Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. Yu. Liapidevskii, A. K. Khe, A. A. Chesnokov, Flow regimes in a flat elastic channel in presence of a local change of wall stiffness, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 2, 37–48

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.204>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 18:16:20

РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ ЭЛАСТИЧНОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛОКАЛЬНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ СТЕНОК*)

В. Ю. Ляпидевский, А. К. Хе, А. А. Чесноков

Предложена математическая модель течения в длинном канале с податливыми стенками, позволяющая описывать как стационарные, так и нестационарные (автоколебательные) режимы движения. Модель основана на двухслойном представлении течения с перетоками между слоями. Построены стационарные решения и исследована их структура. Выполнено численное моделирование различных режимов течения при наличии локального изменения жесткости стенок. В частности, построены решения, описывающие формирование монотонного псевдоскачка и развитие нестационарных автоколебаний.

Ключевые слова: уравнения теории мелкой воды, псевдоскачок, автоколебания.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.204

Введение. Изучение течения жидкости в канале с податливыми стенками вызывает интерес не только с точки зрения многочисленных приложений (таких как промышленность, биомеханика и биомедицина), но и с точки зрения построения и исследования математических моделей, описывающих взаимное движение жидкости и стенки канала. Достаточно подробный обзор основных приложений и теоретических моделей приведен в работах [1, 2]. Одной из важнейших задач теории описания совместного движения жидкости и канала с податливыми стенками является задача о распространении пульсовой волны. Для исследования подобных волновых процессов широко распространено применение одномерной математической модели, сходной по своей структуре с уравнениями теории мелкой воды и газовой динамики. Замыкающим соотношением (уравнением состояния) в этом случае служит связь между давлением и площадью поперечного сечения просвета канала. В случае осесимметричного канала круглого сечения (трубка с эластичной стенкой) при положительном трансмуральном давлении (разности давлений в жидкости и в окружающей среде) получается среда с выпуклым уравнением состояния, которая достаточно адекватно описывает распространение пульсационных волн [2, 3]. Однако при отрицательном трансмуральном давлении трубка в случае относительно небольших расходов жидкости начинает сжиматься неосесимметрично, что приводит к новым явлениям таким, например, как резкое схлопывание трубки и развитие автоколебаний большой амплитуды. На рис. 1 представлена схема течения (Starling resistor), позволяющая экспериментально и теоретически исследовать нестационарные явления, возникающие в тонкой эластичной трубке при небольших расходах прокачиваемой через нее жидкости. При отрицательном трансмуральном давлении уравнение состояния перестает быть выпуклым [4], и в рамках теории мелкой воды в течениях могут возникать разрывы, соответствующие ударным волнам разрежения [5, 6]. Возможность

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00498).

и особенности формирования режима катящихся волн в длинных эластичных трубках при невыпуклом уравнении состояния исследованы в работе [7].

Рис. 1. Течение в круглом канале (резистор Старлинга) и форма сечения трубки на разных уровнях [2]: Q — расход жидкости; $p_{\text{entry}}, p_{\text{exit}}$ — давление на входе и выходе из резистора Старлинга; $p_{\text{up}}, p_{\text{down}}$ — давление на входном и выходном концах эластичной трубки; p_{ext} — давление в камере резистора Старлинга; $A-A, B-B$ — поперечные сечения эластичной трубки

Попытка описания неустойчивости течения, изображенного на рис. 1, сталкивается с двумя основными трудностями: необходимостью учета потери энергии за счет развития турбулентного пограничного слоя и постановки граничных условий на границах эластичной и жесткой трубок [2]. Эти проблемы решаются в рамках двухслойной схемы течения, представленной ниже. При этом используется подход, развитый в [8, 9] для описания псевдоскачка или области непрерывного перехода от сверхкритических (сверхзвуковых) к докритическим (дозвуковым) течениям несжимаемой жидкости (баротропного газа) за счет развития турбулентного пограничного слоя. Очевидно, что для корректного моделирования автоколебательного режима, сопровождающегося схлопыванием трубки, необходимо использовать двумерные гидродинамические модели. Тем не менее, ниже будет показано, что в рамках одномерной (осесимметричной) постановки, учитывающей формирование пристеночного турбулентного слоя, возможно получение предварительных результатов, имеющих непосредственное отношение к нестационарным волновым процессам в эластичной трубке и формированию автоколебательного режима течения.

1. Уравнения движения. Рассмотрим плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости в длинном канале с эластичными стенками, в котором осуществляется непрерывный переход от сверхкритического режима течения к докритическому, т. е. псевдоскачок. Механизм этого перехода связан с развитием турбулентного пограничного слоя, средняя скорость течения в котором меньше скорости движения основного потока. Если считать, что пограничный слой формируется в окрестности эластичных стенок канала и течение в плоском канале симметрично относительно его оси, то в рамках принятого подхода достаточно рассмотреть двухслойное представление течения [8, 9].

В длинноволновом приближении сдвиговое движение жидкости в канале с эластичными стенками описывается системой уравнений [10, 11]

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_y + \rho^{-1}p_x &= 0, \quad p_y = 0, \\ U_x + V_y &= 0, \quad H_t + UH_x - V|_{y=H} = 0, \quad V|_{y=0} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y — пространственные переменные; t — время; U, V — компоненты вектора скорости; p — давление; H — полутолщина канала; $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости. Для замыкания модели необходимо задать зависимость

давления p от толщины канала и упругих свойств его стенок. В дальнейшем выбираем следующее замыкающее соотношение [6]:

$$\rho^{-1}p = \varphi(H/\bar{H})K(x), \quad \varphi(H) = H^{10} - H^{-3/2}, \quad (2)$$

с монотонно возрастающей функцией $\varphi(H)$. Без ограничения общности равновесную полутолщину канала $\bar{H}$ полагаем равной единице. Заметим, что функция $\varphi(H)$, заданная формулой (2), является невыпуклой при $H < 1$ (точка перегиба $H \approx 0,76$). Конкретный вид функции $K(x) > 0$ будет определен ниже. В данном случае трансмуральное давление p положительно при $H > 1$ и отрицательно при $H < 1$.

Отметим, что заменой переменных

$$y = r^2/2, \quad V(t, x, y) = r\tilde{V}(t, x, r), \quad H(t, x) = R^2/2$$

система (1) приводится к уравнениям осесимметричного сдвигового течения жидкости в длинной эластичной трубке [11].

Далее будем полагать, что в слое $y \in (0, h)$ течение является потенциальным, т. е. $U = u(t, x)$. Для осредненного описания течения в турбулентном пристеночном слое $y \in (h, H)$ используются средняя скорость потока $v(t, x)$ и ее среднеквадратичное отклонение $q(t, x)$, определяемые формулами

$$v = \frac{1}{\eta} \int_h^H U dy, \quad q^2 = \frac{1}{\eta} \int_h^H (U - v)^2 dy.$$

Здесь $\eta = H - h$ — толщина пристенной вихревой прослойки. С учетом тождества $U = v + (U - v)$ вычислим интегралы

$$\int_h^H U^2 dy = (v^2 + q^2)\eta, \quad \int_h^H U^3 dy = (v^2 + 3q^2)v\eta + P, \quad P = \int_h^H (U - v)^3 dy. \quad (3)$$

Согласно [12] корреляция P в длинноволновом приближении является малой ($P = O(\delta^{3\beta}) \ll \eta q^2 = O(\delta^{2\beta})$) и может быть отброшена, если начальные данные для системы (1) удовлетворяют условию слабой завихренности $U_y = O(\delta^\beta)$, $0 < \beta < 1$. Полагаем, что это условие выполнено.

При указанных предположениях осредненная двухслойная модель движения жидкости принимает вид

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= \sigma q, & u_t + (u^2/2 + p/\rho)_x &= 0, \\ Q_t + (u^2h + (v^2 + q^2)\eta)_x + H\rho^{-1}p_x &= 0, \\ (u^2h + (v^2 + q^2)\eta)_t + (u^3h + (v^2 + 3q^2)v\eta)_x + 2Q\rho^{-1}p_x &= -\sigma\kappa|q|^3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q = uh + v\eta$ — расход жидкости через сечение канала $H = h + \eta$; неотрицательные постоянные σ и κ — эмпирические параметры, отвечающие за массообмен между слоями жидкости и диссипацию энергии. Уравнения (4) с дополнительным соотношением (2) формируют замкнутую систему для определения пяти искомых величин $\mathbf{U} = (h, \eta, u, v, q)^T$ — толщин потенциального и турбулентного слоев, скоростей жидкости в этих слоях, а также сдвиговой скорости q в пристеночном слое.

Получение модели (4) основано на осреднении системы уравнений (1) по поперечному сечению канала с учетом предположений о структуре течения. Интегрирование уравнения неразрывности в (1) по переменной y от 0 до H

и использование граничных условий при $y = 0$ и $y = H$ дает закон сохранения массы:

$$0 = \int_0^H (U_x + V_y) dy = \left(\int_0^H U dy \right)_x - U|_{y=H} H_x + V|_{y=H} = H_t + Q_x.$$

Следуя [10], будем полагать, что скорость вовлечения жидкости из потенциальной прослойки в пристеночный турбулентный слой пропорциональна сдвиговой скорости q . Тогда предыдущее уравнение разделяется на балансовые соотношения массы жидкости в слоях и принимает вид первых двух уравнений системы (4). В результате редукции уравнения импульса в области потенциального течения ($0 < y < h$) получаем третье уравнение системы (4). Осреднение по сечению канала первого уравнения в (1) с использованием граничных условий и формул (3) дает четвертое уравнение модели (4):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^H (U_t + (U^2)_x + (UV)_y + \rho^{-1} p_x) dy \\ &= \left(\int_0^H U dy \right)_t + \left(\int_0^H U^2 dy \right)_x - (H_t + UH_x - V)U|_{y=H} + H\rho^{-1} p_x \\ &= Q_t + (u^2 h + (v^2 + q^2)\eta)_x + H\rho^{-1} p_x. \end{aligned}$$

Очевидным следствием (1) является соотношение

$$(U^2)_t + (U^3)_x + (VU^2)_y + 2\rho^{-1} U p_x = 0,$$

осреднение которого дает замыкающее пятое уравнение системы (4) при $\varkappa = 0$. Для моделирования реальных течений целесообразно учитывать диссипацию энергии [10]. По этой причине в правую часть последнего уравнения в (4) добавлено соответствующее слагаемое, содержащее эмпирический параметр $\varkappa$.

Построенная модель (4) содержит два эмпирических параметра σ и $\varkappa$, отвечающих за вовлечение жидкости в турбулентный слой и диссипацию энергии. Характерные значения этих параметров для жидкости известны [13, 14] и являются следующими: $\sigma \approx 0, 15$, $\varkappa \in (2, 6)$.

Однослойные модели. Система уравнений (4) упрощается в случае отсутствия одного из слоев. Очевидно, что при $\eta = 0$, $H = h$, $v = q = 0$ получаем классические уравнения теории мелкой воды

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x = 0.$$

В случае отсутствия слоя потенциального течения ($h = 0$, $u = 0$ и $H = \eta$) уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_t + (v\eta)_x &= 0, \quad (v\eta)_t + ((v^2 + q^2)\eta)_x + \eta\rho^{-1} p_x = 0, \\ ((v^2 + q^2)\eta)_t + ((v^2 + 3q^2)v\eta)_x + 2\rho^{-1} v\eta p_x &= -\varkappa\sigma|q|^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что система (5) аналогична уравнениям мелкой воды для слабосдвиговых течений, предложенным в [12].

2. Дифференциальные следствия и законы сохранения. Для дальнейшего анализа уравнений движения и проведения расчетов полезно получить ряд следствий. В силу любой из систем уравнений (4) или (5) средняя скорость потока v в турбулентной прослойке, переменная q , а также величина $s = q/\eta$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + 2qq_x + \frac{q^2}{\eta}\eta_x + \rho^{-1}p_x &= f_1, \\ q_t + (vq)_x &= f_2, \quad s_t + vs_x = f_3. \end{aligned} \quad (6)$$

В области двухслойного течения (система (4)) правые части уравнений (6) имеют вид

$$f_1 = \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), \quad f_2 = \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \varkappa \operatorname{sign}(q))q^2), \quad f_3 = \frac{f_2 - \sigma q}{\eta}. \quad (7)$$

Следствием уравнений однослойного течения (5) также являются соотношения (6) с правыми частями

$$f_1 = 0, \quad f_2 = -\frac{\sigma \varkappa q^2}{2\eta} \operatorname{sign}(q), \quad f_3 = \frac{f_2}{\eta}.$$

Уравнения однослойного течения (5) являются гиперболическими. Учитывая выполняющееся при $h = 0$ равенство $\rho^{-1}p_x = \varphi' K \eta_x + \varphi K'$ и условие $\varphi' > 0$, нетрудно видеть, что имеется одна контактная $\frac{dx}{dt} = v$ и две «звуковые» характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{3q^2 + g\eta},$$

определяющие скорость распространения возмущений. Здесь и далее $g = \varphi' K$.

Уравнения (4) описывают двухслойные течения однородной жидкости со сдвигом скорости. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, которая характерна для сдвиговых течений однородной жидкости, учтена в уравнениях (4) введением величины q , определяющей процесс вовлечения жидкости в турбулентный слой. Нелинейная модель (4) в общем случае не является гиперболической, но имеет не менее трех вещественных характеристик, что позволяет использовать модификации метода Годунова для проведения численных расчетов.

С использованием дифференциальных следствий (6), (7) и замыкающего соотношения (2) представим систему уравнений (4) в виде

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{U} = (h, \eta, u, v, q)^T$ — вектор искомых величин,

$$\mathbf{F} = \left(-\sigma q, \sigma q, -\varphi K', \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \varkappa \operatorname{sign}(q))q^2) \right)^T$$

— правая часть; матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \eta & 0 \\ g & g & u & 0 & 0 \\ g & g + q^2/\eta & 0 & v & 2q \\ 0 & 0 & 0 & q & v \end{pmatrix}.$$

Определение собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ (скоростей распространения возмущений в жидкости) сводится к нахождению корней полинома

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (v - \lambda)\bar{\chi}(\lambda),$$

$$\bar{\chi}(\lambda) = ((v - \lambda)^2 - 3q^2)((u - \lambda)^2 - gh) - (u - \lambda)^2 g\eta.$$

Очевидно, что уравнение $\chi = 0$ имеет корень $\lambda = v$, соответствующий контактной характеристике $\frac{dx}{dt} = v$. При стремлении к однослойному течению все корни уравнения $\chi = 0$ вещественные. (Предполагается, что $g = \varphi'(H)K(x) > 0$.) Это легко видеть из следующих предельных соотношений:

$$\bar{\chi}|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow ((u - \lambda)^2 - gH)((v - \lambda)^2 - 3q^2),$$

$$\bar{\chi}|_{h \rightarrow 0} \rightarrow ((v - \lambda)^2 - 3q^2 - gH)(u - \lambda)^2.$$

В общем случае полином $\bar{\chi}(\lambda)$ имеет по крайней мере два вещественных корня. Это следует из неравенств: $\bar{\chi} \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$; $\bar{\chi} \leq 0$ при $\lambda \rightarrow u \pm \sqrt{gh}$. Таким образом, система уравнений (4) имеет не менее трех вещественных характеристик.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. В дальнейшем для проведения численных расчетов на основе системы уравнений (4) будем использовать следующую дивергентную форму модели:

$$\begin{aligned} H_t + Q_x &= 0, \quad \eta_t + (v\eta)_x = \sigma q, \quad u_t + (u^2/2 + \varphi(H)K(x))_x = 0, \\ Q_t + (u^2 h + (v^2 + q^2)\eta + F(H)K(x))_x &= (F(H) - H\varphi(H))K'(x), \\ q_t + (vq)_x &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \varkappa \operatorname{sign}(q))q^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь функция $F(H)$ определяется из уравнения $F'(H) = H\varphi'(H)$ с учетом нормировки $F(1) = 0$ и согласно (2) имеет вид

$$F(H) = \frac{10}{11}H^{11} - 3H^{-1/2} + 3 - \frac{10}{11}.$$

Вместо закона сохранения энергии (последнее уравнение в (4)) использовано дифференциальное следствие для переменной q . Это упрощает систему и, по крайней мере, для скачков малой амплитуды позволяет корректно моделировать распространение волн. Как было показано, уравнения (8) имеют не менее трех вещественных характеристик, что позволяет использовать стандартные численные схемы, разработанные для решения систем гиперболических уравнений.

3. Стационарные течения. Структуру бегущих волн модели (4) можно исследовать в системе координат, движущейся со скоростью волны. (Уравнения движения допускают галилеев перенос.) Поэтому для решения задачи о структуре пристенного турбулентного слоя достаточно рассмотреть стационарные течения.

В стационарном случае из уравнений (4) с использованием (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} (uh)' &= -\sigma q, \quad (v\eta)' = \sigma q, \quad uu' + \rho^{-1}p' = 0, \\ vv' + \frac{q^2}{\eta}\eta' + 2qq' + \rho^{-1}p' &= \frac{\sigma q}{\eta}(u - v), \\ (vq)' &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 - (1 + \varkappa \operatorname{sign}(q))q^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной x .

Рассмотрим начальный участок формирования турбулентного слоя. Пусть при $x = x_0$ толщина турбулентной прослойки η равна нулю, $\eta' > 0$ и скорость жидкости равна $u_0 > 0$. (Здесь и далее нижний индекс 0 соответствует значениям функций при $x = x_0$.) Предполагается, что решение является непрерывным и ограниченным. В силу второго и четвертого уравнений системы (9) при $\eta \rightarrow 0$ (или $x \rightarrow x_0$) выполняются условия $\eta' \rightarrow \sigma q_0/v_0$ и $\eta' \rightarrow \sigma(u_0 - v_0)/q_0$, следовательно, $q_0^2 = (u_0 - v_0)v_0$. Кроме того, из неравенства $\eta' > 0$ при $x = x_0$ вытекает, что $q_0 > 0$. Из последнего уравнения из (9) при $\eta \rightarrow 0$ следует, что $(u_0 - v_0)^2 - (1 + \kappa)q_0^2 = 0$. Таким образом, в точке формирования турбулентного слоя имеем следующие значения величин v_0 и q_0 :

$$v_0 = \frac{u_0}{2 + \kappa}, \quad q_0 = v_0 \sqrt{1 + \kappa}. \quad (10)$$

Уравнения (9) приводятся к разрешенному относительно производных виду. После проведения простых, но громоздких преобразований получаем систему ОДУ

$$\begin{aligned} h' &= \frac{G}{\Delta}, \quad \eta' = -\left(1 - \frac{u^2}{gh}\right)h' + \frac{\sigma qu}{gh} - \frac{K'\varphi}{g}, \\ u' &= -\frac{\sigma q}{h} - \frac{u}{h}h', \quad v' = \frac{\sigma q}{\eta} - \frac{v}{\eta}\eta', \\ q' &= -\frac{q}{v}v' + \frac{\sigma}{2\eta v}((u - v)^2 - (1 + \kappa \operatorname{sign}(q))q^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \frac{gh}{u^2} - \frac{g\eta}{v^2 - 3q^2}, \quad g = K(x)\varphi'(H) > 0, \\ G &= \frac{hK'\varphi}{u^2} - \frac{\sigma q}{u} \left(1 + \frac{gh}{v^2 - 3q^2} \left(3\left(1 - \frac{v}{u}\right) - \frac{u}{v} + (3 + \kappa \operatorname{sign}(q))\frac{q^2}{uv} - \frac{\eta}{h}\right)\right). \end{aligned}$$

Знак определителя Δ указывает на тип течения: в среднем докритический при $\Delta < 0$ и в среднем сверхкритический при $\Delta > 0$.

При обращении в нуль толщины потенциальной прослойки h для дальнейшего описания течения используются однослойные уравнения (5), принимающие в стационарном случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{\Delta_1} \left(\eta K'\varphi - \frac{\sigma \kappa |q|^3}{v} \right), \quad \Delta_1 = v^2 - 3q^2 - g\eta, \\ v' &= -\frac{v}{\eta}\eta', \quad q' = \frac{q}{\eta}\eta' - \frac{\sigma \kappa q^2}{2\eta v} \operatorname{sign}(q). \end{aligned}$$

Применение стандартных численных методов (например, метода Рунге — Кутты) к ОДУ (11) с дополнительными условиями (10) позволяет получить решение стационарной задачи о формировании пристеночных турбулентных областей в канале с заданными параметрами течения $u = u_0$, $H = h_0 + \varepsilon$, $\eta = \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \ll h_0$) во входном сечении $x = x_0$.

4. Численные результаты. На основе уравнений (8) выполним расчеты распространения волновых возмущений в канале с податливыми стенками. Вычисления проводятся в безразмерных переменных с использованием TVD-схемы второго порядка аппроксимации [15] при эмпирических параметрах модели $\sigma = 0, 15$, $\kappa = 6$ и длине канала $L = 30$. При $t = 0$ задается постоянный поток с параметрами $u = v = U_0 > 0$, $q = 0$, $h = H_0 - \varepsilon$, $\eta = \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \ll H_0$ —

начальная толщина турбулентной прослойки). Эти же данные берутся в качестве условий на левой границе расчетной области $x = 0$. На правой границе $x = L$ ставятся условия Неймана.

Упругие свойства стенок заданы уравнением состояния (2) с функцией $K(x)$ вида

$$K(x) = 1 + \frac{a}{(1 + 0,1(x - \alpha L)^8)^2}, \quad (12)$$

отвечающей за локальное изменение жесткости канала (a и $\alpha \in (0, 1)$ — постоянные). Далее будут рассмотрены характерные режимы течения, возникающие при локальном увеличении ($a > 0$) или уменьшении ($a < 0$) жесткости стенок в окрестности сечения $x = \alpha L$ при положительном ($H_0 > \bar{H} = 1$) и отрицательном ($H_0 < 1$) трансуральном невозмущенном давлении.

4.1. Монотонный псевдоскачок. Пусть свойства стенок канала задаются формулой (12) с постоянными $a = 3$ и $\alpha = 0,9$. Невозмущенная полутолщина канала $H_0 = 1,2$, $\varepsilon = 0,01$ и скорость набегающего потока $U_0 = 25$ соответствуют сверхкритическому ($\Delta > 0$) режиму течения на входе в канал. Для численного разрешения по пространству использована равномерная сетка с количеством узлов $N = 600$. При указанных параметрах потока за счет локального увеличения жесткости стенок канала в окрестности сечения $x = 27$ формируется плавный гидроэластичный скачок, распространяющийся вверх по потоку (рис. 2). В области расширения канала происходит непрерывный переход от сверхкритического течения к докритическому, т. е. реализуется псевдоскачок. Результаты нестационарного расчета по уравнениям (8) при $t = 20$ показаны сплошными линиями; пунктирные линии — решение стационарных уравнений (11) при $x_0 = 6,5$. Значения v_0 и q_0 определяются по формулам (10). Решение стационарных уравнений приведено на интервале от $x = x_0$ до $x = x_1 \approx 25,8$. Это связано с тем, что в рассматриваемом режиме течения в окрестности локального увеличения жесткости стенок имеется особая точка уравнений (11). (Величина Δ меняет знак.) На выходе из канала поток снова становится сверхкритическим. Поэтому для построения стационарного решения в указанной области требуется дополнительный анализ. Как видно из рис. 2, стационарное решение достаточно точно описывает форму канала $h + \eta$, толщину потенциальной прослойки h , скорость жидкости в слоях u , v и переменную q . В области псевдоскачка генерируется завихренность, снижается скорость течения и увеличивается толщина турбулентной прослойки.

Рис. 2. Параметры потока в монотонном псевдоскачке:

- (а) 1 — полутолщина канала $y = h + \eta$,
 2 — граница области потенциального течения $y = h$;
 (б) 3, 4 — скорость жидкости u и v в слоях; 5 — сдвиговая скорость q .
 Сплошные линии — расчет по нестационарной модели (8) при $t = 20$,
 пунктир — решение стационарных уравнений (11)

При выбранной начальной полутолщине канала $H_0 = 1,2$ и свойствах стенок при любой заданной скорости набегающего потока U_0 из интервала (u_c, u_*) (здесь $u_c \approx 7,95$ и $u_* \approx 25,2$) реализуется течение, качественный характер которого показан на рис. 2. Значение $U_0 = u_c$ соответствует критическому набегающему потоку. Уменьшение скорости набегающего потока U_0 от u_* до u_c приводит к снижению амплитуды гидроэластичного скачка и увеличению скорости его распространения вверх по потоку. Отметим, что рассматриваемое течение, характеризующееся переходом от сверхкритического режима к докритическому в области гидроэластичного скачка, имеет прямую аналогию с псевдоскачком при торможении сверхзвукового потока газа в длинных каналах [9].

Режим течения, соответствующий псевдоскачку, может реализовываться и при отрицательном трансмуральном давлении при наличии локального снижения жесткости стенок. Пусть при $t = 0$ задан сверхкритический поток со следующими параметрами: $H_0 = 0,7$, $\varepsilon = 0,01$, $U_0 = 2$. Функция $K(x)$ выбирается в виде (12) с постоянными $a = -0,2$ и $\alpha = 0,9$ (штрих-пунктирная линия на рис. 3, а). Псевдоскачок реализуется в том случае, если скорость набегающего потока $U_0 \in (u_c, u_*)$, где $u_c \approx 1,68$, $u_* \approx 2,24$. При этом распределение параметров потока качественно совпадает с приведенными на рис. 2. Если скорость набегающего потока $U_0 > u_*$, то реализуется стационарное течение, описанное в следующем подразделе.

4.2. Сверхкритические течения. Если при движении жидкости в канале с локальным изменением жесткости стенок течение всюду остается сверхкритическим ($\Delta > 0$ при $x \in (0, L)$), то возмущения вверх по потоку не распространяются и формируется стационарное течение. В случае увеличения жесткости стенок ($a > 0$) в окрестности сечения $x = \alpha L$ при положительном (отрицательном) трансмуральном давлении в этой области образуется локальное расширение (сужение) сечения канала. При локальном уменьшении жесткости стенок ($a < 0$) реализуется обратная ситуация: сужение при $H_0 > 1$ и расширение при $H_0 < 1$.

4.3. Докритические течения. Характерной особенностью течения при наличии локального изменения жесткости канала в докритическом режиме является распространение возмущений вверх по потоку и сужение или расширение канала в окрестности изменения жесткости стенок. Примеры показаны на рис. 3 для случая отрицательного трансмурального давления.

Рис. 3. Полутолщина канала и потенциальной прослойки (линии 1, 2) в докритическом потоке при отрицательном трансмуральном давлении и локальном уменьшении (а) и увеличении (б) жесткости стенок канала

Показанная на рис. 3, а конфигурация получена в момент времени $t = 30$ для следующих начальных данных: $H_0 = 0,7$, $\varepsilon = 0,01$ и $U_0 = 1,2$. В формуле (12) выбраны $a = -0,2$ и $\alpha = 0,9$. Вид функции $K(x)$ показан штрих-пунктирной линией. В области снижения жесткости наблюдается сужение ка-

нала и вверх по потоку распространяется волна расширения. При изменении скорости набегающего потока и фиксированных остальных параметров качественный вид течения не меняется, если $U_0 \in (0, u_c^*)$. В данном случае $u_c^* \approx 1,27$ и критическая скорость $u_c \approx 1,69$. При этом течение остается докритическим всюду ($\Delta < 0$). Если $U_0 \in (u_c^*, u_c)$, то в окрестности изменения жесткости стенок возникает локальная зона сверхкритического течения. Это приводит к уменьшению области сужения канала в окрестности изменения жесткости стенок и, при дальнейшем увеличении скорости набегающего потока U_0 , переходу к псевдоскачку (см. рис. 2). Отметим, что аналогичное течение реализуется в случае положительного трансмурального давления и локального увеличения жесткости стенок.

Рис. 3, б получен при $H_0 = 0,7$, $\varepsilon = 0,01$ и $U_0 = 1,45$ в момент времени $t = 30$ при наличии локального увеличения жесткости стенок ($a = 3$ и $\alpha = 0,9$). В этом случае наблюдается расширение канала в окрестности сечения $x = 27$ и его сужение перед областью увеличения жесткости. Вверх по потоку распространяется волна расширения канала. Качественный вид течения сохраняется для всех $U_0 \in (0, u_c^*)$, $u_c^* \approx 1,55$ и $u_c \approx 1,69$. При этом поток остается докритическим всюду ($\Delta < 0$). Если $U_0 \in (u_c^*, u_c)$, то формируется локальная сверхкритическая зона. При этом нет сужения канала перед участком повышения жесткости. В случае положительного трансмурального давления и локального уменьшения жесткости стенок формируется аналогичное течение, но вверх по потоку распространяется волна сужения канала.

4.4. Автоколебательный режим течения. Как отмечалось выше, в эластичных трубках при отрицательном трансмуральном давлении возможно несимметричное сжатие трубки и возникновение автоколебаний. Предложенная одномерная модель (8) не может описать эффект потери круговой симметрии при схлопывании трубки, но позволяет моделировать режим автоколебаний. Пусть, как и в предыдущем примере, $H_0 = 0,7$, $\varepsilon = 0,01$ и задано локальное увеличение жесткости стенок в окрестности сечения $x = 6$ по формуле (12) с параметрами $a = 3$, $\alpha = 0,2$. В этом случае критическая скорость набегающего потока $u_c = 1,69$. При $U_0 > u_* \approx 4,91$ реализуется описанное выше полностью сверхкритическое течение. В случае $U_0 \in (u_c, u_*)$ возмущения вверх по потоку не распространяются, а за областью локального увеличения жесткости стенок формируется нестационарный автоколебательный режим течения. Характерный пример показан на рис. 4 для скорости набегающего потока $U_0 = 3,2$ при $t = 15$.

Рис. 4. Параметры потока в автоколебательном режиме (расчет по модели (8)):

- (а) 1 — полутолщина канала $y = h + \eta$,
 2 — граница области потенциального течения $y = h$;
 (б) 3, 4 — скорость жидкости u и v в слоях; 5 — сдвиговая скорость q

Для более качественного разрешения по пространству использовано $N = 1800$ узлов. Таким образом, даже при отсутствии возмущений потока и для стационарных граничных условий течение становится существенно нестационарным и содержит квазипериодические волны большой амплитуды. Это означает, что предложенная модель может быть использована для описания течений в резисторе Старлинга.

В случае положительного трансмурального давления $H > 1$ и локального уменьшения жесткости стенок ($a < 0$) при скорости набегающего потока U_0 из интервала (u_c, u_*) автоколебания не возникают. В частности, для $H_0 = 1, 2$ и $a = -0, 2$ имеем $u_c \approx 7,95$ и $u_* \approx 8,9$. В этом случае возмущения вверх по потоку также не распространяются и в окрестности сечения $x = \alpha L$ происходит интенсивная генерация завихренности. Однако в отличие от предыдущего случая квазипериодические волны большой амплитуды не формируются.

Закключение. Предложена математическая модель (4) движения жидкости в канале с эластичными стенками (2), учитывающая формирование пристеночного слоя турбулентного течения. Модель получена в рамках теории мелкой воды для двухслойных сдвиговых течений с массообменом [8, 9]. Проведен анализ характеристических свойств уравнений движения и исследован класс стационарных течений. На основе законов сохранения (8) с невыпуклым уравнением состояния (2) дано качественное описание возможных режимов течения при наличии локального изменения жесткости стенок канала (12). Приведены примеры течений, соответствующих монотонному псевдоскачку (рис. 2), в которых реализуется непрерывный переход от сверхкритического течения к докритическому. Рассмотрены и описаны основные закономерности полностью сверхкритических и докритических (рис. 3) течений в эластичном канале с локальным изменением жесткости стенок. Установлено, что в случае отрицательного трансмурального давления даже при отсутствии возмущений потока и для стационарных граничных условий может реализоваться существенно нестационарный режим течения, характеризующийся формированием квазипериодических волн большой амплитуды (рис. 4). Это означает, что предложенная одномерная модель может быть использована для описания автоколебательных течений в резисторе Старлинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983.
2. Heil M., Jensen O. E. Flows in Deformable Tubes and Channels: Theoretical Models and Biological Applications // Flow Past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes. Springer-Verl., 2003. P. 15–49. (Fluid Mechanics and Its Applications; V. 72).
3. Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // J. Engrg. Math. 2003. N 47. P. 251–276.
4. Shapiro A. H. Steady flow in collapsible tubes // J. Biomech. Engrg. 1977. V. 99, N 3. P. 126–147.
5. Cancelli C., Pedley T. J. A separated-flow model for collapsible tube oscillations // J. Fluid Mech. 1985. N 157. P. 375–404.
6. Brook B. S., Falle S. A. E. G., Pedley T. J. Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes: evolution and roll-wave instability of a steady state // J. Fluid Mech. 1999. N 396. P. 223–256.
7. Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю. Структура катящихся волн в длинных трубках с податливыми стенками // Труды МИАН. 2018. Т. 300. С. 205–215.
8. Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. Слой смещения под свободной поверхностью // Прикл. механика и техн. физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 127–140.
9. Липатов И. И., Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А. Модель нестационарного псевдоскачка в баротропном течении газа // Докл. АН. 2016. Т. 466, № 5. С. 545–549.

10. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. Чесноков А. А. Осесимметричные вихревые движения жидкости в длинной эластичной трубе // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, № 4. С. 76–87.
12. Тешуков В. М. Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, № 3. С. 8–15.
13. Townsend A. A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge: Univ. Press, 1956.
14. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P. Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech. 1967. N 28. P. 593–616.
15. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1990. N 87. P. 408–463.

Поступила в редакцию 21 января 2019 г.

После доработки 21 января 2019 г.

Принята к публикации 14 марта 2019 г.

Ляпидевский Валерий Юрьевич

Хе Александр Канчерович

Чесноков Александр Александрович

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 15

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

630090 г. Новосибирск

E-mail: liapid@hydro.nsc.ru, alekhe@hydro.nsc.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru