Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. E. Svetov, A. P. Polyakova, S. V. Maltseva, The method of approximate inverse for ray transform operators on two-dimensional symmetric m -tensor fields, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 1, 104–115

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.110>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.183.62

April 26, 2023, 17:54:19

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДВУМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ m -ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ*)

И. Е. Светов, А. П. Полякова, С. В. Мальцева

Предлагаются два подхода для решения задачи восстановления симметричного m -тензорного поля, заданного в единичном круге, по известным значениям лучевых преобразований. Подходы основаны на методе приближенного обращения. При использовании первого из подходов симметричное m -тензорное поле восстанавливается покомпонентно, в то время как при использовании второго подхода восстанавливаются потенциалы соленоидальной и m потенциальных частей тензорного поля.

Ключевые слова: тензорная томография, метод приближенного обращения, сопряженный оператор, лучевое преобразование, преобразование Радона, тензорное поле, потенциал.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.110

Введение. Под термином «задача двумерной m -тензорной томографии» в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть ограниченная область плоскости заполнена средой без рефракции. В среде распределено некоторое симметричное m -тензорное поле ($m \geq 1$). По известным лучевым преобразованиям требуется восстановить это поле.

Перечислим основные математические средства, на которых базируются численные методы и алгоритмы решения задач двумерной тензорной томографии. В случае отсутствия явления рефракции очень привлекательны с математической точки зрения формулы обращения как для восстановления функций [1, 2], так и тензорных полей [3–6]. Особый интерес, и в том числе в силу возможности использования при решении задач рефракционной томографии, представляют метод наименьших квадратов и метод сингулярного разложения. При численном решении задач m -тензорной томографии ($m \leq 2$) метод наименьших квадратов применялся с полиномиальными [7–9] и B -сплайновыми аппроксимирующими последовательностями [10–13]. Отметим работы, в которых получены сингулярные разложения операторов лучевых преобразований двумерных векторных полей [14–16] и симметричных 2-тензорных полей [17–19] и проведены численные исследования алгоритмов, основанных на методе усеченного сингулярного разложения. В работе [20] для решения задач тензорной томографии по восстановлению двумерных соленоидальных векторных и 2-тензорных полей предложен подход с использованием ортогональных базисов, построенных с применением полиномов Чебышева.

В данной работе предлагаются два подхода решения задачи m -тензорной томографии ($m \geq 1$), основанные на так называемом методе приближенного обращения, который развивается уже более 25-ти лет А. К. Луисом и его

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5 (проект 0314-2016-0011), при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00057).

учениками [21–23]. Метод применялся в том числе и для решения задач скалярной [24–26] и векторной томографии [27, 28]. Теоретические основы метода лежат в функциональном анализе. Это теорема Рисса о представлении линейного функционала, понятие фундаментального решения и его свойства, приближение δ -функции. Идея метода приближенного обращения состоит в следующем. Пусть требуется найти решение (функцию f) операторного уравнения $Af = g$ для линейного ограниченного оператора $A: H \rightarrow K$, где H и K — гильбертовы пространства. Для этого используются усредняющие функции e_γ^y , обладающие свойствами

$$\int_{\mathbb{R}^n} e_\gamma^y(x) dx = 1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f, e_\gamma^y \rangle_H = f(y).$$

Пусть A^* — сопряженный оператор для A и функции e_γ^y лежат в пространстве образов A^* . Тогда существуют функции ψ_γ^y такие, что $A^*\psi_\gamma^y = e_\gamma^y$. Следовательно, имеем

$$f(y) \approx \langle f, e_\gamma^y \rangle_H = \langle f, A^*\psi_\gamma^y \rangle_H = \langle Af, \psi_\gamma^y \rangle_K = \langle g, \psi_\gamma^y \rangle_K.$$

Таким образом, приближенное решение строится как скалярное произведение исходных данных g и функций ψ_γ^y , нахождение которых является отдельной важной задачей (см., например, [25, 26]).

Предлагаемые в данной работе подходы являются обобщением результатов, ранее полученных авторами, для восстановления векторных ($m = 1$) и симметричных 2-тензорных ($m = 2$) полей [29–31].

1. Определения и постановка задачи. Введем обозначения $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ для единичного круга, $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ для единичной окружности и $Z = \{(s, \xi) \mid s \in (-1, 1), \xi = \xi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in [0, 2\pi)\}$ для цилиндра.

Функции (скалярные поля) обозначим через $f(x), g(x), \dots$. За потенциалами, которые задают тензорные поля, закрепляем обозначения $\varphi(x), \varphi^{(0)}(x), \dots$. Считаем их определенными в $\mathbb{R}^2$ с носителем в $B \subset \mathbb{R}^2$. Множество симметричных m -тензорных полей $\mathbf{w}(x) = (w_{i_1 \dots i_m}(x))$, $\mathbf{u}(x) = (u_{i_1 \dots i_m}(x))$, $\mathbf{v}(x) = (v_{i_1 \dots i_m}(x))$, $i_1, \dots, i_m = 1, 2$, определенных в B , обозначим $S^m(B)$. Скалярное произведение в $S^m(B)$ вводится формулой

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle_{S^m(B)} = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 u_{i_1 \dots i_m}(x) v_{i_1 \dots i_m}(x).$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из симметричных m -тензорных полей, определенных в B , с интегрируемыми в квадрате компонентами. Скалярное произведение двух тензорных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства $L_2(S^m(B))$ задается формулой

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L_2(S^m(B))} = \int_B \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle_{S^m(B)} dx.$$

Через $H^k(S^m(B))$, $H_0^k(S^m(B))$ обозначим пространства Соболева симметричных m -тензорных полей. Кроме того, мы будем использовать пространства $L_2(Z)$ и $H^k(Z)$. Скалярное произведение двух функций f и g из пространства $L_2(Z)$ задается формулой

$$\langle f, g \rangle_{L_2(Z)} = \int_Z f(s, \xi) g(s, \xi) ds d\xi.$$

1.1. Дифференциальные операторы. Операторы внутреннего дифференцирования d и внутреннего ортогонального дифференцирования $d^\perp$ являются композициями операторов ковариантного дифференцирования и симметризации

$$d, d^\perp: H^k(S^m(B)) \rightarrow H^{k-1}(S^{m+1}(B)),$$

которые действуют на симметричное m -тензорное поле $\mathbf{v}$ по правилам

$$\begin{aligned} (d\mathbf{v})_{i_1 \dots i_m j} &= \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial v_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial v_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x_{i_k}} \right), \\ (d^\perp \mathbf{v})_{i_1 \dots i_m j} &= \frac{1}{m+1} \left((-1)^j \frac{\partial v_{i_1 \dots i_m}}{\partial x_{3-j}} + \sum_{k=1}^m (-1)^{i_k} \frac{\partial v_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x_{3-i_k}} \right). \end{aligned}$$

Наряду с этими операторами нам понадобится оператор дивергенции

$$\operatorname{div}: H^k(S^m(B)) \rightarrow H^{k-1}(S^{m-1}(B)),$$

который действует на m -тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу

$$(\operatorname{div} \mathbf{w})_{i_1 \dots i_{m-1}} = \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 2}}{\partial x_2}.$$

Напомним, что m -тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ называется потенциальным, если существует $(m-1)$ -тензорное поле $\mathbf{v} \in H^{k+1}(S^{m-1}(B))$ (потенциал) такое, что $\mathbf{u} = d\mathbf{v}$. Поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \in H^{k-1}(S^{m-1}(B))$. Известно [32], что любое двумерное соленоидальное симметричное тензорное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ можно представить через одну функцию $\mathbf{w} = (d^\perp)^m \varphi$, где $\varphi \in H^{m+k}(B)$.

Имеет место разложение [3, 33] любого симметричного m -тензорного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ на сумму соленоидального и потенциального полей:

$$\mathbf{u} = {}^s\mathbf{u} + d\mathbf{v}, \quad \delta^s \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\partial B} = 0, \quad (1)$$

где ${}^s\mathbf{u} \in H^m(S^m(B))$ и $\mathbf{v} \in H^{m+1}(S^{m-1}(B))$. Разложение (1) единственно. Используя данное разложение, можно получить более детальное разложение симметричного m -тензорного поля.

Теорема 1. *Имеет место разложение любого симметричного m -тензорного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ на сумму соленоидального и m потенциальных полей:*

$$\mathbf{u} = (d^\perp)^m \varphi^{(m)} + d \left(\sum_{j=0}^{m-1} d^{m-1-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)} \right), \quad (2)$$

где $\varphi^{(j)} \in H^{m+k}(B)$, $j = 0, \dots, m$, и $\sum_{j=0}^l d^{l-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)}|_{\partial B} = 0$, $l = 0, \dots, m-1$.

Разложение (2) с перечисленными условиями единственно.

Доказательство. При $m = 1$ разложение (2) следует из разложения (1) и представления двумерного соленоидального поля через один потенциал, т. е. для любого векторного поля $\mathbf{u} \in H^{m+k-1}(S^1(B))$ имеем

$$\mathbf{u} = d^\perp \varphi^{(1)} + d\varphi^{(0)}, \quad \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)} \in H^{m+k}(B), \quad \varphi^{(0)}|_{\partial B} = 0.$$

Докажем утверждение теоремы 1, используя метод математической индукции. Для этого предположим, что разложение (2) верно при $m = p - 1$. Именно, для любого симметричного $(p - 1)$ -тензорного поля $\mathbf{v} \in H^{m+k-p+1}(S^{p-1}(B))$ имеет место единственное разложение на сумму соленоидального и $p - 1$ потенциальных полей:

$$\mathbf{v} = (d^\perp)^{p-1} \varphi^{(p-1)} + d \left(\sum_{j=0}^{p-2} d^{p-2-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)} \right); \quad (3)$$

$$\varphi^{(j)} \in H^{m+k}(B), \quad j = 0, \dots, p - 1; \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^l d^{l-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)}|_{\partial B} = 0, \quad l = 0, \dots, p - 2. \quad (5)$$

При $m = p$ из разложения (1) и представления двумерного соленоидального поля через один потенциал для поля $\mathbf{u} \in H^{m+k-p}(S^p(B))$ следует разложение

$$\mathbf{u} = (d^\perp)^p \varphi^{(p)} + d\mathbf{v}; \quad (6)$$

$$\varphi^{(p)} \in H^{m+k}(B); \quad (7)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial B} = 0; \quad (8)$$

$\mathbf{v} \in H^{m+k-p+1}(S^{p-1}(B))$. Разложение (3) для поля $\mathbf{v}$ можно переписать в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^{p-1} d^{p-1-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)}. \quad (9)$$

Из разложений (6) и (9) следует разложение

$$\mathbf{u} = (d^\perp)^p \varphi^{(p)} + d \left(\sum_{j=0}^{p-1} d^{p-1-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)} \right).$$

Из условий (5), (8) и разложения (9) следуют условия

$$\sum_{j=0}^l d^{l-j} (d^\perp)^j \varphi^{(j)}|_{\partial B} = 0, \quad l = 0, \dots, p - 1,$$

которые обеспечивают единственность разложения (2) (см, например, [33]). Совокупность условий (4) и (7) можно переписать в виде $\varphi^{(j)} \in H^{m+k}(B)$, $j = 0, \dots, p$. Таким образом утверждение теоремы 1 доказано для $m = p$, а следовательно, и для любого m .

1.2. Преобразование Радона и лучевые преобразования. Пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$. Тогда единичные векторы $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\eta = \xi^\perp = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ и вещественное число $s \in \mathbb{R}$ задают прямую $x = s\xi + t\eta$.

Преобразование Радона $\mathcal{R}: H^k(B) \rightarrow H^k(Z)$ функции $f \in H^k(B)$ определяется формулой

$$[\mathcal{R}f](s, \xi) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\xi + t\eta) dt.$$

Операторы лучевых преобразований $\mathcal{P}_m^{(j)}: H^k(S^m(B)) \rightarrow H^k(Z)$, $m \geq 1$, $j = 0, \dots, m$, $k \geq 0$, действующие на симметричное m -тензорное поле $\mathbf{w} = (w_{i_1 \dots i_m})$ и переводящие его в функции, определенные в цилиндре Z , задаются соотношениями

$$[\mathcal{P}_m^{(j)} w](s, \xi) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 w_{i_1 \dots i_m}(s\xi + t\eta) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_j} \eta_{i_{j+1}} \dots \eta_{i_m} dt. \quad (10)$$

При $j = 0$ — это продольное лучевое преобразование

$$[\mathcal{P}_m w](s, \xi) := [\mathcal{P}_m^{(0)} w](s, \xi) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 w_{i_1 \dots i_m}(s\xi + t\eta) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_m} dt,$$

при $j = m$ — поперечное лучевое преобразование

$$[\mathcal{P}_m^\perp w](s, \xi) := [\mathcal{P}_m^{(m)} w](s, \xi) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 w_{i_1 \dots i_m}(s\xi + t\eta) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m} dt,$$

при $j = 1, \dots, m-1$ лучевые преобразования называются смешанными.

В отличие от преобразования Радона лучевые преобразования симметричных m -тензорных полей обладают ненулевыми ядрами. Приведем описание ядер и областей значения лучевых преобразований, а также связей между лучевыми преобразованиями тензорных полей и преобразованиями Радона их потенциалов (подробнее см. [5]).

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть даны симметричные m -тензорные поля $\mathbf{u}^{(j)} = d^j(d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$, $j = 0, \dots, m$, с потенциалами $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(m)} \in H_0^m(B)$. Тогда ядра лучевых преобразований описываются равенствами

$$[\mathcal{P}_m^{(j)} \mathbf{u}^{(l)}](s, \xi) = 0, \quad j, l = 0, \dots, m, \quad j \neq l.$$

Утверждение 2. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}$ симметричных m -тензорных полей $d^j(d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$ связаны с преобразованиями Радона потенциалов $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(m)} \in H_0^m(B)$ соотношениями

$$[\mathcal{P}_m^{(j)} d^j(d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}](s, \xi) = \frac{1}{C_m^j} \frac{\partial^m}{\partial s^m} [\mathcal{R} \varphi^{(m-j)}](s, \xi), \quad j = 0, \dots, m,$$

где $C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Пусть некоторое симметричное m -тензорное поле $\mathbf{w}$ задано в единичном круге. По известным значениям всех или нескольких лучевых преобразований требуется восстановить симметричное m -тензорное поле $\mathbf{w}$ или его часть.

2. Метод приближенного обращения для преобразования Радона. Для решения поставленной задачи предлагаются два подхода, основанные на методе приближенного обращения. В этом разделе приведены результаты,

полученные в [25], для восстановления функции по известному преобразованию Радона.

Двойственным оператором $\mathcal{R}^*$ для преобразования Радона $\mathcal{R}$ является оператор обратной проекции $\mathcal{R}^\sharp$, который определяется для функции $g(s, \xi)$, $g \in Z$, равенством

$$[\mathcal{R}^*g](x) = [\mathcal{R}^\sharp g](x) = \int_0^{2\pi} g(\langle x, \xi(\alpha) \rangle, \xi(\alpha)) d\alpha = \int_0^{2\pi} g(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \xi(\alpha)) d\alpha.$$

Пусть $e \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — функция со свойством $\int_{\mathbb{R}^2} e(x) dx = 1$. С помощью оператора сдвига и растяжения $T_{1,\gamma}^y: L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ образуем из функции e моллифайер (англ. mollify — смягчать, сглаживать)

$$e_\gamma^y(x) = T_{1,\gamma}^y e(x) = \gamma^{-2} e\left(\frac{x-y}{\gamma}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma > 0.$$

Тогда имеет место равенство $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f, e_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = f(y)$ для функции $e_\gamma^y(x)$ и произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

При фиксированном $y \in \mathbb{R}^2$ оператор сдвига и растяжения $T_{2,\gamma}^y: L_2(Z) \rightarrow L_2(Z)$ для функции $g \in L_2(Z)$ определяется формулой

$$T_{2,\gamma}^y g(s, \xi) = \gamma^{-2} g\left(\frac{s - \langle y, \xi \rangle}{\gamma}, \xi\right)$$

и связан с оператором $T_{1,\gamma}^y$ равенством $\mathcal{R}^* T_{2,\gamma}^y = T_{1,\gamma}^y \mathcal{R}^*$. Пусть функция e лежит в пространстве образов оператора $\mathcal{R}^*$ и ψ является решением уравнения $\mathcal{R}^* \psi = e$, тогда при фиксированных γ и y функция $\psi_\gamma^y = T_{2,\gamma}^y \psi$ является решением уравнения $\mathcal{R}^* \psi_\gamma^y = e_\gamma^y$. Функция ψ_γ^y называется ядром восстановления, ассоциированным с моллифайером e_γ^y . Таким образом, мы имеем

$$\langle f, e_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \langle f, \mathcal{R}^* \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathcal{R}f, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Следовательно, мы имеем формулу для приближенного обращения преобразования Радона

$$f(y) \approx \langle \mathcal{R}f, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}. \quad (11)$$

Если функция $e(x)$ инвариантна относительно вращения, т. е. $e(x) = e^0(|x|)$, тогда соответствующее ядро восстановления ψ не зависит от ξ .

3. Метод приближенного обращения операторов лучевых преобразований симметричных m -тензорных полей. В данном разделе обосновываются два подхода, базирующиеся на методе приближенного обращения, для восстановления симметричных m -тензорных полей. Первый подход позволяет восстановить тензорное поле покомпонентно, в то время как при использовании второго подхода восстанавливаются потенциалы соленоидальной и потенциальных частей. При $m = 1, 2$ результат получен в работах [29–31].

Теорема 2. Пусть для симметричного m -тензорного поля $\mathbf{w}$ известны значения всех лучевых преобразований $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}]$, $l = 0, \dots, m$. Тогда для приближенного восстановления компоненты $w_{i_1 \dots i_m}$ симметричного m -тензорного поля $\mathbf{w}$ с индексами $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq 2$, среди которых ровно k индексов равны двум, $0 \leq k \leq m$, имеет место формула $w_{i_1 \dots i_m}(y) \approx \langle \mathcal{G}_k \mathbf{w}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}$, где

ψ_γ^y — ядро восстановления для преобразования Радона, функция $[\mathcal{G}_k \mathbf{w}](s, \xi)$ определяется формулой

$$[\mathcal{G}_k \mathbf{w}](s, \xi) = \sum_{l=0}^m \left(\sum_{\substack{j_1, \dots, j_m=1, \\ j_1 + \dots + j_m = m+l}}^2 \xi_{j_1} \dots \xi_{j_k} \eta_{j_{k+1}} \dots \eta_{j_m} \right) [\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}](s, \xi). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для симметричного m -тензорного поля $\mathbf{w}$ известны значения всех $(m+1)$ лучевых преобразований (10). Тогда в силу линейности интегральных операторов имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_m^{(j)} \mathbf{w}](s, \xi) &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 w_{i_1 \dots i_m}(s\xi + t\eta) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_j} \eta_{i_{j+1}} \dots \eta_{i_m} dt \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 \xi_{i_1} \dots \xi_{i_j} \eta_{i_{j+1}} \dots \eta_{i_m} [\mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}](s, \xi). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем равенства

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_m^{(0)} \mathbf{w}](s, \xi) &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 \eta_{i_1} \dots \eta_{i_m} [\mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}](s, \xi), \\ [\mathcal{P}_m^{(1)} \mathbf{w}](s, \xi) &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 \xi_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_m} [\mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}](s, \xi), \\ &\dots \dots \dots \\ [\mathcal{P}_m^{(m)} \mathbf{w}](s, \xi) &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^2 \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m} [\mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}](s, \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Тензорное поле $\mathbf{w}$ симметричное, т. е. для любых мультииндексов $j_1, \dots, j_m$ и $l_1, \dots, l_m$ с одинаковым количеством индексов, равных двум, имеем $w_{j_1 \dots j_m} = w_{l_1 \dots l_m}$. Следовательно, мы имеем систему (13) из $(m+1)$ -го линейного уравнения с $(m+1)$ неизвестным: $[\mathcal{R}w_{1\dots 1}], [\mathcal{R}w_{1\dots 12}], \dots, [\mathcal{R}w_{2\dots 2}]$. Матрица T системы (13) обладает свойством $T^2 = E$, где E — единичная матрица [5]. Поэтому решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}w_{1\dots 1}](s, \xi) &= \sum_{l=0}^m \left(\sum_{\substack{j_1, \dots, j_m=1, \\ j_1 + \dots + j_m = m+l}}^2 \eta_{j_1} \dots \eta_{j_m} \right) [\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}](s, \xi), \\ [\mathcal{R}w_{1\dots 12}](s, \xi) &= \sum_{l=0}^m \left(\sum_{\substack{j_1, \dots, j_m=1, \\ j_1 + \dots + j_m = m+l}}^2 \xi_{j_1} \eta_{j_2} \dots \eta_{j_m} \right) [\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}](s, \xi), \\ &\dots \dots \dots \\ [\mathcal{R}w_{2\dots 2}](s, \xi) &= \sum_{l=0}^m \left(\sum_{\substack{j_1, \dots, j_m=1, \\ j_1 + \dots + j_m = m+l}}^2 \xi_{j_1} \dots \xi_{j_m} \right) [\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}](s, \xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Для приближенного восстановления компоненты $w_{i_1 \dots i_m}$ симметричного m -тензорного поля $\mathbf{w}$ с индексами $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq 2$, среди которых ровно k индексов равны двум, в силу (11) имеем

$$w_{i_1 \dots i_m}(y) \approx \langle \mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Обозначив правую часть равенства для $[Rw_{i_1 \dots i_m}](s, \xi)$ из (14) через $[\mathcal{G}_k \mathbf{w}](s, \xi)$, получаем утверждение теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда для тензорного поля $\mathbf{w}$ известны значения не всех лучевых преобразований, система (13) будет недоопределенной. Однако если дополнительно известно, что потенциалы, образующие тензорное поле $\mathbf{w} = \sum_{j=0}^m d^j (d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$, лежат в пространстве $H_0^m(B)$, система разрешима.

Поясним на примере. Пусть не известно значение лучевого преобразования $[\mathcal{P}_m^l \mathbf{w}]$ симметричного m -тензорного поля $\mathbf{w} = \sum_{j=0}^m d^j (d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$ и известно, что $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(m)} \in H_0^m(B)$. Тогда в силу утверждения 1 соответствующую часть $d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi^{(m-l)}$ тензорного поля $\mathbf{w}$ восстановить невозможно, так как она лежит в ядре всех остальных лучевых преобразований. Одновременно все остальные части $d^j (d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$, $j \neq l$, тензорного поля $\mathbf{w}$ лежат в ядре лучевого преобразования $\mathcal{P}_m^l$. Таким образом, введя симметричное m -тензорное поле $\mathbf{u} = \mathbf{w} - d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi^{(m-l)}$, имеем $[\mathcal{P}_m^{(j)} \mathbf{u}](s, \xi) = [\mathcal{P}_m^{(j)} \mathbf{w}](s, \xi)$, $j = 0, \dots, m$, $j \neq l$, и $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{u}](s, \xi) = 0$. Следовательно, положив в системе (13) $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}](s, \xi) = 0$, мы сможем восстановить симметричное m -тензорное поле $\mathbf{u}$, являющееся частью поля $\mathbf{w}$. Именно, для восстановления поля $\mathbf{u}$ значение неизвестного лучевого преобразования в формуле (12) необходимо положить равным нулю. Аналогичные рассуждения верны и в случаях, когда неизвестны значения нескольких лучевых преобразований.

Теорема 3. Предположим, что симметричное m -тензорное поле $\mathbf{w}$ имеет вид $\mathbf{w} = d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi^{(m-l)}$ с потенциалом $\varphi^{(m-l)} \in H^m(B)$ и известно значение лучевого преобразования $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}]$. Тогда для приближенного восстановления потенциала $\varphi^{(m-l)}$ имеет место формула

$$\varphi^{(m-l)}(y) \approx C_m^l \langle \mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}, \Psi_{\gamma, m}^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Здесь

$$\Psi_{\gamma, m}^y(s, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s) \right) *_s \psi_\gamma^y(s, \xi), \quad (15)$$

где ψ_γ^y — ядро восстановления для преобразования Радона, $*_s$ — свертка по аргументу s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения формул приближенного обращения лучевых преобразований будем использовать преобразование Фурье. Имеет место равенство Парсеваля (см., например, [34])

$$\langle g, h \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle F[g], F[h] \rangle_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (16)$$

где $F[\cdot]$ — одномерное преобразование Фурье, определяемое формулой

$$F[f](\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp(-i\tilde{z}z) dz.$$

Для обратного преобразования Фурье будем использовать обозначение $F^{-1}[\cdot]$. Через $Z_0 = \{(s, \xi) \mid s \in \mathbb{R}, \xi = \xi(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in [0, 2\pi)\}$ обозначим бесконечный цилиндр. Пусть $f, g \in L_2(Z_0)$ и носитель как минимум одной из этих функций содержится в $Z \subset Z_0$. Тогда из равенства (16) следует равенство

$$\langle g, h \rangle_{L_2(Z)} = \langle g, h \rangle_{L_2(Z_0)} = \langle F[g], F[h] \rangle_{L_2(Z_0)}. \quad (17)$$

Здесь и далее преобразование Фурье применяется по переменной s . При доказательстве потребуются хорошо известные свойства преобразования Фурье для производной

$$F\left[\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\right](\tilde{z}) = (i\tilde{z})^k F[f](\tilde{z}) \quad (18)$$

и свертки

$$F[f * g](\tilde{z}) = \sqrt{2\pi} F[f](\tilde{z}) \cdot F[g](\tilde{z}). \quad (19)$$

Принимая во внимание утверждение 2 и свойство преобразования Фурье (18), получим (для аргументов $\tilde{s}, \xi$)

$$\begin{aligned} F[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}] &= F[\mathcal{P}_m^{(l)} d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi^{(m-l)}] \\ &= \frac{1}{C_m^l} F\left[\frac{\partial^m [\mathcal{R}\varphi^{(m-l)}]}{\partial s^m}\right] = \frac{1}{C_m^l} (i\tilde{s})^m F[\mathcal{R}\varphi^{(m-l)}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя (11), для нашей задачи получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(m-l)}(y) &\approx \langle \mathcal{R}\varphi^{(m-l)}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} \stackrel{(17)}{=} \langle F[\mathcal{R}\varphi^{(m-l)}], F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(Z_0)} \\ &= \langle (i\tilde{s})^m F[\mathcal{R}\varphi^{(m-l)}], (i\tilde{s})^{-m} F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(Z_0)} \\ &\stackrel{(20)}{=} C_m^l \langle F[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}], (i\tilde{s})^{-m} F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(Z_0)} \\ &\stackrel{(17)}{=} C_m^l \langle \mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}, F^{-1}[(i\tilde{s})^{-m} F[\psi_\gamma^y]] \rangle_{L_2(Z)}. \end{aligned}$$

В силу равенства (см., например, [35])

$$(i\tilde{s})^{-m} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F\left[\frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s)\right](\tilde{s})$$

и свойства преобразования Фурье (19) получаем

$$F^{-1}[(i\tilde{s})^{-m} F[\psi_\gamma^y]](s, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s) \right) *_s \psi_\gamma^y(s, \xi).$$

Обозначив правую часть последнего равенства через $\Psi_{\gamma, m}^y(s, \xi)$, получим утверждение теоремы 3.

Для восстановления потенциала $\varphi^{(m-l)}$ поля общего вида

$$\mathbf{w} = \sum_{j=0}^m d^j (d^\perp)^{m-j} \varphi^{(m-j)}$$

по значениям лучевого преобразования $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}]$ необходимо обладать дополнительной информацией о потенциалах $\varphi^{(m-j)}$, $j = 0, \dots, m$, $j \neq l$. Имено, требуется $\varphi^{(m-j)} \in H_0^m(B)$, $j = 0, \dots, m$, $j \neq l$. Тогда соответствующие им части тензорного поля $\mathbf{w}$ лежат в ядре $\mathcal{P}_m^{(l)}$, т. е. имеем $[\mathcal{P}_m^{(l)} \mathbf{w}] = [\mathcal{P}_m^{(l)} d^l (d^\perp)^{m-l} \varphi^{(m-l)}]$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям при доказательстве теоремы 3. Восстановление гармонических полей является отдельной задачей (см., например, [6]), требующей дополнительного исследования.

Введем функцию

$$\Psi_m(s, \xi) = \Psi_{1, m}^{(0,0)}(s, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s) \right) *_s \psi(s, \xi). \quad (21)$$

Следующая теорема устанавливает связь между функциями $\Psi_{\gamma, m}^y(s, \xi)$ и $\Psi_m(s, \xi)$.

Теорема 4. Для функций $\Psi_{\gamma,m}^y(s, \xi)$ и $\Psi_m(s, \xi)$, определенных формулами (15) и (21) соответственно, имеет место равенство

$$\Psi_{\gamma,m}^y(s, \xi) = \gamma^{m-2} \Psi_m\left(\frac{s - \langle y, \xi \rangle}{\gamma}, \xi\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя связь функций $\psi_\gamma^y(s, \xi)$ и $\psi(s, \xi)$, имеем равенство

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma,m}^y(s, \xi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s) \right) *_s \psi_\gamma^y(s, \xi) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s-t) \psi_\gamma^y(t, \xi) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s-t) \gamma^{-2} \psi\left(\frac{t - \langle y, \xi \rangle}{\gamma}, \xi\right) dt. \end{aligned}$$

Сделав замену $p = \frac{t - \langle y, \xi \rangle}{\gamma}$, получим утверждение теоремы 4:

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma,m}^y(s, \xi) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s - p\gamma - \langle y, \xi \rangle)^{m-1}}{(m-1)!} \operatorname{sgn}(s - p\gamma - \langle y, \xi \rangle) \gamma^{-1} \psi(p, \xi) dp \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{m-2}}{(m-1)!} \left(\frac{s - \langle y, \xi \rangle}{\gamma} - p \right)^{m-1} \operatorname{sgn}\left(\frac{s - \langle y, \xi \rangle}{\gamma} - p\right) \psi(p, \xi) dp \\ &= \gamma^{m-2} \Psi_m\left(\frac{s - \langle y, \xi \rangle}{\gamma}, \xi\right). \end{aligned}$$

Заключение. Предложены два подхода по восстановлению двумерных симметричных m -тензорных полей по известным значениям лучевых преобразований. Подходы основаны на методе приближенного обращения. При использовании первого из подходов симметричное m -тензорное поле восстанавливается покомпонентно, в то время как при использовании второго подхода восстанавливаются потенциалы, соответствующие одной соленоидальной и m потенциальным частям тензорного поля. Теоремы, доказанные в работе, представляют фундаментальный интерес и носят методологический характер. Полученные формулы для метода приближенного обращения являются существенным обобщением (на случай тензорных полей произвольной валентности) результатов, полученных для решения задач по восстановлению скалярных ($m = 0$) [25], векторных ($m = 1$) [29, 30] и симметричных 2-тензорных ($m = 2$) [31] полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deans S. The Radon Transform and Some of Its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
3. Шарафутдинов В. А. Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
4. Светов И. Е. Свойства лучевых преобразований двумерных 2-тензорных полей, заданных в единичном круге // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 121–130.
5. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. Tomography of tensor fields in the plain // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.

6. Светов И. Е. Формулы обращения для восстановления двумерных гармонических векторных полей по известным лучевым преобразованиям // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 436–446; <http://semr.math.nsc.ru>
7. Derevtsov E. Yu., Kleshchev A. G., Sharafutdinov V. A. Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // J. Inverse Ill-posed Probl. 1999. V. 7, N 1. P. 83–103.
8. Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 233–254.
9. Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. Приближенное решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 39–62.
10. Деревцов Е. Ю., Светов И. Е., Волков Ю. С. Использование B -сплайнов в задаче эмиссионной 2D-томографии в рефрагирующей среде // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 3. С. 45–60.
11. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E., Volkov Yu. S., Schuster T. Numerical B -spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorption and refraction // Proc. 2008 IEEE Region 8 Internat. Conf. on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08. Novosibirsk, 2008. P. 212–217.
12. Светов И. Е., Полякова А. П. Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием B -сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 183–199.
13. Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T. A numerical solver based on B -splines for 2D-vector field tomography in a refracting medium // Math. Comput. Simulation. 2014. V. 97. P. 207–223.
14. Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster T. Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions // J. Inverse Ill-posed Probl. 2007. V. 15, N 1. P. 1–38.
15. Derevtsov E. Yu., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D-vector tomography // J. Inverse Ill-posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715.
16. Светов И. Е., Полякова А. П. Сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 90–108; <http://semr.math.nsc.ru>
17. Деревцов Е. Ю., Полякова А. П. Решение задачи интегральной геометрии 2-тензорных полей методом сингулярного разложения // Вестн. НГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 73–94.
18. Светов И. Е., Полякова А. П. Приближенное решение задачи двумерной 2-тензорной томографии с использованием усеченного сингулярного разложения // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 480–499; <http://semr.math.nsc.ru>
19. Kazantsev S. G., Bukhgeim A. A. Singular value decomposition for the 2D fan-beam Radon transform of tensor fields // J. Inverse Ill-posed Probl. 2004. V. 12, N 3. P. 245–278.
20. Kazantsev S. G., Bukhgeim A. A. The Chebyshev ridge polynomials in 2D-tensor tomography // J. Inverse Ill-posed Probl. 2006. V. 14, N 2. P. 157–188.
21. Louis A. K., Maass P. A mollifier method for linear operator equations of the first kind // Inverse Problems. 1990. V. 6, N 3. P. 427–440.
22. Louis A. K. Approximate inverse for linear and some nonlinear problems // Inverse Problems. 1996. V. 12, N 2. P. 175–190.
23. Schuster T. The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications. Heidelberg: Springer-Verl., 2007. (Lecture Notes in Mathematics; V. 1906).
24. Louis A. K., Schuster T. A novel filter design technique in 2D computerized tomography // Inverse Problems. 1996. V. 12, N 5. P. 685–696.
25. Rieder A., Schuster T. The Approximate inverse in action with an application to computerized tomography // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 37, N 6. P. 1909–1929.
26. Derevtsov E. Yu., Dietz R., Louis A. K., Schuster T. Influence of refraction to the accuracy of a solution for the 2D-emission tomography problem // J. Inverse Ill-posed Probl. 2000. V. 8, N 2. P. 161–191.
27. Rieder A., Schuster T. The approximate inverse in action III: 3D-Doppler tomography // Numer. Math. 2004. V. 97, N 2. P. 353–378.

28. Schuser T. Defect correction in vector field tomography: detecting the potential part of a field using BEM and implementation of the method // Inverse Problems. 2005. V. 21, N 1. P. 75–91.
29. Светов И. Е., Мальцева С. В., Полякова А. П. Приближенное обращение операторов двумерной векторной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 607–623; <http://semr.math.nsc.ru>
30. Svetov I. E., Maltseva S. V., Polyakova A. P. Numerical solution of 2D-vector tomography problem using the method of approximate inverse // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020132.
31. Derevtsov E. Yu., Louis A. K., Maltseva S. V., Polyakova A. P., Svetov I. E. Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 12. P. 124001; DOI 10.1088/1361-6420/aa8f5a
32. Derevtsov E. Yu. An approach of direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems // J. Inverse Ill-posed Probl. 2005. V. 13, N 3. P. 213–246.
33. Boman J., Sharafutdinov V. Stability estimates in tensor tomography // Inverse Probl. Imaging. 2018. V. 12, N 5. P. 1245–1262.
34. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
35. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 9 июня 2018 г.

После доработки 24 октября 2018 г.

Принята к публикации 15 декабря 2018 г.

Светов Иван Евгеньевич

Полякова Анна Петровна

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2

Мальцева Светлана Васильевна

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

просп. Акад. Лаврентьева, 15

630090 г. Новосибирск

E-mail: svetovie@math.nsc.ru; apolyakova@math.nsc.ru; maltsevasv@math.nsc.ru