c_2^2 - 6(6c_2 - 1)k + 5k^2 + 108c_2r + 792c_2 + 36)$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1 = -1/12(6c_2 - k)r - 1/2c_2 + 5/12k + 1/12z - 1/2$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -1/12(6c_2 - k)r - 1/2c_2 + 5/12k - 1/12z - 1/2$.

Далее, их кратности равны $m_1 = 2(kr + 5k + 6)(kr + k - 6)k(r + 5)r / ((36c_2^2r^3 - 12c_2kr^3 + k^2r^3 + 108c_2^2r^2 - 84c_2kr^2 + 11k^2r^2 - 6zc_2r^2 + zkr^2 + 108c_2^2r - 132c_2kr + 35k^2r + 216c_2r^2 + 12kr^2 - 12zc_2r + 6zkr + 36c_2^2 - 60c_2k + 25k^2 + 1008c_2r + 72kr - 6zc_2 + 5zk - 18zr + 792c_2 + 60k + 36r - 66z + 36)(k - 6))$,

$$m_2 = (kr + k - 6)k(r + 6)(r + 5)/(12(k - 6)(r + 3)),$$

$$m_3 = 2(kr + 5k + 6)(kr + k - 6)k(r + 5)r / ((36c_2^2r^3 - 12c_2kr^3 + k^2r^3 + 108c_2^2r^2 - 84c_2kr^2 + 11k^2r^2 + 6zc_2r^2 - zkr^2 + 108c_2^2r - 132c_2kr + 35k^2r + 216c_2r^2 + 12kr^2 + 12zc_2r - 6zkr + 36c_2^2 - 60c_2k + 25k^2 + 1008c_2r + 72kr + 6zc_2 - 5zk + 18zr + 792c_2 + 60k + 36r + 66z + 36)(k - 6)).$$

Если $m_1 = m_3$, то $-6zc_2r^2 + zkr^2 - 12zc_2r + 6zkr - 6zc_2 + 5zk - 18zr - 66z = 0$, поэтому $6c_2(r + 1)^2 = kr^2 + 6kr + 5k - 18r - 66$, $r + 1$ делит 48 и 6 делит $k(r^2 + 5)$.

По [9, лемма 4.1] имеем $(a_1 - c_2)(c_2 + b_1) = 2c_2a_3$, поэтому $((r + 5)k/6 - c_2(r + 1) - 1)(r + 1) = 2(r + 5)$ и $(r + 5)(k(r + 1)/6 - 2) = c_2(r + 1)^2 + (r + 1)$. Отсюда $r + 1$ делит $2(r + 5)$ и $(r + 1)$ делит 8.

Если $r = 3$, то $3k = 4c_2 + 5$, Γ имеет массив пересечений $\{4(4c_2 + 5)/3, 3c_2, 9; 1, c_2, 4((4c_2 + 5)/3 - 2)\}$. В этом случае $k = (r + 3)^2 - 3 = 33$, $8(33 \cdot 4/6 - 2) = 16c_2 + 4$ и $c_2 = (8 \cdot 20 - 4)/16$, противоречие

Если $r = 7$, то $3k = 4c_2 + 2$, Γ имеет массив пересечений $\{8c_2 + 10, 7c_2, 13; 1, c_2, 8c_2 - 8\}$. В этом случае $k = (r + 3)^2 - 3 = 97$, $12(97 \cdot 12/6 - 2) = 64c_2 + 8$ и $c_2 = (12 \cdot 192 - 8)/64$, противоречие

Пусть $(36c_2^2 - 12c_2k + k^2)r^2 + 36c_2^2 - 60(c_2 - 1)k + 25k^2 + 2(36c_2^2 - 6(6c_2 - 1)k + 5k^2 + 108c_2r + 792c_2 + 36)$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(r, c_2), [m_1, m_2, m_3]$:

$(1, 6), [\frac{65}{14}, \frac{65}{2}, \frac{13}{7}], (1, 12), [\frac{65}{11}, \frac{65}{2}, \frac{13}{22}], (2, 5), [8, 77, 14]$ (число $(\mu+r-1)k/\mu = 7 \cdot 22/6$ не целое), $(2, 7), [\frac{616}{53}, 77, \frac{550}{53}], (3, 6), [\frac{110}{9}, 154, \frac{385}{9}], (3, 7), [\frac{77}{5}, 154, \frac{198}{5}],$
 $(3, 11), [\frac{770}{23}, 154, \frac{495}{23}], (4, 6), [\frac{138}{11}, 276, \frac{1127}{11}], (4, 11), [\frac{1127}{29}, 276, \frac{2208}{29}],$
 $(4, 14), [69, 276, 46], (5, 12), [\frac{1281}{31}, \frac{915}{2}, \frac{10675}{62}], (5, 19), [\frac{1708}{11}, \frac{915}{2}, \frac{1281}{22}],$
 $(6, 15), [\frac{1040}{17}, 715, \frac{5148}{17}], (6, 17), [\frac{4212}{43}, 715, \frac{11440}{43}], (6, 21), [220, 715, 144],$
 $(7, 7), [\frac{679}{47}, 1067, \frac{26675}{47}], (7, 25), [\frac{1067}{3}, 1067, \frac{679}{3}], (8, 22), [118, 1534, 767]$ (число $(\mu+r-1)k/\mu = 13 \cdot 118/6$ не целое), $(9, 24), [\frac{3619}{34}, \frac{4277}{2}, \frac{20163}{17}], (9, 26), [\frac{6721}{43}, \frac{4277}{2}, \frac{97713}{86}],$
 $(9, 34), [\frac{47047}{58}, \frac{4277}{2}, \frac{13959}{29}], (10, 24), [\frac{581}{8}, 2905, \frac{14027}{8}], (10, 33), [\frac{28054}{79}, 2905, \frac{116200}{79}],$
 $(10, 39), [1162, 2905, 664], (11, 35), [\frac{12545}{49}, 3860, \frac{110396}{49}], (11, 37), [\frac{110396}{289}, 3860, \frac{614705}{289}],$
 $(12, 40), [\frac{4144}{13}, 5032, \frac{39627}{13}], (12, 43), [\frac{58275}{49}, 5032, \frac{281792}{49}], (12, 49), [\frac{21312}{289}, 5032, \frac{15725}{289}],$
 $(12, 50), [\frac{4403}{2}, 5032, \frac{2331}{2}], (13, 50), [\frac{9867}{10}, \frac{12903}{2}, \frac{17204}{5}], (13, 56), [\frac{5865}{2}, \frac{12903}{2}, 1495],$
 $(14, 51), [\frac{13728}{29}, 8151, \frac{152152}{29}], (15, 43), [\frac{2675}{23}, 10165, \frac{164673}{23}],$
 $(15, 54), [\frac{1819}{5}, 10165, \frac{34561}{5}], (15, 57), [\frac{34561}{61}, 10165, \frac{409275}{61}],$
 $(15, 69), [\frac{34561}{7}, 10165, \frac{16371}{7}], (16, 54), [\frac{6265}{29}, 12530, \frac{258476}{29}],$
 $(16, 67), [\frac{64619}{51}, 12530, \frac{400960}{51}], (16, 76), [6265, 12530, 2864],$
 $(17, 70), [\frac{52801}{67}, \frac{30569}{2}, \frac{1410541}{134}], (18, 51), [\frac{24090}{239}, 18469, \frac{3290840}{239}],$
 $(18, 77), [\frac{6424}{7}, 18469, \frac{90666}{7}], (18, 81), [\frac{107310}{61}, 18469, \frac{738760}{61}],$
 $(18, 91), [\frac{184690}{19}, 18469, \frac{78840}{19}], (19, 99), [11914, 22126, 4921],$
 $(20, 92), [\frac{23144}{19}, 26300, \frac{361625}{19}], (21, 83), [\frac{39537}{134}, \frac{62075}{2}, \frac{1599052}{67}],$
 $(21, 89), [\frac{123004}{271}, \frac{62075}{2}, \frac{12849525}{542}], (21, 96), [\frac{57109}{66}, \frac{62075}{2}, \frac{768775}{33}],$
 $(21, 100), [\frac{109825}{79}, \frac{62075}{2}, \frac{3597867}{158}], (21, 108), [\frac{30751}{6}, \frac{62075}{2}, \frac{57109}{3}],$
 $(21, 112), [\frac{399763}{37}, \frac{62075}{2}, \frac{988425}{74}], (21, 116), [\frac{1427725}{82}, \frac{62075}{2}, \frac{276759}{41}],$
 $(22, 85), [\frac{13684}{57}, 36387, \frac{1617200}{57}], (22, 96), [\frac{36387}{76}, 36387, \frac{2138125}{76}],$
 $(22, 113), [\frac{777500}{251}, 36387, \frac{6404112}{251}], (22, 120), [\frac{44473}{4}, 36387, \frac{69975}{4}],$
 $(22, 125), [145548, 254709, 54736], (23, 117), [\frac{30285}{17}, 42399, \frac{541765}{17}],$
 $(24, 126), [2002, 49126, 37323], (24, 131), [\frac{1146717}{289}, 49126, \frac{10218208}{289}],$
 $(24, 144), [29029, 49126, 10296].$

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{(143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.

Но граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ не существует по [8]. $\square$

3. СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$

В этом разделе предполагается, что Γ_3 — граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$ и собственными значениями $r, -(\mu+r), k = (r+1)\mu + r^2$, причем $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$ и $v \leq 100000$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.

Лемма 3.1. *Если $v \leq 266$, то графов нет.*

Доказательство. Если $v \leq 266$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(16, 5, 0, 2)$, $(50, 7, 0, 1)$, $(56, 10, 0, 2)$, $(77, 16, 0, 4)$, $(100, 22, 0, 6)$, $(162, 21, 0, 3)$, $(176, 25, 0, 4)$, $(210, 33, 0, 6)$ или $(266, 45, 0, 9)$.

В случае $(162, 21, 0, 3)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, противоречие с тем, что число ka_1 нечетно.

В случае $(266, 45, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{55, 3c_2, 12; 1, c_2, 44\}$, поэтому c_2 четно и делит $r^2(r-1) = 18$. Противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения графа Γ не целая. $\square$

Лемма 3.2. *Если $267 \leq v \leq 650$, то графов нет.*

Доказательство. Если $267 \leq v \leq 650$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(638, 49, 0, 4)$, $(650, 55, 0, 5)$.

В случае $(552, 76, 0, 12)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{95, 4c_2, 16; 1, c_2, 80\}$, противоречие.

В случае $(638, 49, 0, 4)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{98, 5c_2, 9; 1, c_2, 90\}$, противоречие.

В случае $(650, 55, 0, 5)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{99, 5c_2, 10; 1, c_2, 90\}$, противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Если $651 \leq v \leq 1300$, то Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.*

Доказательство. Если $651 \leq v \leq 1300$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(667, 96, 0, 16)$, $(704, 37, 0, 2)$, $(784, 116, 0, 20)$, $(800, 85, 0, 10)$, $(1073, 64, 0, 4)$, $(1080, 78, 0, 6)$, $(1178, 99, 0, 9)$, $(1190, 145, 0, 20)$, $(1276, 50, 0, 2)$.

В случае $(667, 96, 0, 16)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{114, 4c_2, 20; 1, c_2, 95\}$, противоречие.

В случае $(784, 116, 0, 20)$ имеем $r = 4$ и $\mu = 20$ не делит $r^2(r-1)$, противоречие.

В случае $(800, 85, 0, 10)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

В случае $(1178, 99, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{154, 6c_2, 15; 1, c_2, 140\}$, противоречие.

В случае $(1190, 145, 0, 20)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{174, 5c_2, 25; 1, c_2, 150\}$, противоречие. $\square$

По [8] граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существует.

Лемма 3.4. *Если $v \leq 100000$, то Γ имеет массив пересечений из таблицы 2.*

Доказательство. Заметим, что $v = (r\mu + r^2 + 2\mu + r)(r\mu + r^2 + \mu - r)/\mu$. Поэтому $1 \leq r \leq 36$.

С помощью компьютерного перебора по $r \in \{2, 3, \dots, 36\}$ и по μ , пробегающем все делители $r^2(r-1)$, $\mu \leq r(r+1)$ получаем таблицу 2. $\square$

Для графов с массивами пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, $\{279, 245, 28; 1, 35, 252\}$, $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$, $\{377, 297, 27; 1, 33, 351\}$, $\{483, 363, 22; 1, 33, 462\}$, $\{923, 847, 66; 1, 77, 858\}$, $\{935, 885, 36; 1, 59, 900\}$, $\{2159, 2025, 120; 1, 135, 2040\}$, $\{4179, 3971, 190; 1, 209, 3990\}$, $\{1819, 1617, 35; 1, 77, 1785\}$ число ka_1 нечетно. Поэтому указанные графы не существуют.

ТАБЛИЦА 2. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
(1, 2, 5)	(50, 7, 0, 1)	{14, 10, 3; 1, 5, 12}
(3, 3, 9)	(162, 21, 0, 3)	{35, 27, 6; 1, 9, 30}
(6, 4, 14)	(392, 46, 0, 6)	{69, 56, 10; 1, 14, 60}
(2, 5, 18)	(704, 37, 0, 2)	{111, 90, 7; 1, 18, 105}
(10, 5, 20)	(800, 85, 0, 10)	{119, 100, 15; 1, 20, 105}
(6, 6, 21)	(1080, 78, 0, 6)	{143, 126, 12; 1, 21, 132}
(15, 6, 27)	(1458, 141, 0, 15)	{188, 162, 21; 1, 27, 168}
(14, 7, 28)	(2002, 161, 0, 14)	{230, 196, 21; 1, 28, 210}
(21, 7, 35)	(2450, 217, 0, 21)	{279, 245, 28; 1, 35, 252}
(28, 8, 44)	(3872, 316, 0, 28)	{395, 352, 36; 1, 44, 360}
(12, 9, 33)	(3552, 201, 0, 12)	{335, 297, 21; 1, 33, 315}
(18, 9, 33)	(4032, 261, 0, 18)	{377, 297, 27; 1, 33, 351}
(36, 9, 54)	(5832, 441, 0, 36)	{539, 486, 45; 1, 54, 495}
(6, 10, 39)	(4732, 166, 0, 6)	{415, 390, 16; 1, 39, 400}
(45, 10, 65)	(8450, 595, 0, 45)	{714, 650, 55; 1, 65, 660}
(11, 11, 33)	(6050, 253, 0, 11)	{483, 363, 22; 1, 33, 462}
(55, 11, 77)	(11858, 781, 0, 55)	{923, 847, 66; 1, 77, 858}
(16, 12, 41)	(8075, 352, 0, 16)	{594, 492, 28; 1, 41, 567}
(66, 12, 90)	(16200, 1002, 0, 66)	{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092}
(78, 13, 104)	(21632, 1261, 0, 78)	{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365}
(91, 14, 119)	(28322, 1561, 0, 91)	{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680}
(21, 15, 59)	(15522, 561, 0, 21)	{935, 885, 36; 1, 59, 900}
(105, 15, 135)	(36450, 1905, 0, 105)	{2159, 2025, 120; 1, 135, 2040}
(6, 16, 76)	(21660, 358, 0, 6)	{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232}
(120, 16, 152)	(46208, 2296, 0, 120)	{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448}
(34, 17, 68)	(24752, 901, 0, 34)	{1325, 1156, 51; 1, 68, 1275}
(136, 17, 170)	(57800, 2737, 0, 136)	{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907}
(153, 18, 189)	(71442, 3231, 0, 153)	{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420}
(6, 19, 99)	(38962, 481, 0, 6)	{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900}
(171, 19, 209)	(87362, 3781, 0, 171)	{4179, 3971, 190; 1, 209, 3990}
(14, 21, 77)	(40768, 749, 0, 14)	{1819, 1617, 35; 1, 77, 1785}
(90, 21, 134)	(67520, 2421, 0, 90)	{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849}
(6, 24, 126)	(88452, 726, 0, 6)	{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480}
(6, 24, 144)	(88452, 726, 0, 6)	{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480}
(40, 25, 105)	(70930, 1665, 0, 40)	{2664, 2625, 65; 1, 105, 2600}

4. ГРАФЫ С НЕЦЕЛЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$ и одно из собственных значений Γ нецелое.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $c_2 = \mu + (-2\mu + 2r(r-1)\mu + 2r(r-1)(r+1)\mu + r^2(r-1)(r+1))/((\mu(r+1)^2));$

(2) $\mu(r+1)$ делит $-2\mu^2 + 2r(r-1)\mu$, $r+1$ делит $-2\mu + 2r(r-1)$ и $r+1$ делит $2\mu - 4$.

Доказательство. Кратность собственного значения θ_1 графа Γ равна

$$m_1 = 2(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r / (c_2^2 \mu^2 r^3 - 2c_2 \mu^3 r^3 + \mu^4 r^3 - 4c_2 \mu^2 r^4 + 4\mu^3 r^4 - 2c_2 \mu r^5 + 6\mu^2 r^5 + 4\mu r^6 + r^7 + 3c_2^2 \mu^2 r^2 - 6c_2 \mu^3 r^2 + 3\mu^4 r^2 - 8c_2 \mu^2 r^3 + 8\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 - r^6 + 3c_2^2 \mu^2 r - 2c_2 \mu^3 r + 3\mu^4 r + 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 + 2c_2 \mu r^3 - 2\mu^2 r^3 - 4\mu r^4 - r^5 - zc_2 \mu r^2 + z\mu^2 r^2 + 2z\mu r^3 + zr^4 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4 - 2zc_2 \mu r + 2z\mu^2 r + 2z\mu r^2 - zc_2 \mu - z\mu^2 - 4z\mu r - zr^2), где $z = (2(2\mu - 1)r^5 + r^6 - (2(c_2 + 2)\mu - 6\mu^2 - 1)r^4 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 - 4(c_2 \mu^2 - \mu^3)r^3 - (2(c_2 - 2)\mu^3 - \mu^4 - (c_2^2 - 4c_2 - 2)\mu^2 - 2c_2 \mu)r^2 - 2(2c_2 \mu^3 - \mu^4 - (c_2^2 + 4c_2)\mu^2)r)^{1/2}$.$$

Поэтому одно из собственных значений Γ не целое, только в случае когда $-zc_2 \mu r^2 + z\mu^2 r^2 + 2z\mu r^3 + zr^4 - 2zc_2 \mu r + 2z\mu^2 r + 2z\mu r^2 - zc_2 \mu - z\mu^2 - 4z\mu r - zr^2 = 0$.

Отсюда, $c_2 = (\mu^2 r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2 r + 2\mu r^2 - \mu^2 - 4\mu r - r^2) / ((\mu(r+1)^2))$, т.е. $c_2 = \mu + (-2\mu + 2r(r-1)\mu + 2r(r-1)(r+1)\mu + r^2(r-1)(r+1)) / ((\mu(r+1)^2))$.

Поэтому $\mu(r+1)$ делит $-2\mu^2 + 2r(r-1)\mu$, $r+1$ делит $-2\mu + 2r(r-1)$, а значит, $r+1$ делит $2\mu - 4$. $\square$

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu = (y(r+1)+4)/2$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$ или Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$;

(2) $r^2(r-1) = \mu x$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$, $2r^2(r-1) = (y(r+1)+4)x$ и $c_2 = \mu + 2(r-1) + (x-y-2)/(r+1)$;

(3) $x \equiv -1 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$, $y \equiv -3 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$ и $2r^2(r-1) = ((s(r+1)-3(r+1,4))(r+1)+4(r+1,4))(t(r+1)-(r+1,4))/(r+1,4)^2$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\mu = (y(r+1)+4)/2$ для некоторого $y \in \mathbb{Z}$. Далее, $y > -4/(r+1)$, а значит, $y \geq -1$. Но при $y = -1$ имеем $\mu = 0$, противоречие, а при $y = 0$ параметр μ равен 2 и по лемме 2.2 граф Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. Далее будем считать, что $y \in \mathbb{N}$.

Напомним, что из целочисленности c_3 следует делимость $r^2(r-1)$ на μ . Поэтому $r^2(r-1) = \mu x$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$ и $2r^2(r-1) = (y(r+1)+4)x$. Тогда $c_2 = (\mu + (-y(r+1)-4+2r(r-1)+2r(r-1)(r+1)+x(r+1)))/(r+1)^2$ и $c_2 = \mu + 2(r-1) + (x-y-2)/(r+1)$.

Из равенства $2r^2(r-1) = (y(r+1)+4)x$ следует, что $x \equiv -1 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$, $y \equiv -3 \pmod{(r+1)/(r+1,4)}$ и $2r^2(r-1) = ((s(r+1)-3(r+1,4))(r+1)+4(r+1,4))(t(r+1)-(r+1,4))/(r+1,4)^2$. $\square$

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) число r нечетно;

(2) если $r = 4m+1$, то Γ имеет массив пересечений: $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$, $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$ или $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$.

Доказательство. Пусть $r = 2m$. Тогда $8m^2(2m-1) = ((s(2m+1)-3)(2m+1)+4)(t(2m+1)-1)$ и $(8st-16)m^3 + (12st-12t-4s+8)m^2 + (6st-4t-4s+6)m + st+t-s-1 = 0$

При $st \geq 2$ левая часть уравнения положительна при $m > 0$, поэтому $s = t = 1$. Имеем

$-8m^3 + 4m^2 + 4m = 0$, $-2m^2 + m + 1 = 0$, $m = 1$. Отсюда $r = 2$, $x = 2$, $y = 0$, $\mu = 2$ и $c_2 = 4/3$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $r = 4m+1$. Тогда $x = t(2m+1)-1$, $y = s(2m+1)-3$.

Далее, $4(4m+1)^2m = ((s(2m+1)-3)(2m+1)+2)(t(2m+1)-1)$, $(8st-64)m^3 + (12st-12t-4s-32)m^2 + (6st-8t-4s+2)m + st-s-t+1 = 0$ и $8(st-8)m^3 + ((12t-4)(s-1)-36)m^2 + (2st+4(t-1)(s-2)-6)m + (t-1)(s-1) = 0$.

При $st \geq 8$ и $s > 1$ левая часть равенства положительна при $m > 0$. Поэтому либо $s = 1$ либо $st < 8$.

Пусть $s = 1$. Тогда $4(t-8)m^2 - 18m - (t+1) = 0$, $t = 8 + 9/(2m-1)$ и $m \in \{1, 2, 5\}$.

При $m = 1$ имеем $r = 5, x = 50, y = 0, \mu = 2, c_2 = 18$ и Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.

При $m = 2$ имеем $r = 9, t = 11, x = 54, y = 2, \mu = 12, c_2 = 33$ и Γ имеет массив пересечений $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$.

При $m = 5$ имеем $r = 21, t = 9, x = 98, y = 8, \mu = 90, c_2 = 134$ и Γ имеет массив пересечений $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$.

Рассмотрим случай $st < 8$ и $s > 1$.

Тогда пара (s, t) принимает одно из следующих значений: $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1)$.

Уравнение $8(st-8)m^3 + ((12t-4)(s-1)-36)m^2 + (2st+4(t-1)(s-2)-6)m + (t-1)(s-1) = 0$ имеет положительные целые решения только в случаях $(s, t) = (3, 2)$ и $(7, 1)$.

В случае $(s, t) = (3, 2)$ имеем $m = 1, r = 3, x = 5, y = 6$ и $x - y - 2$ не делится на $(r+1)$, противоречие.

В случае $(s, t) = (7, 1)$ имеем $m = 2, r = 9, x = 4, y = 32, \mu = 162, c_2 = 175$ и Γ имеет массив пересечений $\{1785, 1575, 171; 1, 175, 1615\}$, противоречие с тем, что $m_1 = 987/2$. $\square$

Лемма 4.4. Если $r = 4m - 1$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) $x = tm - 1, y = sm - 3$ и $(x - y - 2)/(r + 1) = (t - s)/4$ — целое число;
- (2) $(st - 32)m^2 + (32 - s - 3t)m + t - 7 = 0$.
- (3) $t \geq 3$ и если $m \leq 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$.

Доказательство. Пусть $r = 4m - 1$. Тогда $x = tm - 1, y = sm - 3$.

Из целочисленности c_2 следует, что $(x - y - 2)/(r + 1) = (tm - sm)/(4m) = (t - s)/4$ — целое число.

Из равенства $2r^2(r - 1) = ((s(r + 1) - 3(r + 1, 4))(r + 1) + 4(r + 1, 4))(t(r + 1) - (r + 1, 4))/(r + 1, 4)^2$ следует $2(4m - 1)^2(4m - 2) = ((sm - 3)4m + 4)(tm - 1)$. Поэтому $(4st - 128)m^3 + (128 - 4s - 12t)m^2 + (4t - 28)m = 0$ и $(st - 32)m^2 + (32 - s - 3t)m + t - 7 = 0$.

Пусть $m = 1$. Тогда $st - 32 + 32 - s - 3t + t - 7 = 0$, $st - s - 2t - 7 = 0$, $s(t - 1) - 2(t - 1) - 9 = 0$, $(s - 2)(t - 1) = 9$. Поэтому $(s, t) \in \{(3, 10), (5, 4), (11, 2)\}$. Во всех случаях 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 1$. Тогда $(s - 32)m^2 + (29 - s)m - 6 = 0$, $sm(m - 1) - 32m^2 + 29(m - 1) + 23 = 0$, $(sm + 29)(m - 1) = 32m^2 - 23$, $m - 1$ делит 9 и $(s, m) \in \{(38, 2), (115, 4)\}$. В любом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 2$. Тогда $(2s - 32)m^2 + (26 - s)m - 5 = 0$, $sm(2m - 1) - 32m^2 + 13(2m - 1) + 8 = 0$, $(sm + 13)(2m - 1) = 8(4m^2 - 1)$, $sm + 13 = 2m + 1$, $m(s - 2) = -12$ и $(s, m) = (1, 12)$. В этом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $m = 2$. Тогда $4st - 32 \cdot 4 + 32 \cdot 2 - 2s - 6t + t - 7 = 0$, $2s(2t - 1) - 3(2t - 1) + t - 74 = 0$, $(2s - 3)(2t - 1) = 74 - t$. Поэтому $(s, t) \in \{(38, 1), (3, 11), (2, 25)\}$. В первом

и третьем случаях 4 не делит $t - s$. При $(s, t) = (3, 11)$ имеем $r = 7, x = 21, y = 3, \mu = 14, c_2 = 28$ и Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$. $\square$

Завершим доказательство теоремы 2. Из равенства $m^2st - 32m^2 + 32m - ms - 3mt + t - 32m^2 + 32m - 7 = 0$ следует $ms(mt - 1) - 3(mt - 1) + t - 32m^2 + 32m - 10 = 0$ и $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$.

Если t четно, то левая часть равенства $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$ нечетна, а правая четна, противоречие.

Пусть t нечетно. Если m делится на 4, то из равенства $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$ следует, что t сравнимо с 3 по модулю 4. Если же m сравнимо с 2 по модулю 4, то $t + 2s - 1$ делится на 4, поэтому снова t сравнимо с 3 по модулю 4. Теперь либо $t = 3, s = 11$ и $m^2 + 12m - 4 = 0$, либо $t = 3, s = 7$ и $11m^2 - 16m + 4 = 0$, либо $t = 7, s = 3$ и $11m^2 - 8m = 0$, либо $t = 7, s = 7$ и $17m^2 - 4m = 0$, либо $t = 11, s = 3$ и $m^2 - 4m + 4 = 0$. В любом случае либо имеем противоречие, либо $m = 2$ и по лемме 3.4 граф Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$.

Теорема 2 доказана.

5. ФОРМАЛЬНО САМОДУАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников.

Лемма 5.1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с целыми собственными значениями и массивом пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, $k = r^2 + \mu(r + 1)$. Тогда

$$(4) \quad c_2 = -(\mu^2r + 2\mu r^2 + r^3 + \mu^2 - r^2 - t)t/((\mu^2 + 2\mu r - rt - t)\mu)$$

для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$, делящегося на μ .

Доказательство. Одно из собственных значений графа Γ имеет вид

$$\theta = -1/2(c_2\mu r - \mu^2r - 2\mu r^2 - r^3 + c_2\mu - \mu^2 + r^2 + 2\mu - \sqrt{z})/\mu,$$

где $z = c_2^2\mu^2r^2 - 2c_2\mu^3r^2 + \mu^4r^2 - 4c_2\mu^2r^3 + 4\mu^3r^3 - 2c_2\mu r^4 + 6\mu^2r^4 + 4\mu r^5 + r^6 + 2c_2^2\mu^2r - 4c_2\mu^3r + 2\mu^4r - 4c_2\mu^2r^2 + 4\mu^3r^2 - 4\mu r^4 - 2r^5 + c_2^2\mu^2 + 2c_2\mu^3 + \mu^4 + 8c_2\mu^2r + 2c_2\mu r^2 - 2\mu^2r^2 + r^4$.

Преобразуем данное выражение $\mu^2(r + 1)^2c_2^2 - 2\mu(\mu^2r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2r + 2\mu r^2 - \mu^2 - 4\mu r - r^2)c_2 + (\mu r + r^2 + \mu - r)^2(\mu + r)^2$.

Заметим, что $(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r)(r + 1) = \mu^2r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2r + 2\mu r^2 + \mu^2 - r^2$. Поэтому

$$z = (\mu(r + 1)c_2 - (\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r))^2 + 4(\mu + 2r)\mu^2c_2.$$

По условию z является квадратом целого числа и, решая диофантово уравнение $x^2 - y^2 = 4N$, имеем

$\mu(r + 1)c_2 - (\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r) = (\mu + 2r)\mu^2c_2/t - t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

Отсюда

$$(5) \quad c_2 = (\mu^2r + 2\mu r^2 + r^3 + \mu^2 - r^2 + t)t/((\mu^2 + 2\mu r + rt + t)\mu)$$

для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

Далее, $t^2 = u\mu$ для некоторого целого положительного числа u . Умножив числитель и знаменатель правой части равенства 5 на u получим $c_2 = (\mu t^2 r + 2t^2 r^2 + ur^3 + \mu t^2 - ur^2 + tu)/((\mu^2 + 2\mu r + rt + t)t)$.

Напомним, что $r^2(r-1) = x\mu$ для некоторого целого положительного числа x . Поэтому $c_2 = (\mu tr + 2tr^2 + tx + \mu t + u)/(\mu^2 + 2\mu r + rt + t)$. Отсюда t делит u^2 и, с учетом равенства $t^2 = u\mu$, имеем $t = y\mu$ и $u = y^2\mu$ для некоторого натурального числа y . □

Лемма 5.2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k = r^2 + \mu(r+1)$ и целыми собственными значениями. Если Γ формально самодуален, то $\mu = r(r-1)/2$, $c_2 = (r+3)r/2$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{(r^2 + 2r - 1)(r + 2)/2, (r + 3)r^2/2, (r + 1)r/2; 1, (r + 3)r/2, (r + 2)(r + 1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4.

Доказательство. Заметим, что кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $m_2 = (\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)/((\mu + 2r)\mu)$, а $k_2 = (\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r/\mu$. Так как Γ формально самодуален, то $m_2 = k_2$ и $\mu = r(r-1)/2$.

В силу того, что $k_1 \neq k_3$ граф Γ имеет целые собственные значения и по лемме 5.1 $c_2 = -2(r^5 + 3r^4 - r^3 - 3r^2 - 4t)t/((r^4 + 2r^3 - 3r^2 - 4rt - 4t)(r-1)r)$.

Из равенства $k_1 = m_1$ имеем $t = -(r+3)(r-1)r^2/4$ или $(r+3)^2(r-1)r^2/(4(r+1))$.

В первом случае имеем $c_2 = (r+3)r/2$.

Во втором случае $c_2 = (r+3)^2(r-1)r/(2(r+1)^2)$, следовательно $(r+1)^2$ делит $4(r-1)$, противоречие.

Если r сравнимо с 3 по модулю 4, то число b_0a_1 нечетно, противоречие. Лемма доказана. □

Следствие 2 доказано.

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073
- [2] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Inverse problems in the theory of distance-regular graphs*, Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1, **307** (2019), S88–S98. Zbl 1441.05247
- [3] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular Shilla graphs*, Math. Notes, **103**:5 (2018), 780–792. Zbl 1394.05027
- [4] P. Cameron, J.H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, London Math. Soc. Student Texts **22**, Cambr. Univ. Press., Cambridge etc., 1991. Zbl 0743.05004
- [5] A. Neumaier, *Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$* , Arch. Math., **33** (1979), 392–400. Zbl 0407.05043
- [6] A.J. Hoffman, R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameters 2 and 3*, IBM J. Res. Dev., **4**, 1960, 497–504. Zbl 0096.38102
- [7] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3* , Sib. Electron. Math. Izv., **15** 2018, 175–185. Zbl 1430.05029
- [8] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova, *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ and $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ do not exist*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1254–1259. Zbl 1425.05072

- [9] S. Bang, J. Koolen, *Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvalue -1* , Linear Algebra Appl., **531** (2017), 38–53. Zbl 1370.05130
- [10] A.E. Brouwer, *A table of parameters of strongly regular graphs*, homepage, <https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html>

ALEXANDR ALEXEEVICH MAKHNEV
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
Email address: makhnev@imm.uran.ru

IVAN NIKOLAEVICH BELOUSOV
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
Email address: i_belousov@mail.ru

DMITRII VIKTOROVICH PADUCHIKH
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: dpaduchikh@gmail.com