A. A. Korobov, O. A. Korobov, On the discriminant of a quadratic field with intermediate fractions of negative norm and the decomposability of its representing polynomial, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2021, Volume 18, Issue 1, 319–331

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.021>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 12:45:58

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 319–331 (2021)

УДК 511.528.2

DOI 10.33048/semi.2021.18.021

MSC 11D09

О ДИСКРИМИНАНТЕ КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ДРОБЯМИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ НОРМЫ И РАЗЛОЖИМОСТИ ЕГО ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО МНОГОЧЛЕНА

А.А. КОРОБОВ, О.А. КОРОБОВ

ABSTRACT. The work is devoted to the study of Diophantine equation $x^2 - y^2(p^2 - 4q) = 4t$, where $p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k)$, $q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1$, $l = k + m(k^2 - 1)$, numbers k, m, u are nonnegative integers, number k is odd, and the right hand side $4t$ of the equation is sufficiently small positive integer. We give a complete description of solutions of the Diophantine equation.

Keywords: diophantine equation, integer solutions, generalized Pell's equation, quadratic fields, unit group, diophantine approximations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть a, b — произвольные натуральные числа. Рассмотрим неоднородное уравнение Пелля

$$x^2 - y^2(a^2 - 4b) = 4t. \quad (1)$$

При условии $0 < t < 2\sqrt{a^2 - 4b}$ при некоторых значениях пар (a, b) можно дать простой критерий разрешимости уравнения (1) в натуральных числах. Ясно, что достаточно ограничиться такими решениями (x, y) уравнения (1), при которых числа x и y взаимно просты. При этом дополнительном предположении в статье [1] рассмотрен случай $b = 1$, a — нечётное и $a > 1$, а в статье [2] рассмотрен более общий случай $a = kb$, k, b — нечётные и $k > 1$. Оказалось, что решения уравнения (1) имеются лишь при $t = 1$, $t = b$, $t = a + b + 1$.

KOROBOV, A.A., KOROBOV, O.A., ON THE DISCRIMINANT OF A QUADRATIC FIELD WITH INTERMEDIATE FRACTIONS OF NEGATIVE NORM AND THE DECOMPOSABILITY OF ITS REPRESENTING POLYNOMIAL.

© 2021 Коробов А.А., Коробов О.А.

Поступила 11 июня 2019 г., опубликована 26 марта 2021 г.

Все эти результаты непосредственно вытекают из основных результатов данной статьи.

Теорема 1. Пусть k, m, t — неотрицательные целые числа, k — нечётное, m — чётное. Пусть $k > 1$, $q = km(k^2 - 2) + 1$, $p = k + m(k^4 - 3k^2 + 1)$, $d = p^2 - 4q$. Если $0 < t < 2\sqrt{d}$, и уравнение $x^2 - y^2d = 4t$ имеет такое решение (x, y) в натуральных числах, что числа x и y взаимно простые, то либо $t = 1$, либо $t = q$, либо $t = p + q + 1$, либо $t = p + 2q + m(2k^2 + k - 2)$, либо $t = p + 2q + 2km(k + 1)$.

Теорема 2. Пусть k, m, u, t — неотрицательные целые числа, k — нечётное. Пусть $k > 1$, $l = k + m(k^2 - 1)$,

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$. Если $0 < t < 2\sqrt{d}$, и уравнение $x^2 - y^2d = 4t$ имеет такое решение (x, y) в натуральных числах, что числа x и y взаимно простые, то либо $t = 1$, либо $t = q$, либо $t = 1 + (k^2 - 1)^2u$, либо $t = q + (k^2 - 1)u$, либо

$$t = p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(m - u),$$

либо $t = p + q + 1$, либо

$$t = p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2).$$

Из теоремы 2 можно получить такое следствие.

Следствие 1. Пусть k, m, t — неотрицательные целые числа, k — нечётное. Пусть $k > 1$, $u = km + 1$, $p = ku - m$, $d = p^2 - 4u$. Если $0 < t < 2\sqrt{d}$, и уравнение $x^2 - y^2d = 4t$ имеет такое решение (x, y) в натуральных числах, что числа x и y взаимно простые, то либо $t = 1$, либо $t = u$, либо $t = p + u + 1$, либо $t = p + 2u + 2m$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы будем использовать обозначения, связанные с непрерывными дробями, следуя [3]. Пусть $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$ — разложение числа α в непрерывную дробь. Всюду ниже в этой статье для разложения числа α в непрерывную дробь будет использоваться другое более удобное обозначение, а именно $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$. Если в разложении α после элементов $a_0, \dots, a_{s-1}$ наступает периодическое повторение элементов $a_s, \dots, a_{s+k-1}$, то будем записывать α в виде:

$$\alpha = \langle a_0, \dots, a_{s-1}, \overline{a_s, \dots, a_{s+k-1}} \rangle,$$

в частности, в случае чисто периодического разложения, то есть при $s = 0$, в виде

$$\alpha = \overline{a_0, \dots, a_{k-1}}.$$

Определение 1. Пусть $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$ — разложение числа α в непрерывную дробь, P_i и Q_i — числитель и знаменатель i -й подходящей дроби к α , причём числа P_i и Q_i взаимно просты. Напомним, что $P_{-1} = Q_0 = 1$, $Q_{-1} = 0$. Промежуточной дробью между $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й подходящими дробями к α называется дробь $\frac{p}{q}$, где $p = mP_n + P_{n-1}$, $q = mQ_n + Q_{n-1}$, $m \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$.

Следующее утверждение доказано в [1].

Предложение 1. Пусть иррациональное число $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ и рациональное число $\frac{r}{s}$ ($(r, s) = 1$) с условием $s \geq \max\{2, Q_1\}$ таковы, что $|\alpha - \frac{r}{s}| < \frac{2}{s^2}$. Пусть $R_k = P_k + 2P_{k-1}$, $S_k = Q_k + 2Q_{k-1}$, $U_k = 2P_k - P_{k-1}$, $V_k = 2Q_k - Q_{k-1}$. Тогда существует натуральное число n такое, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $r = P_n$, $s = Q_n$;
- (2) $\frac{r}{s}$ — промежуточная дробь между $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й подходящими дробями к α ;
- (3) $a_{n+1} = 1$, $r = R_n$, $s = S_n$;
- (4) $r = U_n$, $s = V_n$.

Пусть d — натуральное число, не являющееся квадратом целого числа. Известно, что дискриминант базиса $1, \sqrt{d}$ квадратичного расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ равен $4d$. Напомним, что для произвольных рациональных чисел a и b нормой элемента $a + \sqrt{d} \cdot b$ в этом расширении называется число $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(a + \sqrt{d} \cdot b) = a^2 - db^2$. Её мы будем обозначать так: $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b)$. Обозначим $\widehat{a + \sqrt{d} \cdot b} = a - \sqrt{d} \cdot b$

Определение 2. Пусть d — натуральное число, не являющееся квадратом. Будем говорить, что дискриминант базиса $1, \sqrt{d}$ расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}$ имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой, если для любой промежуточной дроби $\frac{r}{s}$ к числу $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ выполнено неравенство $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(2r - s + s\sqrt{d}) < 0$. Это же свойство мы будем кратко выражать такими словами: число d имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Важность числа $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ хорошо известна. Так если натуральное число d свободно от квадратов и даёт остаток 1 при делении на 4, то ω — порождающий элемент кольца алгебраических целых элементов в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (см. [4], теорема 9.2).

ПРИМЕРЫ. Дискриминант базиса расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ имеет промежуточные дроби с отрицательной нормой, поскольку между любыми последовательными подходящими дробями к $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, находящимися по одну сторону от числа $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, нет ни одной промежуточной дроби. В статье [1] было показано, что числа вида $k^2 - 4$ имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любом нечётном $k > 1$. В статье [2] было показано, что числа вида $k^2 m^2 - 4m$ имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любом нечётном m и при любом нечётном $k > 1$.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что числа вида $(k + m(k^4 - 3k^2 + 1))^2 - 4q$, где $q = km(k^2 - 2) + 1$, имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любых таких неотрицательных числах k, m , что k — нечётное, m — чётное и $k > 1$. Обозначим множество всех таких чисел через $\mathbb{D}_3$.

Кроме того, из доказательства теоремы 2 следует, что числа вида

$$d = (l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k))^2 - 4q,$$

где

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

имеют промежуточные дроби с отрицательной нормой при любых таких неотрицательных числах k, m, u , что k — нечётное и $k > 1$. Обозначим множество

всех таких чисел через $\mathbb{D}_4$. В статье будет, в частности, показано, что единственная степень простого числа, принадлежащая $\mathbb{D}_3$ или $\mathbb{D}_4$ — это простое число 5.

Предложение 2. Пусть k, m — неотрицательные целые числа, k — нечётное, m — чётное. Пусть $k > 1$,

$$\begin{aligned} p &= k + m(k^4 - 3k^2 + 1), \\ q &= km(k^2 - 2) + 1. \end{aligned}$$

Тогда квадратичная иррациональность $\frac{1+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ совпадает с непрерывной дробью

$$\left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Доказательство. Найдём квадратичную иррациональность α , совпадающую с указанной непрерывной дробью. Ясно, что $[\alpha] = \frac{p-1}{2}$. Обозначим

$$\beta = \langle 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2 \rangle,$$

а числитель и знаменатель i -й подходящей дроби к β обозначим через P_i и Q_i , соответственно. Тогда $\beta = \frac{P_9\beta + P_8}{Q_9\beta + Q_8}$. Непосредственно проверяется, что $P_8 = k^4 - 3k^2 + 1$,

$$P_9 = mk^8 - 6mk^6 + k^5 + (-1 + 11m)k^4 - 4k^3 + (3 - 6m)k^2 + 3k - 1 + m,$$

$$Q_8 = k^4 - k^3 + 2k + 1 - 3k^2,$$

$$\begin{aligned} Q_9 &= mk^8 - mk^7 - 6k^6m + (5m + 1)k^5 + (11m - 2)k^4 + \\ &+ (-3 - 7m)k^3 + (-6m + 6)k^2 + (1 + 2m)k - 2 + m. \end{aligned}$$

Поэтому β удовлетворяет соотношению $(p - q - 1)\beta^2 + (2 - p)\beta - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно β , найдём $\beta = \frac{p-2+\sqrt{p^2-4q}}{2(p-q-1)}$. Тогда

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\beta} = \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{2} + \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{1 + \sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Предложение доказано. $\square$

Предложение 3. Пусть k, m, u — неотрицательные целые числа, k — нечётное. Пусть $k > 1$, $l = k + m(k^2 - 1)$,

$$q = u(lk^3 - kl - 2k^2 + 1) + km + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$. Тогда квадратичная иррациональность $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ совпадает с непрерывной дробью

$$\left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Доказательство. Найдём квадратичную иррациональность α , совпадающую с указанной непрерывной дробью. Ясно, что $[\alpha] = \frac{p-1}{2}$. Обозначим

$$\beta = \langle 1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2 \rangle,$$

а числитель и знаменатель i -й подходящей дроби к β обозначим через P_i и Q_i , соответственно. Тогда $\beta = \frac{P_{11}\beta + P_{10}}{Q_{11}\beta + Q_{10}}$. Непосредственно проверяется, что

$$P_{10} = lk^4 - 2lk^2 - 2k^3 + 2k + l,$$

$$\begin{aligned}
P_{11} &= (pl - l)k^4 + (-l - 2p + 2)k^3 + (2 + 2l - 2pl)k^2 + (2p - 2 + l)k - 1 - l + pl, \\
Q_{10} &= lk^4 + (-2 - l)k^3 + (-2l + 2)k^2 + (2 + l)k - 1 + l, \\
Q_{11} &= (p - q - 1)P_{10}.
\end{aligned}$$

Поэтому β удовлетворяет соотношению $(p - q - 1)\beta^2 + (2 - p)\beta - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно $\frac{1}{\beta}$, найдём $\frac{1}{\beta} = \frac{-p+2+\sqrt{d}}{2}$. Тогда

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\beta} = \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2} = \frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Предложение доказано. $\square$

Из предложений 2, 3 следует, что для любого числа d из объединения $\mathbb{D}_3 \cup \mathbb{D}_4$ между $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й подходящими дробями к $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ нет промежуточных дробей при любом чётном n . Все квадратичные иррациональности вида $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$ при $a_{2s+1} = 1$ для каждого числа s также обладают этим свойством. Естественно поставить проблему.

ПРОБЛЕМА. Для любого ли чётного числа n среди нечётных чисел d существует такое, что $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = \langle a_0, \overline{1, a_2, \dots, 1, a_{n-2}, 1, a_n} \rangle$, и все промежуточные дроби $\frac{r}{s}$ к нему удовлетворяют соотношению $(2r - s)^2 - s^2 d < 0$? Кроме того, естественно предполагается, что период, указанный в разложении числа $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ выше, не содержит подпериодов.

Как уже было сказано выше, можно дать утвердительный ответ на этот вопрос для $n = 2, 4, 6, 10, 12$. Кроме того, можно показать, что ответ также положительный и при $n = 8$.

Предложение 4. Пусть d — нечётное число, не являющееся квадратом, $\frac{P_i}{Q_i}$ — подходящие дроби к числу $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Пусть n — период непрерывной дроби для $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Если

$$2P_n - Q_n + Q_n\sqrt{d} = \frac{1}{2}(2P_0 - Q_0 + Q_0\sqrt{d})(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d}),$$

то

$$2P_{n+j} - Q_{n+j} + Q_{n+j}\sqrt{d} = \frac{1}{2}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d})(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d})$$

для любого $j = -1, 0, 1, \dots$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_{n-1} - Q_{n-1} + Q_{n-1}\sqrt{d})$ и будем вести индукцию по j . Пусть $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = \langle a_0, \overline{a_1, \dots, a_n} \rangle$. При $j = -1, 0$ утверждение предложения верно. Пусть для $j \geq 0$ утверждение предложения справедливо. Тогда

$$\begin{aligned}
2P_{n+j+1} - Q_{n+j+1} + Q_{n+j+1}\sqrt{d} &= 2(a_{j+n+1}P_{n+j} + P_{n+j-1}) - (a_{j+n+1}Q_{n+j} + Q_{n+j-1}) + (a_{j+n+1}Q_{n+j} + Q_{n+j-1})\sqrt{d} = \\
&= a_{j+n+1}(2P_{n+j} - Q_{n+j} + Q_{n+j}\sqrt{d}) + (2P_{n+j-1} - Q_{n+j-1} + Q_{n+j-1}\sqrt{d}) = \\
&= a_{j+1}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d})\varepsilon + (2P_{j-1} - Q_{j-1} + Q_{j-1}\sqrt{d})\varepsilon = \\
&= (2(a_{j+1}P_j + P_{j-1}) - (a_{j+1}Q_j + Q_{j-1}) + (a_{j+1}Q_j + Q_{j-1})\sqrt{d})\varepsilon = \\
&= (2P_{j+1} - Q_{j+1} + Q_{j+1}\sqrt{d})\varepsilon.
\end{aligned}$$

Доказательство индуктивного перехода завершено, и предложение доказано. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Пусть (x, y) — решение уравнения Пелля, т. е. $x^2 - y^2d = 4t$, и числа x, y взаимно просты. Тогда

$$\left(\frac{x+y}{2} + \frac{-1+\sqrt{d}}{2}y\right)\left(\frac{x+y}{2} - \frac{1+\sqrt{d}}{2}y\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{dy^2}{4} = t.$$

Значит, $\frac{x+y}{2y} > \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Поэтому

$$\left|\frac{x+y}{2y} - \alpha\right| = \frac{t}{y^2\left(\frac{x+y}{2y} + \frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right)} < \frac{t}{y^2\sqrt{d}} < \frac{2}{y^2}.$$

Итак, пара (x, y) натуральных чисел одинаковой чётности удовлетворяет ограничению $\left|\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{2}{y^2}$.

Аналогично показывается, что выполнено более сильное неравенство $\left|\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$, если $t < \sqrt{d}$.

Пусть сначала $y \geq 2$. Так как знаменатель первой подходящей дроби к числу α равен 1, то по предложению 1 существует натуральное число n такое, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (1) $\frac{x+y}{2} = P_n, y = Q_n$;
- (2) $\frac{x+y}{2} = iP_n + P_{n-1}, y = iQ_n + Q_{n-1}$, где $i \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$;
- (3) $a_{n+1} = 1, \frac{x+y}{2} = R_n, y = S_n$;
- (4) $\frac{x+y}{2} = U_n, y = V_n$.

Хорошо известно, что при $t = 1$ случаи 2)-4) не реализуются, поэтому из равенства $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b) = 4$ вытекает, что b — знаменатель некоторой подходящей дроби к α . Непосредственно проверяется, что $b = Q_9$. Тогда, по предложению 1, $a = 2P_9 - Q_9$ и $\text{Norm}(\varepsilon) = 1$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_9 - Q_9 + Q_9\sqrt{d})$.

Теперь ввиду мультипликативности нормы из предложения 4 (с учётом предложения 2) следует, что $\text{Norm}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d}) < 0$ для любого чётного числа j .

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда число n нечётно. Поэтому из предложения 4 следует, что $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{1, q, q + km\}$.

Можно считать, что $t \neq 1, t \neq q, t \neq q + km$. Выше мы показали, что тогда первый случай не реализуется. Предположим, что реализуется второй случай. Поскольку $a_{2j+1} = 1$, то для чётного числа n нет ни одной промежуточной дроби между $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й подходящими дробями к иррациональности α . Поэтому число n нечётно.

Рассмотрим многочлен

$$f(\tau) = ((2P_n - Q_n)\tau + 2P_{n-1} - Q_{n-1})^2 - d(\tau Q_n + Q_{n-1})^2.$$

На концах интервала $[0, a_{n+1}]$ эта функция принимает отрицательные значения по доказанному выше. Ясно, что

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} = 2((2P_n - Q_n)^2 - dQ_n^2) > 0.$$

Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(\tau)$ положителен, поэтому $f(i) < 0$. С другой стороны, $f(i) = x^2 - dy^2 = 4t$. Полученное противоречие говорит о том, что второй случай не реализуется.

Пусть имеет место третий случай. Тогда $a_{n+1} = 1$. Из разложения числа α в непрерывную дробь заключаем, что n чётно.

Поэтому (по предложению 4)

$$t = \frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Теперь можно считать, что

$$t \notin \{1, q, q + km, p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Тогда, согласно предыдущему, имеет место последний случай.

Пусть сначала n — нечётное число. По предложению 4 тогда

$$t = \frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Полученное противоречие показывает, что n чётно. Поэтому либо

- (1) $\frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + 9$; либо
- (2) $\frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q + 4mk - 12m(k^2 - 1)$; либо
- (3) $\frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q - 12mk^2 + 13mk$; либо
- (4) $\frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q + 9mk - 12m(k^2 - 1)$; либо
- (5) $\frac{1}{4} \text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + 4$.

Покажем, что ни один из этих случаев реализоваться не может. Для этого достаточно рассмотреть только третий случай. Тогда $-6p + 13q + 12mk^2 + 13mk$ представляет собой линейную функцию по m с коэффициентом наклона $-6k^4 + 13k^3 + 6k^2 - 13k - 6$, который при $k \geq 3$ является отрицательным числом, так как $-6k^4 + 13k^3 + 6k^2 - 13k - 6 < 0$. Таким образом, достаточно показать, что третий случай не реализуется при $m = 0$, в чём читатель легко убедится сам.

Итак, рассмотрение случая $y \geq 2$ закончено. Пусть теперь $y = 1$. Так как $x^2 - d = 4t$, то $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$. С другой стороны, натуральное число $\frac{(x + \sqrt{d})\varepsilon - (x - \sqrt{d})\varepsilon}{2\sqrt{d}}$ равно $P_9 + \frac{Q_9(x-1)}{2}$ и строго больше единицы. Согласно предыдущему,

$$\frac{1}{4} \text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) \in \{1, q, q + km, p + q + 1, p + 2q + m(2k^2 + k - 2), p + 2q + 2km(k + 1)\}.$$

Так как $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$, то теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Обозначим $\alpha = \frac{1 + \sqrt{d}}{2}$. Пусть (x, y) — решение уравнения Пелля, т. е. $x^2 - y^2d = 4t$, и числа x, y взаимно просты. Тогда

$$\left(\frac{x + y}{2} + \frac{-1 + \sqrt{d}}{2}y\right)\left(\frac{x + y}{2} - \frac{1 + \sqrt{d}}{2}y\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{dy^2}{4} = t.$$

Значит, $\frac{x+y}{2y} > \frac{1+\sqrt{d}}{2}$. Поэтому

$$\left|\frac{x + y}{2y} - \alpha\right| = \frac{t}{y^2\left(\frac{x+y}{2y} + \frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right)} < \frac{t}{y^2\sqrt{d}} < \frac{2}{y^2}.$$

Итак, пара (x, y) натуральных чисел одинаковой чётности удовлетворяет ограничению $\left|\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{y} - \alpha\right| < \frac{2}{y^2}$.

Аналогично показывается, что выполнено более сильное неравенство $|\frac{x+y}{2} - \frac{1}{y} - \alpha| < \frac{1}{y^2}$, если $t < \sqrt{d}$.

Пусть сначала $y \geq 2$. Так как знаменатель первой подходящей дроби к числу α равен 1, то по предложению 1 существует натуральное число n такое, что либо

- (1) $\frac{x+y}{2} = P_n, y = Q_n$; либо
- (2) $\frac{x+y}{2} = iP_n + P_{n-1}, y = iQ_n + Q_{n-1}$, где $i \in \mathbb{N} \cap (0, a_{n+1})$; либо
- (3) $a_{n+1} = 1, \frac{x+y}{2} = R_n, y = S_n$; либо
- (4) $\frac{x+y}{2} = U_n, y = V_n$.

Хорошо известно, что при $t = 1$ случаи 2)-4) не реализуются, поэтому из равенства $\text{Norm}(a + \sqrt{d} \cdot b) = 4$ вытекает, что b — знаменатель некоторой подходящей дроби к α . Непосредственно проверяется, что $b = Q_{11}$. Тогда, по предложению 1, $a = 2P_{11} - Q_{11}$ и $\text{Norm}(\varepsilon) = 1$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}(2P_{11} - Q_{11} + Q_{11}\sqrt{d})$.

Теперь ввиду мультипликативности нормы из предложения 4 (с учётом предложения 3) следует, что $\text{Norm}(2P_j - Q_j + Q_j\sqrt{d}) < 0$ для любого чётного числа j .

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда число n нечётно. Поэтому из предложения 4 следует, что

$$\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) \in \{1, q, 1 + (k^2 - 1)^2u, q + (k^2 - 1)u\}.$$

Можно считать, что

$$t \notin \{1, q, 1 + (k^2 - 1)^2u, q + (k^2 - 1)u\}.$$

Выше мы показали, что тогда первый случай не реализуется. Предположим, что реализуется второй случай. Поскольку $a_{2j+1} = 1$, то для чётного числа n нет ни одной промежуточной дроби между $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й подходящими дробями к иррациональности α . Поэтому число n нечётно. Рассмотрим многочлен

$$f(\tau) = ((2P_n - Q_n)\tau + 2P_{n-1} - Q_{n-1})^2 - d(\tau Q_n + Q_{n-1})^2,$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, придём к выводу, что второй случай тоже не реализуется.

Пусть имеет место третий случай. Тогда $a_{n+1} = 1$. Из разложения числа α в непрерывную дробь заключаем, что n чётно.

Поэтому (по предложению 4)

$$t \in \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Теперь можно считать, что

$$t \notin \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Тогда, согласно предыдущему, имеет место последний случай.

Пусть сначала n — нечётное число. По предложению 4 тогда

$$t \in \{p+2q+2(k^2-1)ul+(k^2-1)^2u+2(m-u), p+q+1, p+q+1+uk(k^2-1)(k+2)\}.$$

Полученное противоречие показывает, что n чётно. Поэтому либо

- (1) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + 9$; либо
- (2) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 4u(k^2 + 3k - 1) - 12m$; либо

- (3) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + u(4k^4 - 12k^3 + k^2 + 12k - 5) + 4$; либо
 (4) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 4q + u(9k^4 - 12k^3 - 14k^2 + 12k + 5) + 9$; либо
 (5) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 3u(3k^2 + 4k - 3) - 12m$; либо
 (6) $\frac{1}{4}\text{Norm}(x + y\sqrt{d}) = -6p + 9q + 4$.

Покажем, что ни один из этих случаев реализоваться не может. Для этого достаточно рассмотреть только пятый случай. Тогда

$$-6p + 13q - 12(k^2 - 1)ul + 3u(3k^2 + 4k - 3) - 12m$$

представляет собой линейную функцию по u с коэффициентом наклона

$$-6k^6m + (-6 + 13m)k^5 + (13 + 6m)k^4 + (12 - 26m)k^3 + (6m - 30)k^2 + (13m + 6)k + 4 - 6m,$$

который при $k \geq 3$ является отрицательным числом, так как $-6k^6 + 13k^5 + (6 + \frac{13}{m})k^4 < 0$ при $m \neq 0$. Таким образом, достаточно показать, что третий случай не реализуется при $m = 0$ и при $u = 0$, в чём читатель легко убедится сам.

Итак, рассмотрение случая $y \geq 2$ закончено. Пусть теперь $y = 1$. Так как $x^2 - d = 4t$, то $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$. С другой стороны, натуральное число $\frac{(x + \sqrt{d})\varepsilon - (x - \sqrt{d})\varepsilon}{2\sqrt{d}}$ равно $P_{11} + \frac{Q_{11}(x-1)}{2}$ и строго больше единицы. Согласно предыдущему, либо $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 1$, либо $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = q$, либо $\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 1 + (k^2 - 1)^2u$, либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = q + (k^2 - 1)u,$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(m - u),$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + q + 1,$$

либо

$$\frac{1}{4}\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2).$$

Так как $\text{Norm}((x + \sqrt{d})\varepsilon) = 4t$, то теорема 2 доказана.

5. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ИЗ

$$\mathbb{D}_3 \cup \mathbb{D}_4$$

Определение 3. Решение (x, y) неоднородного уравнения Пелля назовём примитивным, если числа x и y взаимно просты.

Следствие 2. Пусть k, m — неотрицательные целые числа, k — нечётное. Пусть $k > 1$,

$$q = km(k^2 - 2) + 1,$$

$$p = k + m(k^4 - 3k^2 + 1),$$

$d = p^2 - 4q$, $\frac{P_i}{Q_i}$ — подходящие дроби к числу $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $R_i = P_i + 2P_{i-1}$, $S_i = Q_i + 2Q_{i-1}$. Тогда

- (1) $\{(2P_{10n+9} - Q_{10n+9}, Q_{10n+9}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4$;

- (2) $\{(2P_{10n+1} - Q_{10n+1}, Q_{10n+1}), (2P_{10n+7} - Q_{10n+7}, Q_{10n+7}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4q$;
- (3) $\{(2P_{10n+3} - Q_{10n+3}, Q_{10n+3}), (2P_{10n+5} - Q_{10n+5}, Q_{10n+5}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(q + km)$;
- (4) $\{(2R_{10n} - S_{10n}, S_{10n}), (2R_{10n+8} - S_{10n+8}, S_{10n+8}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1)$;
- (5) $\{(2R_{10n+2} - S_{10n+2}, S_{10n+2}), (2R_{10n+6} - S_{10n+6}, S_{10n+6}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + m(2k^2 + k - 2))$;
- (6) $\{(2R_{10n+4} - S_{10n+4}, S_{10n+4}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + 2km(k + 1))$.

Доказательство. Обозначим $V_i = 2Q_i - Q_{i-1}$. При $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$V_{2n+1} = 2Q_{2n+1} - Q_{2n} = 2(Q_{2n} + Q_{2n-1}) - Q_{2n} = Q_{2n} + 2Q_{2n-1} = S_{2n}.$$

Поэтому последний случай предложения 1 новых примитивных решений уравнений Пелля, отличных от перечисленных в утверждениях 1)-6), не даёт. Остальные утверждения проверяются так же, как при доказательстве теоремы 1. Следствие доказано. $\square$

Следствие 3. Пусть k, m, u — неотрицательные целые числа, k — нечётное. Пусть $k > 1$, $l = (k + m(k^2 - 1))$,

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

$$p = l + u(k^2 - 1)(l(k^2 - 1) - 2k),$$

$d = p^2 - 4q$, $\frac{P_i}{Q_i}$ — подходящие дроби к числу $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $R_i = P_i + 2P_{i-1}$, $S_i = Q_i + 2Q_{i-1}$. Тогда

- (1) $\{(2P_{12n+11} - Q_{12n+11}, Q_{12n+11}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4$;
- (2) $\{(2P_{12n+1} - Q_{12n+1}, Q_{12n+1}), (2P_{12n+9} - Q_{12n+9}, Q_{12n+9}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4q$;
- (3) $\{(2P_{12n+3} - Q_{12n+3}, Q_{12n+3}), \{(2P_{12n+7} - Q_{12n+7}, Q_{12n+7}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(q + (k^2 - 1)u)$;
- (4) $\{(2P_{12n+5} - Q_{12n+5}, Q_{12n+5}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(1 + (k^2 - 1)^2u)$;
- (5) $\{(2R_{12n} - S_{12n}, S_{12n}), (2R_{12n+10} - S_{12n+10}, S_{12n+10}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1)$;
- (6) $\{(2R_{12n+2} - S_{12n+2}, S_{12n+2}), (2R_{12n+8} - S_{12n+8}, S_{12n+8}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + 2q + 2(k^2 - 1)ul + (k^2 - 1)^2u + 2(m - u))$;
- (7) $\{(2R_{12n+4} - S_{12n+4}, S_{12n+4}), (2R_{12n+6} - S_{12n+6}, S_{12n+6}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
 — множество всех примитивных решений уравнения $x^2 - y^2d = 4(p + q + 1 + uk(k^2 - 1)(k + 2))$.

Доказательство. Обозначим $V_i = 2Q_i - Q_{i-1}$. Так как для любого неотрицательного числа n имеем

$$V_{2n+1} = 2Q_{2n+1} - Q_{2n} = 2(Q_{2n} + Q_{2n-1}) - Q_{2n} = Q_{2n} + 2Q_{2n-1} = S_{2n},$$

то снова последний случай предложения 1 новых примитивных решений уравнений Пелля, отличных от перечисленных в утверждениях 1)-7) следствия 3, не даёт. Остальные утверждения следствия 3 проверяются так же, как при доказательстве теоремы 2. Следствие 3 доказано. $\square$

6. ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ $\mathbb{D}_3$ И $\mathbb{D}_4$

Пусть

$$g_1(x, y) = 32yx^4 + 160yx^3 + 280yx^2 + 2x + 200yx + 50y + 1,$$

$$g_2(x, y) = 32yx^4 + 224yx^3 + 568yx^2 + 2x + 616yx + 242y + 5.$$

С помощью алгоритма Евклида легко убедиться, что многочлены взаимно просты.

Пусть

$$f_1(x, y, z) = 64z + 1 + 192zx + 208zx^2 + 96zx^3 + 16zx^4,$$

$$f_2(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned} & 256y^2x^8z + (3072zy^2 + 256zy)x^7 + (64z + 15872zy^2 + 2688zy)x^6 + \\ & (46080zy^2 + 576z + 11776zy)x^5 + (27840zy + 2064z + 82176zy^2 + 16y^2)x^4 + \\ & (38272zy + 92160zy^2 + 3744z + 16y + 96y^2)x^3 + \\ & (3600z + 30528zy + 63488zy^2 + 4 + 208y^2 + 72y)x^2 + \\ & (13056zy + 1728z + 24576zy^2 + 12 + 96y + 192y^2)x + \\ & 2304zy + 324z + 4096zy^2 + 64y^2 + 36y + 5. \end{aligned}$$

С помощью алгоритма Евклида легко убедиться, что многочлены взаимно просты.

Следствие 4. *Каждый элемент из $\mathbb{D}_3$ представим в виде значения многочлена $g = g_1g_2$ на паре неотрицательных целых чисел, и такое представление единственно.*

Доказательство. Пусть $d \in \mathbb{D}_3$. Тогда по определению найдётся нечётное натуральное число k , отличное от единицы, такое, что

$$d = (k + m(k^4 - 3k^2 + 1))^2 - 4(km(k^2 - 2) + 1) \quad (2)$$

для некоторого чётного неотрицательного целого числа m . Тогда $x = \frac{k-3}{2}$ — неотрицательное целое число. Непосредственно проверяется, что $d = g(x, \frac{m}{2})$. Существование нужного представления доказано.

Если теперь есть какое-то представление числа d в виде (2), то квадратичное слагаемое будем обозначать через p^2 , а другое слагаемое, поделённое на -4 , будем называть линейным остатком и обозначать через q .

Теперь докажем единственность. По предложению 2 имеем

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Поэтому арифметический квадратный корень p из квадратичного слагаемого числа d и число k определены единственным образом. Из соотношения $d = p^2 - 4q$ линейный остаток q определяется однозначно. Тогда из соотношения $q = km(k^2 - 2) + 1$ число m определяется однозначно. Следствие 4 доказано. $\square$

Следствие 5. *Каждый элемент из $\mathbb{D}_4$ представим в виде значения многочлена $f = f_1 f_2$ на тройке неотрицательных целых чисел, и такое представление единственно.*

Доказательство. Пусть $d \in \mathbb{D}_4$. Тогда по определению найдётся нечётное натуральное число k , отличное от единицы, такое, что

$$d = (k + m(k^2 - 1) + u(k^2 - 1)((k + m(k^2 - 1))(k^2 - 1) - 2k))^2 - 4(u((k + m(k^2 - 1))k^3 - 2k^2 - k(k + m(k^2 - 1)) + 1) + km + 1) \quad (3)$$

для некоторых неотрицательных целых чисел u, m . Тогда $x = \frac{k-3}{2}$ — неотрицательное целое число. Непосредственно проверяется, что $d = f(x, u, m)$. Существование нужного представления доказано.

Снова если есть какое-то представление числа d в виде (3), то квадратичное слагаемое будем обозначать через p^2 , а другое слагаемое, поделённое на -4 , будем называть линейным остатком и обозначать через q . Коэффициент при k^3 в q будем обозначать через ul , и l будем называть его главной частью.

Теперь докажем единственность. По предложению 3 имеем

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle.$$

Поэтому арифметический квадратный корень p из квадратичного слагаемого числа d и число k определены единственным образом. Кроме того, единственным образом определяется главная часть l коэффициента при k^3 линейного остатка для числа d . Из соотношений $d = p^2 - 4q$, $l = (k + m(k^2 - 1))$ числа q и m определяются однозначно. Тогда из соотношения $q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1$ число u определяется однозначно. Следствие доказано. $\square$

7. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ВХОЖДЕНИЯ В $\mathbb{D}_3$ И $\mathbb{D}_4$

Опишем простой алгоритм, решающий проблему вхождения нечётного числа d в множество $\mathbb{D}_3$.

Шаг 1. Раскладываем число $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ в непрерывную дробь. Если

$$\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \neq \left\langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \right\rangle,$$

где k, p — нечётные числа, то $d \notin \mathbb{D}_3$.

Шаг 2. Полагаем $q = \frac{p^2-d}{4}$. Если $q \notin \mathbb{Z}$, то $d \notin \mathbb{D}_3$.

Шаг 3. Полагаем

$$m = \frac{p-k}{k^4 - 3k^2 + 1}.$$

Если $m \notin 2\mathbb{Z}_+$, то $d \notin \mathbb{D}_3$.

Шаг 4. Если $q \neq km(k^2 - 2) + 1$, то $d \notin \mathbb{D}_3$, а если $q = km(k^2 - 2) + 1$, то $d \in \mathbb{D}_3$.

Наконец, опишем простой алгоритм, решающий проблему вхождения нечётного числа d в множество $\mathbb{D}_4$.

Шаг 1. Раскладываем число $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ в непрерывную дробь. Если

$$\frac{1+\sqrt{d}}{2} \neq \langle \frac{p-1}{2}, \overline{1, k-2, 1, k-2, 1, l-2, 1, k-2, 1, k-2, 1, p-2} \rangle,$$

где k, l, p — нечётные числа, то $d \notin \mathbb{D}_4$.

Шаг 2. Полагаем $q = \frac{p^2-d}{4}$. Если $q \notin \mathbb{Z}$, то $d \notin \mathbb{D}_4$.

Шаг 3. Полагаем

$$u = \frac{p-l}{(k^2-1)(l(k^2-1)-2k)}.$$

Если $u \notin \mathbb{Z}_+$, то $d \notin \mathbb{D}_4$.

Шаг 4. Полагаем $m = \frac{l-k}{k^2-1}$. Если $m \notin \mathbb{Z}_+$, то $d \notin \mathbb{D}_4$.

Шаг 5. Если

$$q \neq u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

то $d \notin \mathbb{D}_4$, а если

$$q = u(lk^3 - 2k^2 - kl + 1) + km + 1,$$

то $d \in \mathbb{D}_4$.

REFERENCES

- [1] F. Luca, C.F. Osgood, P.G. Walsh, *Diophantine approximations and a problem from the 1988 IMO*, Rocky Mt. J. Math., **36**:2 (2006), 637–648. Zbl 1161.11022
- [2] A.A. Korobov, *On solvability conditions of one family of Pell's equations*, Mat. Zamet. YAGU, **20**:1 (2013), 44–49. Zbl 1289.11032
- [3] A.A. Bukhshtab, *Number Theory*, Prosveschenie, Moscow, 1966. Zbl 0144.27402
- [4] G.J. Janusz, *Algebraic number fields*, Graduate Studies in Mathematics, **7**, AMS, Providence, 1996. Zbl 0854.11001

KOROBOV ALEXEI ALEXANDROVICH
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 2, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: korobov@math.nsc.ru

KOROBOV OLEG ALEXEEVICH
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 2, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: vasa01011993@gmail.com