Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. T. Siraeva, The canonical form of the rank 2 invariant submodels of evolutionary type in ideal hydrodynamics, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 2, 70–80

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.207>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 17:21:19

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ РАНГА 2 ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА ИДЕАЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ*)

Д. Т. Сираева

Рассматриваются уравнения идеальной гидродинамики с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии. Допускаемой группе преобразований соответствует 12-мерная алгебра Ли. По двумерным подалгебрам рассматриваемой алгебры Ли построены инвариантные подмодели ранга 2 канонического вида эволюционного типа. Уточнен вид инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа для 11-мерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями газовой динамики с уравнением состояния общего вида.

Ключевые слова: уравнения идеальной гидродинамики, уравнение состояния, допускаемая подалгебра, представление инвариантного решения, инвариантная подмодель, эволюционный тип подмодели, канонический вид подмодели.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.207

Введение. В рамках программы подмодели, представленной в [1], рассматривается система уравнений идеальной гидродинамики:

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1)$$

где

$$D = \partial_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \quad (2)$$

— оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Далее использованы декартовы и цилиндрические координаты. В декартовой системе координат

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z, \quad \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис.

В цилиндрической системе координат

$$\vec{x} = x\vec{i} + r(\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}) = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r,$$

$$\vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k},$$

$$\nabla = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta, \quad \partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \quad \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r, \quad \vec{u} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta,$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10071) и частичной поддержке государственного бюджета по государственному заданию (проект 0246-2019-0052).

где $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ — ортонормированный базис.

В ходе реализации программы установлено, что система (1) с уравнением состояния общего вида $p = f(\rho, S)$ допускает 11-мерную алгебру Ли L_{11} ; найдены всевозможные виды уравнений состояний, расширяющих 11-мерную алгебру Ли [1]; в работе [2] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации по уравнению состояния, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [3]; для 11-мерной алгебры Ли построены инвариантные подмодели рангов 3 и 1 [4] и ранга 2 [5].

В настоящей работе рассматриваются уравнения (1) с уравнением состояния специального вида [1]:

$$p = f(\rho) + h(S), \quad f = \rho^2 F'(\rho). \quad (3)$$

При этом термодинамические параметры идеальной среды удельной внутренней энергии и температура имеют вид

$$T = g'(S) - \rho^{-1} h'(S), \quad \varepsilon = F(\rho) - \rho^{-1} h(S) + g(S). \quad (4)$$

Для измеряемых параметров T, ε, ρ получаются уравнения состояния вида $p = G(T, \rho)$, $\varepsilon = E(T, \rho)$, заданные в параметрическом виде формулами (3), (4).

Из равенства (3) определяется энтропия S . Последнее уравнение системы (1) может быть заменено уравнением для энтропии: $DS = 0$.

Уравнения (1) с учетом уравнения состояния (3) допускают максимальную алгебру Ли L_{12} , базис которой рассматривается в декартовой системе координат [1]:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, & X_4 &= t\partial_x + \partial_u, & X_5 &= t\partial_y + \partial_v, \\ X_6 &= t\partial_z + \partial_w, & X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \\ X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, & X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, & X_{10} &= \partial_t, \\ X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, & Y_1 &= \partial_p \end{aligned}$$

или в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W), \\ X_3 &= \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W), & X_4 &= t \partial_x + \partial_U, \\ X_5 &= \cos \theta (t \partial_r + \partial_V) - \frac{\sin \theta}{r} t \left(\partial_\theta + W \partial_V - \left(V - \frac{r}{t} \right) \partial_W \right), \\ X_6 &= \sin \theta (t \partial_r + \partial_V) + \frac{\cos \theta}{r} t \left(\partial_\theta + W \partial_V - \left(V - \frac{r}{t} \right) \partial_W \right), & X_7 &= \partial_\theta, \\ X_8 &= \sin \theta (r \partial_x - x \partial_r + V \partial_U - U \partial_V) \\ &\quad + \cos \theta \left(W \partial_U - U \partial_W - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W) \right), \\ X_9 &= -\cos \theta (r \partial_x - x \partial_r + V \partial_U - U \partial_V) \\ &\quad + \sin \theta \left(W \partial_U - U \partial_W - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W) \right), \\ X_{10} &= \partial_t, & X_{11} &= t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r, & Y_1 &= \partial_p. \end{aligned}$$

Все подалгебры алгебры Ли L_{12} с точностью до внутренних автоморфизмов перечислены в оптимальной системе неподобных подалгебр в работе [6]. Подалгебры рассматриваются либо в декартовой системе координат (D): t, x, y, z, u, v, w , либо, если подалгебра содержит оператор X_7 , в цилиндрической системе координат (C): t, x, r, θ, U, V, W .

1. Канонический вид инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} [6] содержит 40 представителей двумерных подалгебр. Две двумерные подалгебры 2.38 и 2.39 задают частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1, редукция которых к инвариантным подмоделям доказана в работе [7]. Остальные двумерные подалгебры задают инвариантные подмодели ранга 2 [8]. Каждая подмодель может быть изучена методами группового анализа и является основой для получения точных решений исходных уравнений (1) с учетом (3), поэтому исследуемые системы уравнений необходимо записывать в виде, максимально упрощающем их интегрирование и групповой анализ. Таким может быть вид, называемый каноническим, определение которого будет дано ниже.

Для построения подмодели необходимо вычислить инварианты двумерной подалгебры — функции от всех переменных системы (1) (зависимых u, v, w, ρ, p и независимых t, x, y, z), зануляющиеся при действии оператора подалгебры. Любая функция от инвариантов снова является инвариантом. Базис инвариантов выбирается следующим образом: вычисляются инварианты, содержащие только независимые переменные, и инварианты, содержащие одну зависимую переменную. Тогда представление инвариантного решения задается зависимостью инвариантов второго типа от инвариантов первого типа. Подстановка выбранного представления решения в (1) с учетом (3) определяет инвариантные подмодели — системы уравнений, связывающие только инварианты [1].

С помощью 15 двумерных подалгебр оптимальной системы подалгебр [6] можно построить инвариантные подмодели ранга 2 эволюционного типа (t — инвариант). Каждая из рассматриваемых двумерных подалгебр имеет семь инвариантов [9], из которых инварианты первого типа обозначаются как t, x_1 , инварианты второго типа — как u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 (через S_1 обозначается выражение $p_1 - f(\rho)$).

Теорема. Инварианты можно выбрать так, что инвариантная подмодель ранга 2 алгебры Ли L_{12} будет иметь канонический вид эволюционного типа:

$$\begin{aligned} D_1 u_1 + a_1 \rho^{-1} p_{1x_1} &= b_1, & D_1 v_1 &= b_2, & D_1 w_1 &= b_3, \\ D_1 \rho + \rho u_{1x_1} &= \rho b_4, \\ D_1 S_1 &= b_5 \quad \text{или} \quad D_1 p_1 + \rho f_\rho u_{1x_1} = \rho f_\rho b_4 + b_5, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$D_1 = \partial_t + u_1 \partial_{x_1}; \quad (6)$$

a_1 — коэффициенты подмоделей (5) зависят от переменной t или $a_1 = \text{const}$; $b_j, j = 1, \dots, 5$, — коэффициенты подмоделей (5) зависят от квадратичных функций инвариантных скоростей, обратной степени плотности, переменных t, x_1 или $b_j = \text{const}$.

Доказательство. Теорема доказывается непосредственным вычислением инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа. Представления решений полученных подмоделей записаны в табл. 1, разбитой на две части, а коэффициенты — в табл. 2 и 3. Для компактной записи табл. 1–3 представление решения и коэффициенты подмодели 2.29 приводятся в разд. 3. Описание построения подмоделей приводится в разд. 2.

2. Построение инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа. Инварианты подалгебр алгебр Ли L_{11} и L_{12} можно выбрать так, что они будут отличаться только инвариантом, содержащим функцию давления p . Для подалгебр алгебры Ли L_{11} этот инвариант имеет вид p , а для подалгебр алгебры Ли L_{12} — вид $p + q$, где q — слагаемое из независимых переменных. Очевидно, что, построив инвариантные подмодели ранга 2 для алгебры Ли L_{12} , можно получить инвариантные подмодели ранга 2 для алгебры Ли L_{11} . Для этого в представлениях решений

Т а б л и ц а 1

Представления инвариантных решений для подмоделей эволюционного типа

$\mathbb{N} (C \setminus D)$	x_1	$u \setminus U$	$v \setminus V$
2.14 (C)	r	$v_1 + \frac{x - \varepsilon \theta}{t}$	u_1
2.15 (C)	r	$v_1 + \frac{x - \varepsilon \theta}{t}$	u_1
2.16 (C)	r	v_1	u_1
2.17 (C)	r	$v_1 + a\theta$	u_1
2.19 (C) $\varepsilon = 0$	r	$v_1 + a\theta$	u_1
2.30 (D)	x	u_1	$\frac{v_1 + tw_1}{t^2 + 1} + \frac{z + ty}{t^2 + 1}$
2.31 (D)	x	u_1	$v_1 + y/t$
2.32 (D)	$x - tz$	$\frac{u_1 + tw_1}{1 + t^2} + z$	v_1
2.33 (D)	$x - ay - tz$	$\frac{u_1}{t^2 + a^2 + 1} + av_1 + tw_1 + z$	$-\frac{a}{t^2 + a^2 + 1}u_1 + v_1$
2.34 (D)	z	$v_1 + \frac{x - ay}{t - ab}$	w_1
2.35 (D)	z	$v_1 + \frac{x}{t} - a\frac{y}{t}$	w_1
2.36 (D)	y	$v_1 + z$	u_1
2.37 (D)	y	$v_1 + z$	u_1
2.40 (D)	x	u_1	v_1

алгебры Ли L_{12} при q добавляется коэффициент γ для наглядного отличия подмоделей 11-мерной и 12-мерной алгебр Ли ($\gamma = 0$ в случае алгебры Ли L_{11} ; $\gamma = 1$ в случае алгебры Ли L_{12}).

Представления решений для энтропии S можно получить из представлений решений для давления p , подставив вместо p переменную S , вместо p_1 переменную S_1 в последней колонке табл. 1.

Для подалгебр 2.14–2.17, 2.19, 2.30–2.32, 2.34–2.37, 2.40 алгебры Ли L_{12} представления решений выбираются с помощью представлений решений из работы [5] с добавленным слагаемым к функции давления p . Построение подмодели 2.33 описано в разд. 3.

Полученные представления решений подмоделей для подалгебр алгебры Ли L_{12} , за исключением подалгебры 2.29, записаны в табл. 1, при этом сами подалгебры восстанавливаются по инвариантам. Инвариантная подмодель 2.29 рассматривается в качестве примера в разд. 3. Следует отметить, что после подстановки представлений решений в уравнения (1) с учетом (3) для получения канонического вида подмодели для подалгебр 2.29, 2.33 нужно выразить производные функций u_{1t} , v_{1t} , w_{1t} из первых трех уравнений подмодели;

Продолжение таблицы 1

$\mathbb{N}^\circ (C \setminus D)$	$w \setminus W$	p
2.14 (C)	w_1	$p_1 + \gamma \frac{x - \varepsilon \theta}{t}$
2.15 (C)	w_1	$p_1 + \gamma \theta$
2.16 (C)	w_1	$p_1 + \gamma(x - \varepsilon \theta)$
2.17 (C)	w_1	$p_1 + \gamma(x - at\theta)$
2.19 (C) $\varepsilon = 0$	w_1	$p_1 + \gamma \theta$
2.30 (D)	$\frac{tv_1 - w_1}{t^2 + 1} + \frac{tz - y}{t^2 + 1}$	$p_1 - \gamma \frac{tz - y}{t^2 + 1}$
2.31 (D)	$w_1 + \frac{z}{t}$	$p_1 + \gamma \frac{z}{t}$
2.32 (D)	$\frac{w_1 - tu_1}{1 + t^2}$	$p_1 + \gamma y$
2.33 (D)	$-\frac{t}{t^2 + a^2 + 1}u_1 + w_1$	$p_1 + \gamma z$
2.34 (D)	u_1	$p_1 + \gamma \frac{yt - bx}{t - ab}$
2.35 (D)	u_1	$p_1 + \gamma \frac{x - ay}{t}$
2.36 (D)	w_1	$p_1 + \gamma(x - tz)$
2.37 (D)	w_1	$p_1 + \gamma z$
2.40 (D)	w_1	$p_1 + \gamma(y - az)$

для подалгебры 2.30 следует взять линейные комбинации второго и третьего уравнений; для подалгебры 2.32 следует взять линейные комбинации первого и третьего уравнений. Подалгебра 2.19 рассматривается при $\varepsilon = 0$ (при $\varepsilon = 1$ получается подмодель стационарного типа).

Инвариантные подмодели ранга 2 канонического вида эволюционного типа (5) алгебры Ли L_{12} отличаются друг от друга только коэффициентами $a_1, b_j, j = 1, \dots, 5$, которые перечислены в табл. 2, 3 за исключением подмодели 2.29.

3. Примеры построения инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа. Рассмотрим пример построения инвариантной подмодели ранга 2 на примере подалгебры 2.29.

Базисные операторы подалгебры 2.29 в декартовой системе координат имеют вид

$$aX_1 + cX_3 + X_5 = a\partial_x + c\partial_z + t\partial_y + \partial_v,$$

$$bX_1 + dX_2 + X_6 + Y_1 = b\partial_x + d\partial_y + t\partial_z + \partial_w + \partial_p, \quad a^2 + b^2 + (c + d)^2 = 1.$$

Т а б л и ц а 2

Коэффициенты a_1, b_1, b_2 подмоделей ранга 2 эволюционного типа (5)

№	a_1	b_1	b_2
2.14	1	w_1^2/x_1	$\frac{1}{t} \left(\varepsilon \frac{w_1}{x_1} - v_1 - \gamma \rho^{-1} \right)$
2.15	1	w_1^2/x_1	$-\frac{v_1}{t} + \varepsilon \frac{w_1}{tx_1}$
2.16	1	w_1^2/x_1	$-\gamma \rho^{-1}$
2.17	1	w_1^2/x_1	$-aw_1/x_1 - \gamma \rho^{-1}$
2.19 $\varepsilon = 0$	1	w_1^2/x_1	$-aw_1/x_1$
2.30	1	0	$\gamma \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \rho^{-1}$
2.31	1	0	$-v_1/t$
2.32	$1 + t^2$	$2 \frac{tu_1 - w_1}{1 + t^2}$	$-\gamma \rho^{-1}$
2.33	$t^2 + a^2 + 1$	$\frac{2t}{t^2 + a^2 + 1} u_1 - 2w_1 + \gamma t \rho^{-1}$	$\frac{-2aw_1 + \gamma at \rho^{-1}}{t^2 + a^2 + 1}$
2.34	1	0	$\frac{aw_1 - v_1}{t - ab} + \gamma \frac{b}{t - ab} \rho^{-1}$
2.35	1	0	$\frac{1}{t} (aw_1 - v_1 - \gamma \rho^{-1})$
2.36	1	0	$-w_1 - \gamma \rho^{-1}$
2.37	1	0	$-w_1$
2.40	1	0	$-\gamma \rho^{-1}$

Вычисляются инварианты подалгебры

$$t, \quad u, \quad x + \frac{bc - at}{t^2 - cd}y + \frac{ad - bt}{t^2 - cd}z, \\ v + \frac{dz - ty}{t^2 - cd}, \quad w + \frac{cy - tz}{t^2 - cd}, \quad \rho, \quad p + \frac{cy - tz}{t^2 - cd}.$$

Изначально представление решения выбирается таким образом, чтобы оператор полного дифференцирования (2) имел канонический вид (6):

$$u = u_1 + \frac{(at - bc)v_1 + (bt - ad)w_1}{t^2 - cd}, \quad v = v_1 + \frac{ty - dz}{t^2 - cd}, \\ w = w_1 + \frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma \frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \quad S = S_1 + \gamma \frac{tz - cy}{t^2 - cd}, \quad (7)$$

где функции $u_1, v_1, w_1, \rho, p_1, S_1$ зависят от инвариантов

$$t, \quad x_1 = x + \frac{bc - at}{t^2 - cd}y + \frac{ad - bt}{t^2 - cd}z.$$

Т а б л и ц а 3

Коэффициенты b_3 , b_4 , b_5 подмоделей ранга 2 эволюционного типа (5)

№	b_3	b_4	b_5
2.14	$-\frac{u_1 w_1}{x_1} + \gamma \frac{\varepsilon \rho^{-1}}{t x_1}$	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{u_1}{x_1}\right)$	$-\gamma \left(\frac{v_1}{t} - \frac{w_1 \varepsilon}{x_1 t}\right)$
2.15	$-\frac{u_1 w_1}{x_1} - \gamma \frac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\left(\frac{1}{t} + \frac{u_1}{x_1}\right)$	$-\gamma \frac{w_1}{x_1}$
2.16	$-\frac{u_1 w_1}{x_1} + \gamma \frac{\varepsilon \rho^{-1}}{x_1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$\gamma \left(\varepsilon \frac{w_1}{x_1} - v_1\right)$
2.17	$-\frac{u_1 w_1}{x_1} + \gamma \frac{a t}{x_1} \rho^{-1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$-\gamma \left(v_1 - \frac{a t}{x_1} w_1\right)$
2.19 $\varepsilon = 0$	$-\frac{u_1 w_1}{x_1} - \gamma \frac{\rho^{-1}}{x_1}$	$-\frac{u_1}{x_1}$	$-\gamma \frac{w_1}{x_1}$
2.30	$-\gamma \frac{2t}{t^2 + 1} \rho^{-1}$	$-\frac{2t}{t^2 + 1}$	$\gamma \frac{(t^2 - 1)v_1 - 2t w_1}{(t^2 + 1)^2}$
2.31	$-\frac{w_1}{t} - \gamma \frac{\rho^{-1}}{t}$	$-\frac{2}{t}$	$-\gamma \frac{w_1}{t}$
2.32	u_1	0	$-\gamma v_1$
2.33	$\frac{u_1 - 2t w_1}{t^2 + a^2 + 1} - \frac{\gamma(a^2 + 1)\rho^{-1}}{t^2 + a^2 + 1}$	0	$-\gamma \left(-\frac{t u_1}{t^2 + a^2 + 1} + w_1\right)$
2.34	$-\gamma \frac{t}{t - a b} \rho^{-1}$	$-\frac{1}{t - a b}$	$\gamma \frac{b v_1 - t w_1}{t - a b}$
2.35	$\gamma \frac{a}{t} \rho^{-1}$	$-\frac{1}{t}$	$\gamma \frac{a w_1 - v_1}{t}$
2.36	$\gamma t \rho^{-1}$	0	$\gamma(t w_1 - v_1)$
2.37	$-\gamma \rho^{-1}$	0	$-\gamma w_1$
2.40	$\gamma a \rho^{-1}$	0	$\gamma(a w_1 - v_1)$

Подстановка представления решения (7) в уравнения (1) с учетом (3) приводит к подмодели, в которой после прибавления к первому уравнению второго, умноженного на $\frac{bc - at}{t^2 - cd}$, и третьего, умноженного на $-\frac{bt - ad}{t^2 - cd}$, получится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 D_1 u_1 + A_1 \rho^{-1} p_{1x_1} &= B_1, & D_1 v_1 + A_2 \rho^{-1} p_{1x_1} &= B_2, \\
 D_1 w_1 + A_3 \rho^{-1} p_{1x_1} &= B_3, \\
 D_1 \rho + \rho u_{1x_1} &= -\frac{2t}{t^2 - cd} \rho, & D S_1 &= \gamma \frac{c v_1 - t w_1}{t^2 - cd},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_1 = \frac{\mu}{t^2 - cd}, \quad A_2 = \frac{bc - at}{t^2 - cd}, \quad A_3 = \frac{ad - bt}{t^2 - cd},$$

$$B_1 = \frac{(2at^2 - 4bct + 2acd)v_1 + (-4adt + 2bcd + 2bt^2)w_1}{(t^2 - cd)^2} + \gamma \frac{b(c^2 + t^2) - at(c + d)}{(t^2 - cd)^2} \rho^{-1}, \quad (9)$$

$$B_2 = \frac{-tv_1 + dw_1}{t^2 - cd} + \gamma \frac{c\rho^{-1}}{t^2 - cd}, \quad B_3 = \frac{cv_1 - tw_1}{t^2 - cd} - \gamma \frac{t\rho^{-1}}{t^2 - cd},$$

$$\mu = (t^2 - cd)^2 + (bc - at)^2 + (bt - ad)^2,$$

— коэффициенты подмодели. Далее вводится замена переменных для уничтожения слагаемых во втором и третьем уравнениях системы (8), содержащих производную давления p_{1x_1} :

$$\tilde{v}_1 = v_1 - \frac{A_2}{A_1} u_1, \quad \tilde{w}_1 = w_1 - \frac{A_3}{A_1} u_1.$$

Вычисления с помощью системы компьютерной математики MAPLE и переобозначение переменных $\tilde{v}_1 \leftrightarrow v_1$, $\tilde{w}_1 \leftrightarrow w_1$ приводят к инвариантной подмодели 2.29 ранга 2 канонического вида эволюционного типа (5) с коэффициентами

$$a_1 = 1 + \frac{(bc - at)^2}{(t^2 - cd)^2} + \frac{(bt - ad)^2}{(t^2 - cd)^2};$$

$$b_1 = -2 \left(\frac{(bc - at)[t(bc - at) + c(bt - ad)]}{(t^2 - cd)\mu} + \frac{(bt - ad)[d(bc - at) + t(bt - ad)]}{(t^2 - cd)\mu} \right) u_1$$

$$- 2 \frac{t(bc - at) + c(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} v_1 + 2 \frac{d(bc - at) + t(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} w_1$$

$$+ \gamma \frac{c(bc - at) + t(bt - ad)}{(t^2 - cd)^2} \rho^{-1};$$

$$b_2 = \frac{1}{\mu} \left[(c - d)(bt - ad)u_1 \right.$$

$$- \left(\frac{t(t^2 - cd)^2 - t(bc - at)^2 + t(bt - ad)^2 - 2c(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \right) v_1$$

$$+ \left(\frac{d(t^2 - cd)^2 + d(bt - ad)^2 - d(bc - at)^2 - 2t(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \right) w_1$$

$$\left. + \gamma(c(t^2 - cd) + a(bt - ad))\rho^{-1} \right];$$

$$b_3 = \frac{1}{\mu} \left[(c - d)(bc - at)u_1 \right.$$

$$+ \left(\frac{c(t^2 - cd)^2 + c(bc - at)^2 - c(bt - ad)^2 - 2t(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \right) v_1$$

$$- \left(\frac{t(t^2 - cd)^2 + t(bc - at)^2 - t(bt - ad)^2 - 2d(bc - at)(bt - ad)}{t^2 - cd} \right) w_1$$

$$\left. + \gamma(a(bc - at) - t(t^2 - cd))\rho^{-1} \right];$$

$$b_4 = -\frac{2t}{t^2 - cd};$$

$$b_5 = \gamma \left(-\frac{c(bc - at) + t(bt - ad)}{\mu} u_1 - \frac{c}{t^2 - cd} v_1 + \frac{t}{t^2 - cd} w_1 \right).$$

Окончательный вид представления решения следующий:

$$t, \quad x_1 = x + \frac{bc - at}{t^2 - cd} y + \frac{ad - bt}{t^2 - cd} z,$$

$$u = \frac{(t^2 - cd)^2}{\mu} u_1 + \frac{at - bc}{t^2 - cd} v_1 + \frac{bt - ad}{t^2 - cd} w_1,$$

$$v = \frac{(bc - at)(t^2 - cd)}{\mu} u_1 + v_1 + \frac{ty - dz}{t^2 - cd},$$

$$w = \frac{(ad - bt)(t^2 - cd)}{\mu} u_1 + w_1 + \frac{tz - cy}{t^2 - cd},$$

$$\rho, \quad p = p_1 + \gamma \frac{tz - cy}{t^2 - cd}.$$

Покажем на примере подалгебры 2.33 [6], что канонический вид подмодели может быть неединственным. Базисные операторы подалгебры 2.33 в декартовой системе координат имеют вид

$$aX_1 + X_2 = a\partial_x + \partial_y, \quad X_3 + X_4 + Y_1 = \partial_z + t\partial_x + \partial_u + \partial_p,$$

а инварианты —

$$t, \quad x - ay - tz, \quad u - z, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad p - z.$$

Представление инвариантного решения выбирается таким образом, чтобы оператор полного дифференцирования (2) имел вид (6):

$$u = u_1 + av_1 + tw_1 + z, \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma z,$$

$$S = S_1 + \gamma z, \tag{10}$$

где функции $u_1, v_1, w_1, \rho, p_1, S_1$ зависят от инвариантов

$$t, \quad x_1 = x - ay - tz.$$

После подстановки (10) в (1) с учетом (3) получается инвариантная подмодель ранга 2 неканонического вида:

$$D_1 u_1 + aD_1 v_1 + tD_1 w_1 + \rho^{-1} p_{1x_1} = -2w_1,$$

$$D_1 v_1 - a\rho^{-1} p_{1x_1} = 0, \tag{11}$$

$$D_1 w_1 - t\rho^{-1} p_{1x_1} = -\gamma\rho^{-1}, \quad D_1 \rho + \rho u_{1x_1} = 0, \quad D_1 S_1 = -\gamma w_1.$$

Вычитание из первого уравнения системы (11) второго и третьего уравнений той же системы, умноженных на a и t соответственно, приводит к равенству

$$D_1 u_1 + (t^2 + a^2 + 1)\rho^{-1} p_{1x_1} = -2w_1 + \gamma t\rho^{-1}, \tag{12}$$

умножение которого на $\frac{a}{t^2 + a^2 + 1}$ и прибавление полученного выражения ко второму уравнению системы (11) приводит к уравнению

$$D_1 v_1 + \frac{a}{t^2 + a^2 + 1} D_1 u_1 = \frac{-2aw_1 + \gamma at\rho^{-1}}{t^2 + a^2 + 1}. \tag{13}$$

Умножение (12) на $\frac{t}{t^2 + a^2 + 1}$ и прибавление полученного выражения к третьему уравнению системы (11) приводит к уравнению

$$D_1 w_1 + \frac{t}{t^2 + a^2 + 1} D_1 u_1 = -\frac{2tw_1}{t^2 + a^2 + 1} - \gamma \frac{a^2 + 1}{t^2 + a^2 + 1} \rho^{-1}. \quad (14)$$

После введения новых функций

$$\tilde{v}_1 = v_1 + \frac{a}{t^2 + a^2 + 1} u_1, \quad \tilde{w}_1 = w_1 + \frac{t}{t^2 + a^2 + 1} u_1$$

в уравнениях (12)–(14), четвертом и пятом уравнениях системы (11) получится инвариантная подмодель ранга 2 канонического вида эволюционного типа, коэффициенты которой записаны в табл. 2, 3 в переобозначенных переменных $\tilde{v}_1 \leftrightarrow v_1$, $\tilde{w}_1 \leftrightarrow w_1$.

Выбор представления решения, как в работе [5] (подалгебра 2.23 из L_{11}), но с добавленным слагаемым к давлению

$$u = \frac{u_1 + av_1 + tw_1}{t^2 + a^2 + 1} + z, \quad v = -\frac{au_1 - (t^2 + 1)v_1 + atw_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

$$w = -\frac{tu_1 + atv_1 - (a^2 + 1)w_1}{t^2 + a^2 + 1}, \quad \rho, \quad p = p_1 + \gamma z, \quad S = S_1 + \gamma z,$$

где функции $u_1, v_1, w_1, \rho, p_1, S_1$ зависят от инвариантов $t, x_1 = x - ay - tz$, приводит к инвариантной подмодели ранга 2 канонического вида эволюционного типа

$$D_1 u_1 + (t^2 + a^2 + 1)\rho^{-1}p_{1x_1} = \frac{2tu_1 + 2atv_1 - 2(a^2 + 1)w_1}{t^2 + a^2 + 1} + \gamma t\rho^{-1},$$

$$D_1 v_1 = \frac{atu_1 + a^2tv_1 - a(a^2 + 1)w_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

$$D_1 w_1 = \frac{(t^2 + 1)u_1 + a(t^2 + 1)v_1 - a^2tw_1}{t^2 + a^2 + 1} - \gamma\rho^{-1},$$

$$D_1 \rho + \rho u_{1x_1} = 0, \quad D_1 S_1 = \gamma \frac{tu_1 + atv_1 - (a^2 + 1)w_1}{t^2 + a^2 + 1},$$

в правых частях уравнений которой содержится больше неизвестных функций, чем в подмодели, полученной с помощью представления решения (10).

Заключение. Таким образом, для уравнений идеальной гидродинамики с давлением в виде суммы функций плотности и энтропии построены 15 инвариантных подмоделей ранга 2 канонического вида эволюционного типа, уточняющие вид инвариантных подмоделей ранга 2 для уравнений газовой динамики с уравнением состояния общего вида. Полученные подмодели являются основой для получения точных решений уравнений (1) с учетом уравнения состояния (3) и могут быть изучены методами группового анализа. Пример изучения инвариантной подмодели ранга 2 и получения точного решения приведен в работе [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. Хабиров С. В. Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, вып. 2. С. 87–90.

3. Хабилов С. В. Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, вып. 2. С. 99–103.
4. Чиркунов Ю. А., Хабилов С. В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: изд. НГТУ, 2012.
5. Мамонтов Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // Прикл. механика и техн. физика. 1999. Т. 40, вып. 2. С. 50–55.
6. Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, вып. 1. С. 94–107.
7. Сираева Д. Т. Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 1. С. 59–63.
8. Хабилов С. В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Изд-во БГУ, 2013.
9. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. Сираева Д. Т., Хабилов С. В. Инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа // Челябинский физ.-мат. журнал. 2018. Т. 3, вып. 1. С. 38–57.

Поступила в редакцию 15 января 2019 г.

После доработки 15 января 2019 г.

Принята к публикации 14 марта 2019 г.

Сираева Дилара Тагировна

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН

просп. Октября, 71

450054 г. Уфа

E-mail: sirdilara@gmail.com