T. Yskak, On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay,
Sib. Zh. Ind. Mat., 2019, Volume 22, Number 3, 118–127

Сибирский журнал
индустриальной математики
Июль–сентябрь, 2019. Том XXII, № 3(79)

УДК 517.929.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*)

Т. Ыскак

Рассматривается класс систем линейных неавтономных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. Получены достаточные условия для экспоненциальной устойчивости нулевого решения и условия на возмущения коэффициентов, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения. С использованием функционала Ляпунова — Красовского специального вида устанавливаются оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений исходной системы на бесконечности.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, распределенное запаздывание, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.311

Введение. Существует большое число работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–9]). В работе рассматривается система нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d}{dt}(D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\tau > 0$ — константа; $A(t), D(t)$ — квадратные матрицы порядка n с непрерывными T-периодическими элементами; $B(t,\xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $B(t,\xi) \equiv B(t+T,\xi)$.

Цель работы заключается в получении достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получении оценки решений системы, которая характеризует скорость убывания при $t \to \infty$. При исследовании устойчивости нулевого решения будем использовать следующий функционал Ляпунова — Красовского, введенный в [10], который является модификацией функционала из [11–14]:

$$\begin{aligned} V(t,y) = \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), (y(t) + D(t)y(t-\tau))\rangle \\ + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\,ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle\,ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя этот функционал, мы исследуем также робастную устойчивость.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

В работах [11–17] исследован случай дифференциального уравнения нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием. В [18] рассмотрена система (1) в случае $D(t) \equiv 0$.

В разд. 1 получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и оценки на решения (1), в разд. 2 указаны условия на матрицы возмущений, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость.

1. Экспоненциальная устойчивость. Для системы (1) рассмотрим следующую начальную задачу при $t > 0$:

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)\,ds, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C^1[-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0). \end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим через $q(t)$ минимальное собственное число матрицы

$$Q(t) = H^{-1/2}(t)$$
$$\times \left(Q_{11}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(t,s)Q_{13}^*(t,s)\,ds \right) H^{-1/2}(t),$$

где

$$\begin{gathered} Q_{11}(t) = -\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0) + \tau K(0) \right), \\ Q_{12}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(H(t)A(t) + M(0))D(t) + \sqrt{\tau}K(0)D(t), \\ Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,t-s), \\ Q_{22}(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D(t)^*M(0)D(t)) - D(t)^*K(0)D(t), \\ Q_{33}(t,s) = K(t-s). \end{gathered}$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + kM(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Теорема 1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ такая, что $H(t) > 0$, и матрицы $K(s) = K^*(s)$, $M(s) = M^*(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Тогда если

$$Q_{22}(t) > 0, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

то для решения задачи (3) *верна оценка*

$$\begin{aligned} V(t,y) \le \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds \right) & \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)) \rangle \\ & + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{-\eta}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds d\eta + \int\limits_{-\tau}^{0} \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds \Bigg). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\gamma(t) = \min\{q(t), k\}$.

Доказательство. Схема доказательства данной теоремы аналогична доказательству теоремы 1 из [10].

Отметим, что из условия (4) и условий на матрицы $K(s)$, $M(s)$ следует, что спектр матрицы $D(t)$ при всех t лежит внутри единичного круга $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Действительно, поскольку $\frac{d}{ds}M(s) < 0$, то $M(0) > M(\tau)$. Следовательно, $M(0) - D^*(t)M(0)D(t) > 0$. В силу критерия Ляпунова асимптотической устойчивости решений разностных уравнений получаем требуемое.

Обозначим через $\alpha > 0$ такое число, что

$$M(0) - D^*(t)M(0)D(t) \geq \alpha I \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T]. \tag{6}$$

В дальнейшем нам пригодится следующая

Лемма 1. *Пусть* $\{t_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ *— неотрицательная последовательность и выполнено условие* (6). *Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\|D(t_n) \ldots D(t_1)\| = \left\| \prod_{i=1}^{n} D(t_i) \right\| \leq \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{n/2}, \tag{7}$$

где $M(0)$ *— положительно определенная эрмитова матрица из теоремы* 1, $\nu(M(0)) = \|M(0)\|\|M^{-1}(0)\|$ *— число обусловленности матрицы* $M(0)$. *Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.*

Доказательство. Введем следующее разностное уравнение:

$$z_i = D(t_i)z_{i-1}, \quad i = 1, \ldots.$$

Рассмотрим функцию $\langle M(0)z_i, z_i\rangle$. Очевидно, что

$$\langle M(0)z_i, z_i\rangle = \langle D^*(t_i)M(0)D(t_i)z_{i-1}, z_{i-1}\rangle.$$

Следовательно, из (6) получим

$$\langle M(0)z_i, z_i\rangle \leq \langle M(0)z_{i-1}, z_{i-1}\rangle - \alpha\langle z_{i-1}, z_{i-1}\rangle.$$

Мы неоднократно будем пользоваться следующими неравенствами:

$$\|M^{-1}(0)\|^{-1}\langle z, z\rangle \leq \langle M(0)z, z\rangle \leq \|M(0)\|\langle z, z\rangle.$$

Применяя данные неравенства, имеем

$$\langle M(0)z_i, z_i\rangle \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)\langle M(0)z_{i-1}, z_{i-1}\rangle.$$

Повторим данную процедуру несколько раз. В итоге имеем

$$\left\langle M(0)z_i, z_i\right\rangle \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^i \left\langle M(0)z_0, z_0\right\rangle.$$

Из данного неравенства вытекает оценка

$$\|z_i\| \leq \sqrt{\nu(M(0))}\left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{i/2}\|z_0\|.$$

С другой стороны, $z_i = D(t_i) \ldots D(t_1)z_0$, и в силу определения матричной нормы получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Заметим, что $\gamma(t)$ — T-периодическая функция. Нам пригодится следующая лемма из [18].

Лемма 2. *Пусть $x(t)$ — T-периодическая функция, тогда*

$$\int\limits_0^t x(s)\,ds \geq St/T + q, \quad t > 0,$$

где

$$S = \int\limits_0^T x(s)\,ds, \quad q = \min_{\xi\in[0,T]} \left(\int\limits_0^\xi x(s)\,ds - \frac{\xi}{T} \int\limits_0^T x(s)\,ds \right).$$

Введем обозначения

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\hat{\varkappa} = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2} \times \left(2\|H(0)\|(1 + \|D(0)\|^2) + \int\limits_0^\tau \|K(s)\|\,ds + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \|M(s)\|\,ds d\eta \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{2}\,ds - \int\limits_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2}\,ds \right)\right).$$

В следующей теореме мы установим оценки решения начальной задачи (3), являющиеся аналогами оценок из [10–15].

Теорема 2. *Пусть*:

1) *выполнены условия теоремы* 1;

2) *выполнено неравенство* $\Delta = \int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{2}\,ds > 0$.

Тогда:

а) *если* $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}\exp(\Delta\tau) < 1$, *то для решения задачи* (3) *справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)\hat{\varkappa}c\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2}\exp\left(\Delta\tau\right)\right)^{-1};$$

б) *если* $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}\exp(\Delta\tau) = 1$, *то для решения задачи* (3) *справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)\left(\frac{\hat{\varkappa}c}{\tau}t + \hat{\varkappa}c + 1\right).$$

в) *если* $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}\exp(\Delta\tau) > 1$, *то для решения задачи* (3) *справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\sqrt{\nu(M(0))}(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{t/2\tau} \times \left(\hat{\varkappa}c\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{-1/2}\exp\left(-\Delta\tau\right)\right)^{-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2}\right).$$

Доказательство. Несложно заметить справедливость следующего неравенства:

$$V(0,\varphi) \le \Phi^2\left(2\|H(0)\|(1+\|D(0)\|^2) + \int\limits_0^\tau \|K(s)\|\,ds + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \|M(s)\|\,dsd\eta\right).$$

Из (5) и (8) для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),(y(t)+D(t)y(t-\tau))\rangle \le \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds\right)\Phi^2\frac{\hat{\varkappa}^2}{\|H^{-1}(t)\|}.$$

Поскольку $H(t)$ — эрмитовая положительно определенная матрица, то

$$\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\| \le \Phi\hat{\varkappa}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right).$$

Учитывая неравенство

$$\|y(t)\| \le \|y(t)+D(t)y(t-\tau)\| + \|D(t)y(t-\tau)\|,$$

получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi\hat{\varkappa}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right) + \|D(t)y(t-\tau)\|.$$

Пусть $t \in (k\tau,(k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, как и выше, имеем

$$\|D(t)y(t-\tau)\| \le \|D(t)y(t-\tau)+D(t)D(t-\tau)y(t-2\tau)\| + \|D(t)D(t-\tau)y(t-2\tau)\|.$$

Отсюда

$$\|D(t)y(t-\tau)\| \le \|D(t)\|\Phi\hat{\varkappa}\exp\left(-\int\limits_0^{t-\tau} \frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right) + \|D(t)D(t-\tau)y(t-2\tau)\|$$

и, следовательно,

$$\|y(t)\| \le \Phi\hat{\varkappa}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right) + \|D(t)\|\Phi\hat{\varkappa}\exp\left(-\int\limits_0^{t-\tau} \frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right) + \|D(t)D(t-\tau)y(t-2\tau)\|.$$

Введем матричную последовательность

$$\mathcal{D}_0(t) = I,$$

$$\mathcal{D}_k(t) = \prod_{i=1}^k D(t-(i-1)\tau) = D(t)\dots D(t-(k-1)\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Повторяя вышесказанные рассуждения, получим

$$\|y(t)\| \le \Phi\hat{\varkappa}\sum_{j=0}^{k}\mathcal{D}_j(t)\exp\left(-\int\limits_0^{t-j\tau}\frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right)+\|\mathcal{D}_{k+1}(t)y(t-(k+1)\tau)\|.$$

Используя определение матричной нормы и оценку (7), легко показать справедливость следующего неравенства:

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}$$
$$\times\left(\hat{\varkappa}\sum_{j=0}^{k}\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{j/2}\exp\left(-\int\limits_0^{t-j\tau}\frac{\gamma(s)}{2}\,ds\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{(k+1)/2}\right).$$

В силу леммы 2, обозначения для Δ из условий теоремы 2 и (8) получим

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}$$
$$\times\left(\hat{\varkappa}c\sum_{j=0}^{k}\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{j/2}\exp\left(-\Delta(t-j\tau)\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{(k+1)/2}\right). \quad (9)$$

Случай 1. Пусть $e^{-\Delta\tau} > (1-\alpha/\|(M(0))\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)$$
$$\times\left(\hat{\varkappa}c\sum_{j=0}^{k}\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{j/2}\exp\left(\Delta j\tau\right)+\exp(t\Delta)\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{(k+1)/2}\right).$$

Учитывая, что $\hat{\varkappa}c > 1$, имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)\hat{\varkappa}c\sum_{j=0}^{\infty}\left((1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2}\exp\left(\Delta\tau\right)\Bigg)^{j}.$$

Откуда получаем требуемое.

Случай 2. Пусть $e^{-\Delta\tau} = (1-\alpha/\|(M(0))\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)\left(\hat{\varkappa}c(k+1)+\exp((t-k\tau)\Delta)\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2}\right).$$

Учитывая, что $t\in(k\tau,(k+1)\tau]$, $k\in\mathbb{N}$, имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\exp(-t\Delta)(\hat{\varkappa}c(t/\tau+1)+1\Big).$$

Что и требовалось доказать.

Случай 3. Пусть $e^{-\Delta\tau} < (1-\alpha/\|(M(0))\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{k/2}$$
$$\times\left(\hat{\varkappa}c\sum_{j=0}^{k}\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{(j-k)/2}\exp\left(-\Delta(t-j\tau)\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2}\right).$$

Учитывая, что $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{t/(2\tau)} \times \left(\hat{\varkappa} c \sum_{j=0}^{k} \Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{(j-k)/2} \exp\left(-\Delta(k-j)\tau\right) + \Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{1/2}\right).$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \Phi\sqrt{\nu(M(0))}\Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{t/(2\tau)} \times \left(\hat{\varkappa} c \sum_{j=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{-j/2} \exp\left(-\Delta j\tau\right) + \Big(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\Big)^{1/2}\right).$$

Откуда вытекает требуемая оценка.

Отметим, что условия 1 и 2 теоремы 2 являются достаточными для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

2. Робастная устойчивость. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d}{dt}((D(t) + D_1(t))y(t-\tau)) = (A(t) + A_1(t))y(t) + \int_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)\, ds, \quad t > 0, \tag{10}$$

где $A_1(t)$, $D_1(t)$ — квадратные матрицы порядка n с непрерывными T-периодическими элементами, $B_1(t,\xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $B_1(t,\xi) \equiv B_1(t+T,\xi)$. Поскольку при доказательстве следующей теоремы мы будем использовать теоремы 1 и 2 и рассматривать функционал (2) вдоль решения возмущенной системы (10), то введем следующие обозначения:

$$\hat{\gamma}(t) = \min\{\hat{q}_1(t), k\}, \tag{11}$$

число k из формулировки теоремы 1 для системы (1), $\hat{q}_1(t)$ — минимальное собственное значение матрицы

$$\widehat{Q}(t) = H^{-1/2}(t) \times \left(\widehat{Q}_{11}(t) - \widehat{Q}_{12}(t)\widehat{Q}_{22}^{-1}(t)\widehat{Q}_{12}^{*}(t) - \int_{t-\tau}^{t} \widehat{Q}_{13}(t,s)\widehat{Q}_{33}^{-1}(t,s)\widehat{Q}_{13}^{*}(t,s)\, ds\right) H^{-1/2}(t),$$

где

$$\widehat{Q}_{11}(t) = -\Big(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)(A(t) + A_1(t)) + (A^*(t) + A_1^*(t))H(t) + M(0) + \tau K(0)\Big),$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}_{12}(t)\\
&\quad= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(H(t)(A(t)+A_1(t))+M(0))(D(t)+D_1(t))+\sqrt{\tau}K(0)(D(t)+D_1(t)),
\end{aligned}$$

$$\widehat{Q}_{13}(t,s) = -H(t)(B(t,t-s)+B_1(t,t-s)),$$

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_{22}(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - (D^*(t)+D_1^*(t))M(0)(D(t)+D_1(t)))\\
- (D^*(t)+D_1^*(t))K(0)(D(t)+D_1(t)),
\end{aligned}$$

$$\widehat{Q}_{33}(t,s) = Q_{33}(t,s) = K(t-s).$$

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия теоремы* 2 *и следующие неравенства*:

$$\begin{aligned}
\|D_1(t)\| < \left(\|D(t)\|^2 + \frac{\|(M(\tau) - D^*(t)M(0)D(t) - \tau D^*(t)K(0)D(t))^{-1}\|^{-1}}{\|M(0)\| + \tau\|K(0)\|}\right)^{1/2}\\
- \|D(t)\|, \quad t\in[0,T], \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds > \int\limits_0^T \|\widehat{Q}(s) - Q(s)\|\,ds. \tag{13}$$

Тогда нулевое решение системы (10) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Поскольку для системы (1) выполнены условия теорем 1 и 2, то определены функционал (2) и матрицы $H(t)$, $M(s)$, $K(s)$. Рассмотрев данный функционал на решении возмущенной системы (10), можно прийти к следующему выводу: чтобы доказать, что нулевое решение системы (10) экспоненциально устойчиво, достаточно показать, что для системы выполнены условия теорем 1 и 2. То есть требуется доказать, что выполнены следующие условия (аналог условий (4) и п. 2 теоремы 2):

$$\widehat{Q}_{22}(t) > 0, \quad t\in[0,T], \tag{14}$$

$$\int\limits_0^T \widehat{\gamma}(s)\,ds > 0. \tag{15}$$

Докажем условие (14). Учитывая, что $\|N^{-1}\|^{-1}$ — минимальное собственное значение эрмитовой положительно определенной матрицы N, оценим матрицу $\widehat{Q}_{22}(t)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_{22}(t) \geq \big(\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2\|D_1(t)\|\|D(t)\|\\
\times (\|M(0)\|/\tau + \|K(0)\|)I - \|D_1(t)\|^2(\|M(0)\|/\tau + \|K(0)\|)\big)I.
\end{aligned}$$

В силу данной оценки и условия (12) имеем $\widehat{Q}_{22}(t) > 0$. Откуда следует, что (14) выполнено.

Нетрудно увидеть, что в силу неравенства

$$Q(t) + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|I \geq \widehat{Q}(t) \geq Q(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|I$$

справедливо неравенство

$$q_1(t) + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\| \geq \widehat{q_1}(t) \geq q_1(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|,$$

где $q_1(t)$ и $\hat{q}_1(t)$ — минимальные собственные значения матриц $Q(t)$ и $\widehat{Q}(t)$ соответственно. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|\hat{q}_1(t) - k| \leq |q_1(t) - k| + |\hat{q}_1(t) - q_1(t)| \leq |q_1(t) - k| + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|,$$

следовательно,

$$\hat{\gamma}(t) = \min\{\hat{q}_1(t), k\} = (\hat{q}_1(t) + k - |\hat{q}_1(t) - k|)/2$$
$$\geq (q_1(t) + k - |q_1(t) - k|)/2 - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|,$$

что эквивалентно $\hat{\gamma}(t) \geq \gamma(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|$. Из (13) вытекает (15). Теорема 3 доказана.

Заключение. С использованием функционала Ляпунова — Красовского (2) доказаны достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

Получены оценки на решения системы (1). Параметры в полученных оценках конструктивны. Также указаны условия на матрицы в (10), при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость.

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Демиденко, И. И. Матвеевой, М. А. Скворцовой за внимание и ценные советы. Автор также выражает благодарность рецензенту за высказанные замечания и рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.

4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

5. *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1996.

6. *Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D.* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl. V. 463).

7. *Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.* Stability of Time-Delay Systems // Boston: Birkhauser, 2003. (Control Engrg.).

8. *Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. N. Y.: Springer Verl., 2012.

9. *Gil' M. I.* Stability of neutral functional differential equations // Atlantis Stud. Differ. Equ. Paris: Atlantis Press, 2014. V. 3.

10. *Ыскак Т. К.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Известия ИГУ. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 159–169.

11. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

12. *Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 17–29.

13. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А.* Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

14. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014, Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
15. *Ыскак Т. К.* Достаточные условия асимптотической устойчивости решений одного класса линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Динамические системы. 2015. Т. 5(33), № 3–4. С. 177–191.
16. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
17. *Матвеева И. И.* О робастной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 86–95.
18. *Yskak T. K.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. V. 25, N 1–2. P. 97–108.

Поступила в редакцию 7 мая 2019 г.
После доработки 31 мая 2019 г.
Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Ыскак Тимур
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1
630090 г. Новосибирск
E-mail: istima92@mail.ru