Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Neshchadim, A. A. Simonov, Functional invariant solutions to Maxwell's system: dependence on time, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 2, 49–61

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.205>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.73.141

April 26, 2023, 13:41:38

ФУНКЦИОНАЛЬНО–ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ^{*)}

М. В. Нецадим, А. А. Симонов

Рассмотрена задача нахождения обобщенных функционально-инвариантных решений системы Максвелла. Найденные решения содержат функциональный произвол, что может быть использовано для определения параметров системы Максвелла (диэлектрической, магнитной проницаемостей).

Ключевые слова: система Максвелла, обобщенные функционально-инвариантные решения.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.205

В работе [1] построены решения системы Максвелла, которые можно представить в виде конечного функционального ряда от производных произвольной функции с функциональным аргументом (фазой) и функциональными коэффициентами (амплитудами). При этом коэффициенты функционального ряда зависят только от пространственных переменных, а амплитуда — линейно от времени. В настоящей работе продолжаются эти исследования и предполагается, что коэффициенты функциональных рядов зависят также от времени, а зависимость амплитуды от времени имеет общий вид. В таком виде развиваемый здесь подход можно рассматривать как поиск обобщенных функционально-инвариантных решений [2] системы Максвелла. С другой стороны, это аналог лучевого метода применительно к системе уравнений Максвелла. Классическое применение лучевого метода [3, 4] заключается в том, что лучевой ряд является решением системы Максвелла асимптотически. Предполагается, что лучевой ряд конечный и является точным решением.

Наиболее полно обобщенные функционально-инвариантные решения (ОФИР) исследованы для волнового уравнения (см. литературу в [5]). (В литературе для ОФИР используется также термин «относительно неискажающиеся волны» [6].) Так, в работах [7–9] были детально изучены комплексные функционально-инвариантные решения (ФИР), и, как оказалось, эти решения имеют обширные применения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также и в более сложных задачах распространения упругих колебаний. Отметим, что ФИР волнового уравнения использовались для построения точных решений системы Максвелла в работах [10–12].

Построенные в данной работе решения системы Максвелла содержат функциональный произвол, что позволяет определять параметры системы Максвелла (диэлектрическую и магнитную проницаемости). Это направление продолжает исследования [13, 14], связанные с конструктивным подходом к решению обратных задач. Кроме того, использование средств группового анализа

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований (проект 81), Проекта ОМН РАН 1.3.8, Проекта фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями (проект 93), Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.1.5 (проект 0314-2016-0011).

дифференциальных уравнений [15, 16] позволяет из уже найденных решений строить новые решения системы Максвелла, вообще говоря, уже с тензорными параметрами [17].

Приведем краткое описание полученных результатов. В разд. 1 дано полное описание точных решений системы Максвелла в виде конечного (длины m) лучевого ряда (теорема 1). Также для $m \geq 1$ показано, что система соотношений теоремы 1 допускает дальнейшее упрощение (предложение 1). Итоговая система соотношений приведена в теореме 2. В разд. 2 проведен детальный анализ системы соотношений для $m = 0$ и найдены полиномиальные по времени t решения системы Максвелла.

Все функции в работе предполагаются достаточно гладкими.

Мы будем использовать обозначения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $[\cdot, \cdot]$ для стандартных скалярного и векторного произведений в евклидовом пространстве. Обозначения div , rot , Δ , ∇ используются для классических дифференциальных операторов в евклидовом пространстве. Кроме того, в вычислениях используются классические соотношения и формулы векторного анализа.

1. Представление решений системы Максвелла с учетом зависимости от времени. Система уравнений Максвелла имеет вид [18]

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad (4)$$

где $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ — плотность зарядов, $j = j(\bar{x}, t)$ — плотность тока проводимости, $\varepsilon = \varepsilon(\bar{x}, t)$, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ — диэлектрические функции, зависящие от $\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, D — область вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, $E(\bar{x}, t) = (E_1, E_2, E_3)$, $B(\bar{x}, t) = (B_1, B_2, B_3)$ — векторы электрической и магнитной напряженностей.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $f(y)$ — произвольная функция одной переменной, $f^{(k)}(y)$ — ее производная порядка k , $k = 0, \dots, m$. Если функции $\tau(\bar{x}, t)$, $\rho_k(\bar{x}, t)$, $k = 0, \dots, m$, и вектор-функции $A_k(\bar{x}, t)$, $B_k(\bar{x}, t)$, $C_k(\bar{x}, t)$, $k = 0, \dots, m$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon A_0) &= \rho_0, \quad \operatorname{div}(\mu B_0) = 0, \\ \operatorname{rot}(A_0) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu B_0)}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon A_0)}{\partial t} + C_0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon A_k) + \langle \varepsilon A_{k-1}, \nabla \tau \rangle &= \rho_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ \operatorname{div}(\mu B_k) + \langle \mu B_{k-1}, \nabla \tau \rangle &= 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ \operatorname{rot} A_k - [A_{k-1}, \nabla \tau] &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial(\mu B_k)}{\partial t} + \mu B_{k-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right), \quad k = 1, \dots, m, \\ \operatorname{rot} B_k - [B_{k-1}, \nabla \tau] &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial(\varepsilon A_k)}{\partial t} + \varepsilon A_{k-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + C_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ \langle \varepsilon A_m, \nabla \tau \rangle &= 0, \quad \langle \mu B_m, \nabla \tau \rangle = 0, \\ [A_m, \nabla \tau] &= \frac{\mu}{c} B_m \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad [B_m, \nabla \tau] = -\frac{\varepsilon}{c} A_m \frac{\partial \tau}{\partial t}, \end{aligned}$$

то функция ρ и вектор-функции E , H , j , имеющие представления

$$4\pi\rho = \sum_{k=0}^m \rho_k(\bar{x}, t) f^{(k)}(\tau(\bar{x}, t)), \quad (5)$$

$$E = \sum_{k=0}^m A_k(\bar{x}, t) f^{(k)}(\tau(\bar{x}, t)), \quad (6)$$

$$H = \sum_{k=0}^m B_k(\bar{x}, t) f^{(k)}(\tau(\bar{x}, t)), \quad (7)$$

$$\frac{4\pi}{c}j = \sum_{k=0}^m C_k(\bar{x}, t) f^{(k)}(\tau(\bar{x}, t)), \quad (8)$$

являются решением системы Максвелла (1)–(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство получается непосредственной подстановкой представлений (5)–(8) в систему (1)–(4) и расщеплением по производным функции f . Так, например, подставим (5), (6) в (1). Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon A_k f^{(k)} \right) &= \sum_{k=0}^m \rho_k f^{(k)}, \\ \sum_{k=0}^m \operatorname{div}(\varepsilon A_k) f^{(k)} + \sum_{k=0}^m \langle \varepsilon A_k, \nabla \tau \rangle f^{(k+1)} &= \sum_{k=0}^m \rho_k f^{(k)}, \\ \sum_{k=0}^m \operatorname{div}(\varepsilon A_k) f^{(k)} + \sum_{k=1}^m \langle \varepsilon A_{k-1}, \nabla \tau \rangle f^{(k)} + \langle \varepsilon A_m, \nabla \tau \rangle f^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^m \rho_k f^{(k)}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при производных $f^{(k)}(y)$, получаем систему соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon A_0) &= \rho_0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon A_k) + \langle \varepsilon A_{k-1}, \nabla \tau \rangle = \rho_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ \langle \varepsilon A_m, \nabla \tau \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются уравнения (2)–(4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из соотношений

$$[A_m, \nabla \tau] = \frac{\mu}{c} B_m \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad [B_m, \nabla \tau] = -\frac{\varepsilon}{c} A_m \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

следуют соотношения

$$\langle \varepsilon A_m, \nabla \tau \rangle = 0, \quad \langle \mu B_m, \nabla \tau \rangle = 0, \quad \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = |\nabla \tau|^2.$$

Действительно, ортогональность векторов A_m , B_m , $\nabla \tau$ очевидна, а тогда для длин этих векторов получаем

$$|A_m| |\nabla \tau| = \frac{\mu}{c} |B_m| \left| \frac{\partial \tau}{\partial t} \right|, \quad |B_m| |\nabla \tau| = \frac{\varepsilon}{c} |A_m| \left| \frac{\partial \tau}{\partial t} \right|,$$

откуда и следует третье соотношение.

Далее покажем, что система соотношений теоремы 1 допускает дальнейшее упрощение.

Рассмотрим подсистему

$$\operatorname{div}(\mu B_k) + \langle \mu B_{k-1}, \nabla \tau \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, m+1, \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} A_k - [A_{k-1}, \nabla \tau] = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial(\mu B_k)}{\partial t} + \mu B_{k-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right), \quad k = 1, \dots, m+1, \quad (10)$$

из теоремы 1 и покажем, что справедливо следующее

Предложение 1. *Соотношения (9) выполняются тождественно в силу соотношений (10).*

Доказательство. Используем индукцию по $k = m+1, m, \dots, 0$.

База индукции $k = m+1$. Из (10) выражаем

$$\mu B_m = \frac{c}{\tau_t} [A_m, \nabla \tau], \quad \mu B_{m-1} = \frac{c}{\tau_t} ([A_{m-1}, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_m) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_m)$$

и подставляем в соотношение $\operatorname{div}(\mu B_m) + \langle \mu B_{m-1}, \nabla \tau \rangle = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{c}{\tau_t} [A_m, \nabla \tau] \right) &= \frac{c}{\tau_t} \langle \operatorname{rot} A_m, \nabla \tau \rangle + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_m), \nabla \tau \right\rangle, \\ \tau_t \operatorname{div} \left(\frac{1}{\tau_t} [A_m, \nabla \tau] \right) &= \langle \operatorname{rot} A_m, \nabla \tau \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tau_t} [A_m, \nabla \tau] \right), \nabla \tau \right\rangle, \\ \tau_t \operatorname{div} \left(\frac{1}{\tau_t} [A_m, \nabla \tau] \right) &= \langle \operatorname{rot} A_m, \nabla \tau \rangle + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \right\rangle, \\ \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), [A_m, \nabla \tau] \right\rangle + \operatorname{div} [A_m, \nabla \tau] &= \langle \operatorname{rot} A_m, \nabla \tau \rangle + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \right\rangle, \\ -\tau_t \langle \nabla \tau_t, [A_m, \nabla \tau] \rangle + \langle \nabla \tau, \operatorname{rot} A_m \rangle &= \\ -\langle A_m, \operatorname{rot} \nabla \tau \rangle &= \langle \operatorname{rot} A_m, \nabla \tau \rangle + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \right\rangle, \\ -\frac{1}{\tau_t} \langle \nabla \tau_t, [A_m, \nabla \tau] \rangle &= \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \right\rangle, \\ -\langle \nabla \tau_t, [A_m, \nabla \tau] \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \right\rangle, \\ -\langle \nabla \tau_t, [A_m, \nabla \tau] \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle ([A_m, \nabla \tau]), \nabla \tau \rangle - \langle [A_m, \nabla \tau], \nabla \tau_t \rangle, \\ -\langle \nabla \tau_t, [A_m, \nabla \tau] \rangle &= -\langle [A_m, \nabla \tau], \nabla \tau_t \rangle. \end{aligned}$$

Шаг индукции. Пусть для $k+1$ доказано, что (9) следует из (10). Докажем, что для k также из (9) следует (10). Имеем соотношение

$$\operatorname{div}(\mu B_k) + \langle \mu B_{k-1}, \nabla \tau \rangle = 0. \quad (11)$$

Выразим μB_{k-1} из (10):

$$\mu B_{k-1} = \frac{c}{\tau_t} ([A_{k-1}, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_k) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_k)$$

и подставим в (11). Получим

$$\operatorname{div}(\mu B_k) = \frac{c}{\tau_t} \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_k), \nabla \tau \right\rangle$$

или, равносильно,

$$\tau_t \operatorname{div}(\mu B_k) = c \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_k), \nabla \tau \right\rangle. \quad (12)$$

Далее, выразим μB_k из (10):

$$\mu B_k = \frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1})$$

и подставим в (12). Получим

$$\begin{aligned} & \tau_t \operatorname{div} \left(\frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right) \\ &= c \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right), \nabla \tau \right\rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть этого равенства по формуле $\operatorname{div}(u\vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \langle \vec{A}, \nabla u \rangle$, справедливой для произвольных функции u вектор-функции $\vec{A}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \tau_t \left\{ \frac{c}{\tau_t} \operatorname{div}[A_k, \nabla \tau] + \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), [A_k, \nabla \tau] \right\rangle - \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), \operatorname{rot} A_{k+1} \right\rangle \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\tau_t} \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) - \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right\rangle \right\} \\ &= c \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right), \nabla \tau \right\rangle. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в левой части преобразуем по формуле $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] = \langle \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \rangle - \langle \vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \rangle$, справедливой для произвольных вектор-функций $\vec{A}, \vec{B}$. Имеем

$$\begin{aligned} & c \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), [A_k, \nabla \tau] \right\rangle - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), \operatorname{rot} A_{k+1} \right\rangle \\ & \quad - \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right\rangle \\ &= c \langle \operatorname{rot} A_k, \nabla \tau \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right), \nabla \tau \right\rangle \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), [A_k, \nabla \tau] \right\rangle - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), \operatorname{rot} A_{k+1} \right\rangle \\ & \quad - \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \operatorname{rot} A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mu B_{k+1}) \right), \nabla \tau \right\rangle. \end{aligned}$$

В правой части «перенесем» производную $\frac{\partial}{\partial t}$ на вторую компоненту скалярного произведения, используя равенство

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \vec{B} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle - \left\langle \vec{A}, \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right\rangle.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), [A_k, \nabla \tau] \right\rangle - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), \text{rot } A_{k+1} \right\rangle \\ & - \text{div} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) \right\rangle \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{c}{\tau_t} \left([A_k, \nabla \tau] - \text{rot } A_{k+1} \right) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{c}{\tau_t} ([A_k, \nabla \tau] - \text{rot } A_{k+1}) - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) \nabla \tau_t \right\rangle \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), [A_k, \nabla \tau] \right\rangle - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{c}{\tau_t} \right), \text{rot } A_{k+1} \right\rangle \\ & - \text{div} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) - \tau_t \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right), \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) \right\rangle \\ & = - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} + \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{c}{\tau_t} [A_k, \nabla \tau] - \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau_t \right\rangle. \end{aligned}$$

В левой части воспользуемся равенством $\nabla \left(\frac{1}{\tau_t} \right) = -\frac{1}{\tau_t^2} \nabla \tau_t$. Имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{c}{\tau_t} \left\langle \nabla \tau_t, [A_k, \nabla \tau] \right\rangle + \frac{c}{\tau_t} \langle \nabla \tau_t, \text{rot } A_{k+1} \rangle - \text{div} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) + \frac{1}{\tau_t} \left\langle \nabla \tau_t, \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) \right\rangle \\ & = - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} + \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle \\ & - \left\langle \frac{c}{\tau_t} [A_k, \nabla \tau] - \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} - \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau_t \right\rangle \end{aligned}$$

или

$$\text{div} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} + \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} (\mu B_{k+1}) - \frac{c}{\tau_t} \langle \text{rot } A_{k+1}, \nabla \tau \rangle - \frac{1}{\tau_t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle \right) = 0.$$

В скобках находится выражение

$$\begin{aligned} & \text{div} (\mu B_{k+1}) - \left\langle \frac{c}{\tau_t} \text{rot } A_{k+1} + \frac{1}{\tau_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mu B_{k+1}), \nabla \tau \right\rangle \\ & = \text{div} (\mu B_{k+1}) + \left\langle \mu B_k - \frac{c}{\tau_t} [A_k, \nabla \tau], \nabla \tau \right\rangle = \text{div} (\mu B_{k+1}) + \langle \mu B_k, \nabla \tau \rangle, \end{aligned}$$

которое равно нулю в силу предположения индукции. Предложение доказано.

Итак, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $f(y)$ — произвольная функция одной переменной, $f^{(k)}(y)$ — ее производная порядка k , $k = 0, \dots, m$. Если функции $\tau(\bar{x}, t)$, $\rho_k(\bar{x}, t)$, $k = 0, \dots, m$, и вектор-функции $A_k(\bar{x}, t)$, $B_k(\bar{x}, t)$, $C_k(\bar{x}, t)$, $k = 0, \dots, m$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon A_0) &= \rho_0, \quad \operatorname{div}(\mu B_0) = 0, \\ \operatorname{rot}(A_0) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu B_0)}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon A_0)}{\partial t} + C_0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon A_k) + \langle \varepsilon A_{k-1}, \nabla \tau \rangle &= \rho_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ \operatorname{rot} A_k - [A_{k-1}, \nabla \tau] &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial(\mu B_k)}{\partial t} + \mu B_{k-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right), \quad k = 1, \dots, m, \\ \operatorname{rot} B_k - [B_{k-1}, \nabla \tau] &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial(\varepsilon A_k)}{\partial t} + \varepsilon A_{k-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + C_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ [A_m, \nabla \tau] &= \frac{\mu}{c} B_m \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad [B_m, \nabla \tau] = -\frac{\varepsilon}{c} A_m \frac{\partial \tau}{\partial t}, \end{aligned}$$

то функция ρ и вектор-функции E , H , j , имеющие представление (5)–(8), являются решением системы Максвелла (1)–(4).

2. Решение в случае $m = 0$. В случае $m = 0$ для функций $\tau(\bar{x}, t)$, $\rho_0(\bar{x}, t)$ и вектор-функций $A_0(\bar{x}, t)$, $B_0(\bar{x}, t)$, $C_0(\bar{x}, t)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\operatorname{div}(\varepsilon A_0) = \rho_0, \quad (13)$$

$$\operatorname{div}(\mu B_0) = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{rot}(A_0) = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu B_0)}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} B_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon A_0)}{\partial t} + C_0, \quad (16)$$

$$\langle \varepsilon A_0, \nabla \tau \rangle = 0, \quad (17)$$

$$\langle \mu B_0, \nabla \tau \rangle = 0, \quad (18)$$

$$[A_0, \nabla \tau] = \frac{\mu}{c} B_0 \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (19)$$

$$[B_0, \nabla \tau] = -\frac{\varepsilon}{c} A_0 \frac{\partial \tau}{\partial t}. \quad (20)$$

Кроме того, как указано в замечании 1, есть соотношение

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = |\nabla \tau|^2. \quad (21)$$

Соотношение (19) перепишем в виде $B_0 = \frac{c}{\mu} \frac{1}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau]$ и подставим в (20):

$$\frac{c}{\mu} \frac{1}{\tau_t} [[A_0, \nabla \tau], \nabla \tau] = -\frac{\varepsilon}{c} A_0 \tau_t.$$

В силу (21) имеем $[[A_0, \nabla \tau], \nabla \tau] + A_0 |\nabla \tau|^2 = 0$. Воспользовавшись формулой двойного векторного произведения $[[a, b], c] = b \langle a, c \rangle - a \langle b, c \rangle$, в силу (17) получим тождество $\nabla \tau \langle A_0, \nabla \tau \rangle - A_0 |\nabla \tau|^2 + A_0 |\nabla \tau|^2 = 0$.

Соотношение (18) следует из (19). Итак, система соотношений при $m = 0$ имеет вид

$$\rho_0 = \operatorname{div}(\varepsilon A_0), \quad (22)$$

$$C_0 = \operatorname{rot} B_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon A_0)}{\partial t}, \quad (23)$$

$$B_0 = \frac{c}{\mu} \frac{1}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau], \quad (24)$$

$$\langle A_0, \nabla \tau \rangle = 0, \quad (25)$$

$$\operatorname{div}(\mu B_0) = 0, \quad (26)$$

$$\operatorname{rot}(A_0) = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu B_0)}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \tau_t^2 = |\nabla \tau|^2. \quad (28)$$

Соотношения (22)–(24) являются представлениями для функций ρ_0 , C_0 , B_0 , а соотношения (25)–(28) — система из шести уравнений на шесть функций ε , μ , τ , A_0 . Решение системы (25)–(28) и представляет интерес.

Подставим представление (24) для B_0 в (26), (27):

$$\operatorname{div} \left(\frac{c}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] \right) = 0, \quad \operatorname{rot}(A_0) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] \right).$$

Итак, на функции ε , μ , τ , A_0 есть система соотношений (25), (28) и

$$\operatorname{div} \left(\frac{c}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] \right) = 0, \quad (29)$$

$$\operatorname{rot}(A_0) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] \right). \quad (30)$$

Из (29) следует, что

$$\frac{1}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] = \operatorname{rot} P \quad (31)$$

для некоторой вектор-функции $P(\bar{x}, t)$. Тогда (30) примет вид $\operatorname{rot} \left(A_0 + \frac{\partial}{\partial t} P \right) = 0$, т. е. $\varepsilon A_0 + \frac{\partial}{\partial t} P = \nabla \varphi$ для некоторой функции $\varphi(\bar{x}, t)$. Так как $\nabla \varphi$ можно представить в виде $\nabla \varphi = \nabla \psi_t$ для некоторой функции $\psi(\bar{x}, t)$, то можно считать, что $\varphi = 0$ и

$$A_0 = -P_t. \quad (32)$$

Соотношения (25), (31) примут вид

$$\langle P_t, \nabla \tau \rangle = 0, \quad (33)$$

$$\operatorname{rot} P = \frac{1}{\tau_t} [\nabla \tau, P_t]. \quad (34)$$

Итак, система (25)–(28) равносильна системе (28), (32), (34) из пяти уравнений на шесть функций ε , μ , τ , P .

Лемма. Система уравнений (33), (34) равносильна системе

$$\langle \operatorname{rot} P, \nabla \tau \rangle = 0, \quad (35)$$

$$P_t = \frac{\tau_t}{|\nabla \tau|^2} [\operatorname{rot} P, \nabla \tau]. \quad (36)$$

Доказательство. Домножим (34) векторно на $\nabla \tau$:

$$[\nabla \tau, \operatorname{rot} P] = \frac{1}{\tau_t} [\nabla \tau, [\nabla \tau, P_t]]$$

и воспользуемся формулой двойного векторного произведения

$$[\nabla \tau, \operatorname{rot} P] = \frac{1}{\tau_t} (\langle \nabla \tau, P_t \rangle \nabla \tau - |\nabla \tau|^2 P_t).$$

В силу (33) $P_t = \frac{\tau_t}{|\nabla \tau|^2} [\operatorname{rot} P, \nabla \tau]$. Из (34) очевидно следует, что $\langle \operatorname{rot} P, \nabla \tau \rangle = 0$.

Обратно, домножив (36) векторно на $\nabla \tau$ и воспользовавшись формулой двойного векторного произведения, получим (34). Из (34) очевидно следует, что имеет место (33). Лемма доказана.

В силу (28) $\tau_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} |\nabla \tau|$, поэтому (34) и (36) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} P = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right], \quad P_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left[\operatorname{rot} P, \frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|} \right].$$

Выпишем представления для A_0 , B_0 , C_0 , ρ_0 . В силу (24), (32)

$$B_0 = \frac{c}{\mu} \frac{1}{\tau_t} [A_0, \nabla \tau] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right].$$

В силу (23)

$$C_0 = \operatorname{rot} B_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon A_0)}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right] \right) + \frac{1}{c} (\varepsilon P_t)_t.$$

В силу (22) $\rho_0 = \operatorname{div}(\varepsilon A_0) = -\operatorname{div}(\varepsilon P_t)$.

Итак, справедлива

Теорема 3. Функции $\varepsilon(\bar{x}, t)$, $\mu(\bar{x}, t)$, $\tau(\bar{x}, t)$, $\rho_0(\bar{x}, t)$ и вектор-функции $A_0(\bar{x}, t)$, $B_0(\bar{x}, t)$, $C_0(\bar{x}, t)$ удовлетворяют системе уравнений (22)–(28) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) функция $\tau(\bar{x}, t)$ удовлетворяет уравнению $\tau_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} |\nabla \tau|$;

2) существует вектор-функция $P(\bar{x}, t)$ — решение системы (35), (36), записанной в виде

$$\langle \operatorname{rot} P, \nabla \tau \rangle = 0, \quad P_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left[\operatorname{rot} P, \frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|} \right];$$

3) функция $\rho_0(\bar{x}, t)$ и вектор-функции $A_0(\bar{x}, t)$, $B_0(\bar{x}, t)$, $C_0(\bar{x}, t)$ имеют представление

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -\operatorname{div}(\varepsilon P_t), \quad A_0 = -P_t, \\ B_0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right], \quad C_0 = \operatorname{rot} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right] \right) + \frac{1}{c} (\varepsilon P_t)_t. \end{aligned}$$

В силу того, что системы (33), (34) и (35), (36) эквивалентны, теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. Функции $\varepsilon(\bar{x}, t)$, $\mu(\bar{x}, t)$, $\tau(\bar{x}, t)$, $\rho_0(\bar{x}, t)$ и вектор-функции $A_0(\bar{x}, t)$, $B_0(\bar{x}, t)$, $C_0(\bar{x}, t)$ удовлетворяют системе уравнений (22)–(28) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) функция $\tau(\bar{x}, t)$ удовлетворяет уравнению $\tau_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} |\nabla \tau|$;

2) существует вектор-функция $P(\bar{x}, t)$ — решение системы (33), (34), записанной в виде

$$\langle P_t, \nabla \tau \rangle = 0, \quad \text{rot } P = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right];$$

3) функция $\rho_0(\bar{x}, t)$ и вектор-функции $A_0(\bar{x}, t)$, $B_0(\bar{x}, t)$, $C_0(\bar{x}, t)$ имеют представление

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -\text{div}(\varepsilon P_t), \quad A_0 = -P_t, \\ B_0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right], \quad C_0 = \text{rot} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right] \right) + \frac{1}{c} (\varepsilon P_t)_t. \end{aligned}$$

Введем обозначение $V(a, b) = \frac{1}{2}(a \nabla b - b \nabla a)$, где $a = a(\bar{x})$, $b = b(\bar{x})$ — некоторые функции переменных $\bar{x}$. Отметим, что $V(1, b) = \frac{1}{2} \nabla b$.

Имеет место следующее

Предложение 2. Если

$$\tau = t - \tilde{\tau}(\bar{x}), \quad P = \sum_{k=0}^n P_k(\bar{x}) \frac{t^k}{k!},$$

то общее решение P системы

$$\langle P_t, \nabla \tilde{\tau} \rangle = 0, \quad \text{rot } P = [P_t, \nabla \tilde{\tau}] \quad (37)$$

находится по формуле

$$P_{n-k} = \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}} V \left(\varphi_{n-k+l}, \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \right), \quad (38)$$

где $k = 0, \dots, n$ и $\varphi_0(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x})$ — произвольное решение системы уравнений

$$\langle \nabla \varphi_{n-k}, \nabla \tilde{\tau} \rangle = -\frac{\varphi_{n-k+1}}{2} |\nabla \tilde{\tau}|^2, \quad (39)$$

здесь $k = 0, \dots, n-1$ и $\varphi_{n+1} = 0$.

Доказательство. Подставляя представление $P = \sum_{k=0}^n P_k(\bar{x}) \frac{t^k}{k!}$ в систему уравнений (37), получим

$$\langle P_k, \nabla \tilde{\tau} \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad \text{rot } P_{k-1} = [P_k, \nabla \tilde{\tau}], \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Так как $P_{n+1} = 0$, то $\text{rot } P_n = 0$ и

$$P_n = \nabla \varphi_n, \quad \langle \nabla \varphi_n, \nabla \tilde{\tau} \rangle = 0, \quad (40)$$

где $\varphi_n = \varphi_n(\bar{x})$.

Замечание 2. Общее решение уравнения $\text{rot } Q = [\nabla a, \nabla b]$ имеет вид $Q = V(a, b) + \nabla c$, где $c = c(\bar{x})$ — произвольная функция.

Докажем (38), (39) индукцией по k . Равенства (40) — база индукции.

Рассмотрим соотношение $\operatorname{rot} P_{n-k-1} = [P_{n-k}, \nabla \tilde{\tau}]$. В силу предположения индукции

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} P_{n-k-1} &= \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}} \left[V \left(\varphi_{n-k+l}, \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \right), \nabla \tilde{\tau} \right] \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l}{2^l} \left[\frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \nabla \varphi_{n-k+l}, \nabla \tilde{\tau} \right] = \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l}{2^l} \left[\nabla \varphi_{n-k+l}, \nabla \frac{\tilde{\tau}^{l+1}}{(l+1)!} \right]. \end{aligned}$$

В силу замечания 2

$$P_{n-k-1} = \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}} V \left(\varphi_{n-k-1+l}, \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \right).$$

Итак, формула (38) доказана.

Докажем (39). Рассмотрим соотношение $\langle P_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle = 0$, $n - k - 1 \geq 1$.

В силу (38)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle = \left\langle \nabla \varphi_{n-k-1} + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}} V \left(\varphi_{n-k-1+l}, \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \right), \nabla \tilde{\tau} \right\rangle \\ &= \langle \nabla \varphi_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^l} \left\langle \varphi_{n-k-1+l} \nabla \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} - \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \nabla \varphi_{n-k-1+l}, \nabla \tilde{\tau} \right\rangle \\ &= \langle \nabla \varphi_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^l} \varphi_{n-k-1+l} \frac{\tilde{\tau}^{l-1}}{(l-1)!} |\nabla \tilde{\tau}|^2 \\ &\quad - \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^l} \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \langle \nabla \varphi_{n-k-1+l}, \nabla \tilde{\tau} \rangle. \end{aligned}$$

В силу предположения индукции

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle &+ \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^l} \varphi_{n-k-1+l} \frac{\tilde{\tau}^{l-1}}{(l-1)!} |\nabla \tilde{\tau}|^2 \\ &+ \sum_{l=1}^{k+1} \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l+1}} \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \varphi_{n-k+l} |\nabla \tilde{\tau}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\langle \nabla \varphi_{n-k-1}, \nabla \tilde{\tau} \rangle = -\frac{\varphi_{n-k}}{2} |\nabla \tilde{\tau}|^2$. Предложение доказано.

Теорема 5. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\bar{x})$, $\mu = \mu(\bar{x})$, $\tau = t - \tilde{\tau}(\bar{x})$. Тогда в условиях предложения 2 $|\nabla \tilde{\tau}| = \sqrt{\varepsilon \mu}/c$ и ρ_0 , A_0 , B_0 , C_0 находятся по формулам

$$\begin{aligned} \rho_0 &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \operatorname{div}(\varepsilon P_{n-k}), \quad A_0 = - \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-k} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, \\ B_0 &= \frac{c}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1} \tilde{\tau}^l}{2^l \cdot l!} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}] \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, \end{aligned}$$

$$C_0 = c \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1}}{2^l \cdot l!} \operatorname{rot} \left(\frac{\tilde{\tau}^l}{\mu} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}] \right) \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} + \frac{\varepsilon}{c} \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-k} \frac{t^{n-k-2}}{(n-k-2)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$P = \sum_{k=0}^n P_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^n P_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!},$$

то

$$P_t = \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-k} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}.$$

Следовательно,

$$A_0 = -P_t = - \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-k} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!},$$

$$\rho_0 = -\operatorname{div}(\varepsilon P_t) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \operatorname{div}(\varepsilon P_{n-k}).$$

Далее, из соотношения $\tau_t = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} |\nabla \tau|$ и представления $\tau = t - \tilde{\tau}(\bar{x})$ получаем $|\nabla \tilde{\tau}| = \sqrt{\varepsilon\mu}/c$. Поэтому

$$B_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\frac{\nabla \tau}{|\nabla \tau|}, P_t \right] = \frac{c}{\mu} [P_t, \nabla \tilde{\tau}] = \frac{c}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} [P_{n-k}, \nabla \tilde{\tau}] \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}.$$

Так как

$$\left[V \left(\varphi_{n-k+l}, \frac{\tilde{\tau}^l}{l!} \right), \nabla \tilde{\tau} \right] = \frac{\tilde{\tau}^l}{2 \cdot l!} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}],$$

то

$$[P_{n-k}, \nabla \tilde{\tau}] = \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1} \tilde{\tau}^l}{2^l \cdot l!} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}],$$

$$B_0 = \frac{c}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1} \tilde{\tau}^l}{2^l \cdot l!} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}] \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}.$$

Далее,

$$C_0 = \operatorname{rot} B_0 + \frac{1}{c} (\varepsilon P_t)_t = \operatorname{rot} B_0 + \frac{\varepsilon}{c} P_{tt} = \operatorname{rot} B_0 + \frac{\varepsilon}{c} \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-k} \frac{t^{n-k-2}}{(n-k-2)!}$$

$$= c \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l-1}}{2^l \cdot l!} \operatorname{rot} \left(\frac{\tilde{\tau}^l}{\mu} [\nabla \tilde{\tau}, \nabla \varphi_{n-k+l}] \right) \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} + \frac{\varepsilon}{c} \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-k} \frac{t^{n-k-2}}{(n-k-2)!}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нецадим М. В. Функционально-инвариантные решения системы Максвелла // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 66–74.
2. Еругин Н. П., Смирнов М. М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 853–865.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
4. Бабич В. М. Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения. Дифференциальные уравнения с частными производными-5. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 34. С. 93–134. (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
5. Нецадим М. В. Классы обобщенных функционально-инвариантных решений волнового уравнения. I // Сиб. электрон. мат. известия. 2013. Т. 10. С. 418–435; <http://semr.math.nsc.ru>
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
7. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР. 1932. Т. 20.
8. Смирнов В. И., Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР. 1933. Т. 29. С. 43–51.
9. Соболев С. Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. Физ.-мат. ин-та им. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.
10. Шнеерсон М. С. Уравнения Максвелла и функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 743–758.
11. Стельмашук Н. Т. Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки. 1974. № 4. С. 35–39.
12. Нецадим М. В. Решения системы Максвелла с нулевыми инвариантами // Вестн. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 3. С. 59–61.
13. Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 27–39.
14. Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 28–33.
15. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
17. Neshchadim M. V. Equivalent transformations and some exact solutions to the system of Maxwell's equations // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, N 2. P. 99–108.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 11 сентября 2018 г.

После доработки 30 октября 2018 г.

Принята к публикации 27 декабря 2018 г.

Нецадим Михаил Владимирович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

Симонов Андрей Артемович

Новосибирский государственный университет

630090 г. Новосибирск

E-mail: neshch@math.nsc.ru; andrey.simonoff@gmail.com