Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Furtsev, A contact problem for a plate and a beam in presence of adhesion,
Sib. Zh. Ind. Mat., 2019, Volume 22, Number 2, 105–117

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.210>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.89.197.203

April 26, 2023, 13:52:24

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ И БАЛКИ ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ^{*)}

А. И. Фурцев

Рассматривается задача о контакте между пластиной и балкой. В задаче предполагается, что взаимное проникновение пластины и балки происходить не может, в связи с чем используется подходящее условие непроникания. Вместе с тем учитывается сцепление тел, которое характеризуется числовым параметром сцепления. Доказывается существование и единственность решения контактной задачи, изучаются предельные переходы по параметру сцепления. Исследуется сопутствующая задача оптимального управления, в которой параметром управления служит параметр сцепления.

Ключевые слова: контакт, пластина, балка, тонкое препятствие, условие непроникания, дефект, сцепление, задача минимизации, вариационное неравенство, предельный переход, оптимальное управление.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.210

Введение. Многие используемые в современной науке и технике конструкции состоят из нескольких тел, скрепленных друг с другом определенным образом. В процессе создания и эксплуатации конструкций могут появляться дефекты, при которых составляющие конструкцию тела оказываются не скреплены друг с другом. Подобные дефекты вызывают необходимость рассматривать задачи, описывающие контакт тел, перемещения которых, вообще говоря, не совпадают.

При постановке контактных задач предпочтительно пользоваться условиями непроникания, исключающими нежелательное явление взаимного проникновения тел и благодаря этому точнее описывающими явление контакта. С математической точки зрения условия непроникания представляют собой неравенства, поэтому контактные задачи с условиями непроникания являются в целом нелинейными и характеризуются заранее неизвестным множеством точек контакта.

На сегодняшний день контактными задачам с условиями непроникания посвящено большое число работ. В частности, были изучены разрешимость и свойства регулярности решений задач о контакте препятствий и мембран [1–3], а также задач о контакте препятствий и пластин [4–7]. Широкий спектр контактных задач для пластин и тесно связанных с ними задач оптимального управления изучался в монографии [8]. Исследовались разнообразные задачи о контакте пластин и тонких деформируемых препятствий (см., например, [9–12]), в роли препятствий при этом нередко выступали балки [13–16].

В настоящей работе исследуется задача, описывающая изгиб пластины и балки, которые могут контактировать друг с другом вдоль линии. Считается, что взаимное проникновение пластины и балки при контакте невозможно, в связи с чем используется подходящее условие непроникания. Кроме того,

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10007).

учитывается сцепление тел, а величина сил сцепления характеризуется неотрицательным числовым параметром (параметром сцепления).

Разд. 1 работы посвящен постановке контактной задачи и анализу ее разрешимости. Контактная задача сначала ставится в вариационном виде: в виде задачи минимизации функционала энергии и в виде эквивалентного ей вариационного неравенства. Доказывается теорема о существовании и единственности вариационного решения. Затем исследуется краевая задача, по отношению к которой вариационное решение является слабым.

В разд. 2 изучаются предельные переходы по параметру сцепления в вариационном неравенстве. Предельные переходы осуществляются как для случая, когда параметр сцепления стремится к конечному значению, так и для случая, когда указанный параметр стремится к бесконечности. В последнем случае доказывается, что предельная задача описывает скрепленные между собой пластину и балку. Иными словами, если параметр сцепления устремлен к бесконечности, то дефект отсутствует. (Стоит отметить, что подобным свойством также обладают дефекты внутри упругих тел [17, 18].)

Анализ предельных переходов по параметру сцепления позволяет в разд. 3 изучить задачу оптимального управления, в которой параметр сцепления играет роль управляющего параметра. В этой задаче на множестве допустимых управлений (содержащем как конечные значения, так и бесконечность) требуется минимизировать функционал качества, характеризующий отклонение перемещений пластины и балки от заранее заданных функций. Доказывается, что задача оптимального управления имеет решение.

1. Постановка задачи о контакте. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, лежащая в x_1x_2 -координатной плоскости. Пусть $\gamma \subset \Omega$ — участок x -координатной прямой, не содержащий концевых точек. Будем считать, что множество γ располагается строго внутри области Ω (рис. 1), притом так, что γ может быть продолжено внутрь Ω до гладкой замкнутой кривой Σ без самопересечений. Область $\Omega \setminus \bar{\gamma}$ обозначим через Ω_γ .

Рис. 1. Расположение области Ω и множества γ

Область Ω отвечает срединной плоскости пластины, а множество γ — срединной линии балки. Соответственно на Ω и γ определяются функции v и w , описывающие перемещения точек пластины и балки.

Введем в рассмотрение пространства Соболева $H_0^2(\Omega)$ и $H_0^2(\gamma)$ и определим на $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$ функционал энергии

$$\mathcal{E}(v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f v + \frac{1}{2} \int_{\gamma} b(w_{xx})^2 - \int_{\gamma} g w + \frac{\beta}{2} \int_{\gamma} (v - w)^2.$$

Здесь и далее $v_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $w_x = \frac{dw}{dx}$, число $\beta \in [0, \infty)$ считается известным,

а заданные функции удовлетворяют свойствам

$$\begin{aligned} b_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad b \in L^\infty(\gamma), \quad g \in L^2(\gamma), \\ b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} &\geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \text{при любых} \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \\ b_{ijkl} &= b_{jikl} = b_{klij}, \quad b \geq c_1, \quad c_0, c_1 \equiv \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Индексы i, j, k, l принимают значения 1, 2, и по ним проводится суммирование всюду, где они повторяются. Определяемые на γ функции отождествляются с функциями одной переменной.

Механический смысл функционала энергии состоит в следующем. Первое и третье слагаемые функционала описывают энергию изгиба пластины и балки, второе и четвертое слагаемые — работу внешних распределенных сил. Благодаря последнему слагаемому учитывается сцепление между телами, а число β представляет собой параметр сцепления.

Поставим задачу о контакте пластины и балки при наличии сцепления в вариационном виде. Для этого введем множество допустимых перемещений

$$K = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) \mid v - w \geq 0 \text{ на } \gamma\}$$

и рассмотрим задачу минимизации: найти $(v, w) \in K$, для которого выполняется равенство

$$\mathcal{E}(v, w) = \min_{(\bar{v}, \bar{w}) \in K} \mathcal{E}(\bar{v}, \bar{w}). \quad (1)$$

Также приведем вариационное неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l} (\bar{v} - v)_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) + \int_{\gamma} b w_{xx} (\bar{w} - w)_{xx} - \int_{\gamma} g(\bar{w} - w) \\ &+ \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \text{при любых} \quad (\bar{v}, \bar{w}) \in K, \quad (2) \end{aligned}$$

которое, как легко проверить, эквивалентно задаче минимизации (1).

Сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности вариационного решения.

Теорема 1. *Задача минимизации (1) имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что решение задачи минимизации (1) существует. Опираясь на неравенства Пуанкаре — Фридрихса и Коши — Буняковского, получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v, w) &\geq c_2 \|v\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - c_3 \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + c_2 \|w\|_{H_0^2(\gamma)}^2 - c_3 \|w\|_{H_0^2(\gamma)}, \\ c_2 &\equiv \text{const} > 0, \quad c_3 \equiv \text{const} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\mathcal{E}(v, w) \rightarrow \infty \text{ при } \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^2(\gamma)} \rightarrow \infty,$$

т. е. функционал энергии $\mathcal{E}$ коэрцитивен. С другой стороны, функционал энергии $\mathcal{E}$ слабо полунепрерывен снизу, а множество допустимых перемещений K слабо замкнуто. Следовательно, функционал $\mathcal{E}$ имеет на множестве K минимум, и решение задачи минимизации (1) существует.

Заметим, наконец, что функционал энергии $\mathcal{E}$ является строго выпуклым. Следовательно, он может иметь не более одного минимума, и решение задачи минимизации (1) единственно. Теорема 1 доказана.

Вместе с приведенными выше вариационными формулировками (1) и (2) задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления допускает постановку в виде краевой задачи: найти функции v и w такие, что

$$(b_{ijkl}v_{x_kx_l})_{x_ix_j} = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (3)$$

$$[m_\nu(v)] = 0, \quad [t_\nu(v)] + (bw_{xx})_{xx} = g \quad \text{на } \gamma, \quad (4)$$

$$([t_\nu(v)] + \beta(v-w))(v-w) = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (5)$$

$$[t_\nu(v)] + \beta(v-w) \geq 0, \quad v-w \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (6)$$

$$[v] = 0, \quad [v_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (7)$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{на } \partial\gamma, \quad (8)$$

$$v = 0, \quad v_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_\nu(v) &= m_{ij}(v)\nu_j\nu_i, \quad t_\nu(v) = (m_{ij}(v))_{x_j}\nu_i + (m_{ij}(v))_{x_k}\tau_k\tau_j\nu_i, \\ m_{ij}(v) &= b_{ijkl}v_{x_kx_l}, \quad v_\nu = v_{x_i}\nu_i, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Скобки $[\cdot]$ обозначают скачок функции, в частности, $[v] = v^+ - v^-$, где v^+ , v^- — следы функции v на Σ , взятые со стороны областей Ω_+ и Ω_- . Здесь и далее $\Omega_\pm$ — подобласти, на которые Ω разбивается кривой Σ (рис. 2). Через $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ обозначен нормальный к Σ единичный вектор, внешний по отношению к подобласти Ω_- , в то время как $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ — касательный вектор, а $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Рис. 2. Продолжение множества γ до замкнутой кривой Σ

Каждое из соотношений (3)–(9) имеет ясный механический смысл. Так, соотношение (3) является уравнением равновесия пластины. Соотношения (4) описывают скачки изгибающего момента m_ν и перерезывающей силы t_ν пластины на множестве возможного контакта с балкой. (Второе соотношение (4) одновременно играет роль уравнения равновесия балки.) Соотношения (5) и (6) дополняют набор контактных условий. Согласно им имеет место альтернатива: контакт пластины и балки после изгиба происходит либо нет. Какие-либо предположения о множестве точек контакта и множестве точек отсутствия контакта заранее не делаются. Предполагается, однако, что в точках отсутствия контакта пластина и балка притягиваются друг к другу. При этом силы притяжения прямо пропорциональны параметру β . Благодаря последнему неравенству из (6) исключается взаимное проникновение тел в точках контакта. Согласно (7)–(9) считается, что в пластине отсутствуют трещины и изломы, а также что внешний край пластины и концы балки жестко закреплены.

Ниже мы докажем, что вариационное решение, существование которого установлено теоремой 1, является слабым решением краевой задачи (3)–(9).

Поскольку вариационное решение не обладает достаточной гладкостью для того, чтобы определить значения изгибающего момента и перерезывающей силы по формулам (10), то смысл указанных величин требует предварительного пояснения. С этой целью введем в рассмотрение пространства $H^{1/2}(\Sigma)$ и $H^{3/2}(\Sigma)$ с нормами

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Sigma)}^2 = \|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|v(s) - v(t)|^2}{|s - t|^2} ds dt,$$

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Sigma)}^2 = \|v\|_{H^1(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|\nabla v(s) - \nabla v(t)|^2}{|s - t|^2} ds dt$$

и обозначим через $H^{-1/2}(\Sigma)$, $H^{-3/2}(\Sigma)$ сопряженные к $H^{1/2}(\Sigma)$, $H^{3/2}(\Sigma)$ пространства. Если решение достаточно регулярное, а именно, если функция v принадлежит пространству

$$V(\Omega_{\gamma}) = \{v \mid b_{ijkl}v_{x_k x_l} \in L^2(\Omega_{\gamma}), (b_{ijkl}v_{x_k x_l})_{x_i x_j} \in L^2(\Omega_{\gamma}), i, j, k, l = 1, 2\},$$

то можно определить следы $m_{\nu}^{\pm}(v) \in H^{-1/2}(\Sigma)$, $t_{\nu}^{\pm}(v) \in H^{-3/2}(\Sigma)$ такие, что справедливы следующие формулы (см. [8, с. 105]):

$$\int_{\Omega_{\pm}} b_{ijkl}v_{x_k x_l} \hat{v}_{x_i x_j} = \int_{\Omega_{\pm}} (b_{ijkl}v_{x_k x_l})_{x_i x_j} \hat{v}$$

$$\mp \langle m_{\nu}^{\pm}(v), \hat{v}_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} \pm \langle t_{\nu}^{\pm}(v), \hat{v} \rangle_{3/2, \Sigma} \quad \text{при любых } \hat{v} \in H_0^2(\Omega). \quad (11)$$

Здесь и далее скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Sigma}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3/2, \Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{1/2}(\Sigma)$, $H^{3/2}(\Sigma)$ и их сопряженными. В случае гладкой функции v следы $m_{\nu}^{\pm}(v)$, $t_{\nu}^{\pm}(v)$ определены по формулам (10), поэтому для простоты изложения мы не стали менять обозначения. Сложив формулы (11), имеем следующую формулу Грина:

$$\int_{\Omega_{\gamma}} b_{ijkl}v_{x_k x_l} \hat{v}_{x_i x_j} = \int_{\Omega_{\gamma}} (b_{ijkl}v_{x_k x_l})_{x_i x_j} \hat{v}$$

$$- \langle [m_{\nu}(v)], \hat{v}_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t_{\nu}(v)], \hat{v} \rangle_{3/2, \Sigma} \quad \text{при любых } \hat{v} \in H_0^2(\Omega), \quad (12)$$

где $[m_{\nu}(v)]$, $[t_{\nu}(v)]$ определены как элементы пространств $H^{-1/2}(\Sigma)$, $H^{-3/2}(\Sigma)$ соответственно.

Следующая теорема решает вопрос связи между вариационным неравенством (2) и краевой задачей (3)–(9).

Теорема 2. Если гладкие функции v , w удовлетворяют соотношениям (3)–(9), то пара (v, w) является решением вариационного неравенства (2). В свою очередь, если решение $(v, w) \in K$ вариационного неравенства (2) дополнительно удовлетворяет требованию $v \in V(\Omega_{\gamma})$, то для него выполняются соотношения вида (3)–(9).

Доказательство. 1. Пусть для гладких функций v и w верны соотношения (3)–(9). Заметим сразу, что благодаря второму соотношению (6) и соотношениям (7)–(9) пара (v, w) принадлежит множеству K . Далее, выберем элемент $(\bar{v}, \bar{w})$ из K произвольно и рассмотрим выражение

$$L_{v, w} = \int_{\Omega} b_{ijkl}v_{x_k x_l}(\bar{v} - v)_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v)$$

$$+ \int_{\gamma} b w_{xx}(\bar{w} - w)_{xx} - \int_{\gamma} g(\bar{w} - w) + \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{w} - w),$$

представляющее собой левую часть вариационного неравенства (2). Докажем неотрицательность этого выражения. Интегрирование по частям в первом и третьем слагаемых с учетом (3) влечет

$$\begin{aligned} L_{v,w} = & - \int_{\gamma} [m_{\nu}(v)](\bar{v}_{\nu} - v_{\nu}) + \int_{\gamma} [t_{\nu}(v)](\bar{v} - v) \\ & + \int_{\gamma} ((bw_{xx})_{xx} - g)(\bar{w} - w) + \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{v} - v) - \beta \int_{\gamma} (v - w)(\bar{w} - w). \end{aligned}$$

Воспользовавшись здесь условиями (4) и перегруппировав слагаемые, получаем

$$L_{v,w} = \int_{\gamma} ([t_{\nu}(v)] + \beta(v - w))(\bar{v} - \bar{w}) - \int_{\gamma} ([t_{\nu}(v)] + \beta(v - w))(v - w).$$

Опираясь на (5), находим

$$L_{v,w} = \int_{\gamma} ([t_{\nu}(v)] + \beta(v - w))(\bar{v} - \bar{w}).$$

Учитывая первое соотношение (6) и условие $\bar{v} - \bar{w} \geq 0$ на γ , получаем, что левая часть вариационного неравенства (2) действительно неотрицательна. Таким образом, справедливость этого вариационного неравенства доказана.

2. Теперь, напротив, пусть для элемента (v, w) справедливо вариационное неравенство (2), и в дополнение к сказанному пусть $v \in V(\Omega_{\gamma})$. Выберем в (2) тестовые элементы вида $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\varphi, 0)$, где функция $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_{\gamma})$ произвольна. Имеем

$$\int_{\Omega_{\gamma}} b_{ijkl} v_{x_k x_l} \varphi_{x_i x_j} = \int_{\Omega_{\gamma}} f \varphi,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем тождество

$$\int_{\Omega_{\gamma}} ((b_{ijkl} v_{x_k x_l})_{x_i x_j} - f) \varphi = 0.$$

Полученное тождество в силу леммы Дюбуа — Реймона означает справедливость дифференциального уравнения (3).

Применим к вариационному неравенству (2) формулу Грина (12) и формулу интегрирования по частям для одномерного интеграла. Тогда с учетом доказанного уравнения (3) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & - \langle [m_{\nu}(v)], \bar{v}_{\nu} - v_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t_{\nu}(v)], \bar{v} - v \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{xx})_{xx} - g, \bar{w} - w \rangle_{2, \gamma} \\ & + \beta \langle v - w, \bar{v} - v \rangle_{3/2, \gamma} - \beta \langle v - w, \bar{w} - w \rangle_{3/2, \gamma} \geq 0 \text{ при любых } (\bar{v}, \bar{w}) \in K, \end{aligned} \quad (13)$$

в котором через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2, \gamma}$ обозначена двойственность между пространством $H_0^2(\gamma)$ и сопряженным к нему пространством $H^{-2}(\gamma)$.

Выберем элемент $(\phi, \psi) \in K$ так, что $\phi = \psi$ на γ . Подставляя в (13) тестовые элементы вида $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\phi, \psi)$, получаем тождества

$$\langle [m_{\nu}(v)], \phi_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [t_{\nu}(v)], \phi \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{xx})_{xx} - g, \psi \rangle_{2, \gamma} = 0, \quad (14)$$

в силу произвольности функций ϕ и ψ означающие справедливость соотношений (4).

Далее, выберем функцию $\xi \in H_0^2(\Omega)$ так, что $\xi \geq 0$ на γ . Возьмем в (13) элемент $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) + (\xi, 0)$ в качестве тестового элемента. Принимая во внимание первое тождество (14), находим неравенство

$$\langle [t_\nu(v)], \xi \rangle_{3/2, \Sigma} + \beta \langle v - w, \xi \rangle_{3/2, \gamma} \geq 0, \quad (15)$$

означающее, что выполняется первое соотношение (6).

Наконец, поочередно выбирая в (13) элементы $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$ и $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v, w)$, получим

$$\langle [t_\nu(v)], v \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{xx})_{xx} - g, w \rangle_{2, \gamma} + \beta \langle v - w, v - w \rangle_{3/2, \gamma} = 0, \quad (16)$$

т. е. с учетом второго тождества (14) верно соотношение (5).

Остаются последнее условие из (6) и условия (7)–(9). Но эти условия не нуждаются в доказательстве, поскольку они справедливы благодаря принадлежности $(v, w) \in K$.

Итак, доказано, что для достаточно регулярного решения вариационного неравенства (2) справедливы все соотношения (3)–(9). При этом уточнено, что соотношения (4), (5) и первое соотношение (6) выполняются в смысле (14), (16) и (15) соответственно. В качестве замечания добавим, что первые члены в (14)–(16) не зависят от продолжения Σ в том смысле, что это продолжение может быть выбрано произвольно (важно только, чтобы оно удовлетворяло оговоренным в начале раздела требованиям). Теорема 2 доказана.

2. Пределные переходы по параметру сцепления. Здесь изучаются предельные переходы по параметру сцепления β в вариационном неравенстве (2). С этого момента, чтобы подчеркнуть зависимость от β , будем использовать обозначение (v^β, w^β) для решения. В новом обозначении вариационное неравенство имеет следующий вид: для $(v^\beta, w^\beta) \in K$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta (\bar{v} - v^\beta)_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\beta) + \int_{\gamma} b w_{xx}^\beta (\bar{w} - w^\beta)_{xx} - \int_{\gamma} g(\bar{w} - w^\beta) \\ & + \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)(\bar{v} - v^\beta) - \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)(\bar{w} - w^\beta) \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

при любых $(\bar{v}, \bar{w}) \in K$.

Далее будут изучены два предельных перехода: сначала предельный переход $\beta \rightarrow \beta_0$, где $\beta_0 \in [0, \infty)$, а затем — предельный переход $\beta \rightarrow \infty$.

Начнем с доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Если $\beta \rightarrow \beta_0$, $\beta_0 \in [0, \infty)$, то выполняется сходимос

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v^{\beta_0}, w^{\beta_0}) \quad \text{сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma), \quad (18)$$

где $(v^{\beta_0}, w^{\beta_0})$ — решение вариационного неравенства (17), в котором вместо β взято β_0 .

Доказательство. Сначала докажем, что сходимос вида (18) выполняется в слабом смысле. Выбрав поочередно в (17) тестовые элементы $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$ и $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v^\beta, w^\beta)$, находим тождество

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta v_{x_i x_j}^\beta + \int_{\gamma} b (w_{xx}^\beta)^2 + \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_{\gamma} g w^\beta.$$

Применяя здесь неравенства Пуанкаре — Фридрихса и Коши — Буняковского, получаем оценки

$$\|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \leq c_4, \quad \|w^\beta\|_{H_0^2(\gamma)} \leq c_4, \quad c_4 \equiv \text{const} \geq 0.$$

Опираясь на полученные оценки, извлечем из семейства решений (v^β, w^β) такое подсемейство (сохраняя прежнее обозначение), что

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v^{\beta_0}, w^{\beta_0}) \quad \text{слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma), \quad (19)$$

где $(v^{\beta_0}, w^{\beta_0})$ — некоторый элемент из $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$.

Теперь на основании полученной сходимости (19) осуществим предельный переход в вариационном неравенстве (17). Очевидным следствием сходимости (19) является то, что элемент $(v^{\beta_0}, w^{\beta_0})$ принадлежит множеству K . В то же время согласно (17) для фиксированного элемента $(\bar{v}, \bar{w}) \in K$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta \bar{v}_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\beta) + \int_{\gamma} b w_{xx}^\beta \bar{w}_{xx} - \int_{\gamma} g(\bar{w} - w^\beta) \\ & + \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)(\bar{v} - \bar{w}) \geq \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta v_{x_i x_j}^\beta + \int_{\gamma} b (w_{xx}^\beta)^2 + \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)^2. \end{aligned}$$

Перейдя в левой части неравенства к пределу, а в правой части — к нижнему пределу, получаем, что для $(v^{\beta_0}, w^{\beta_0}) \in K$ выполняется

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\beta_0} (\bar{v} - v^{\beta_0})_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^{\beta_0}) + \int_{\gamma} b w_{xx}^{\beta_0} (\bar{w} - w^{\beta_0})_{xx} - \int_{\gamma} g(\bar{w} - w^{\beta_0}) \\ & + \beta_0 \int_{\gamma} (v^{\beta_0} - w^{\beta_0})(\bar{v} - v^{\beta_0}) - \beta_0 \int_{\gamma} (v^{\beta_0} - w^{\beta_0})(\bar{w} - w^{\beta_0}) \geq 0 \quad (20) \end{aligned}$$

при любых $(\bar{v}, \bar{w}) \in K$.

Несложно видеть, что в результате предельного перехода получено вариационное неравенство вида (17), в котором вместо параметра β взято число β_0 .

Остается доказать, что сходимость вида (18) выполняется в сильном смысле. Заметим, что на основании (17), (19) и (20) справедливо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta v_{x_i x_j}^\beta + \int_{\gamma} b (w_{xx}^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_{\gamma} g w^\beta - \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)^2 \\ & \rightarrow \int_{\Omega} f v^{\beta_0} + \int_{\gamma} g w^{\beta_0} - \beta_0 \int_{\gamma} (v^{\beta_0} - w^{\beta_0})^2 = \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\beta_0} v_{x_i x_j}^{\beta_0} + \int_{\gamma} b (w_{xx}^{\beta_0})^2. \end{aligned}$$

Отсюда благодаря неравенству Пуанкаре — Фридрихса следует, что сходимость (18) действительно выполняется в сильном смысле, и тем самым доказательство теоремы 3 завершено.

Теперь перейдем к изучению предельного перехода $\beta \rightarrow \infty$ в вариационном неравенстве (17). Вариационная задача, которая будет получена в результате этого предельного перехода, отличается от исходного вариационного неравенства и имеет вид следующего вариационного уравнения: для $(v^\infty, w^\infty) \in H$

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\infty \bar{v}_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_{\gamma} b w_{xx}^\infty \bar{w}_{xx} - \int_{\gamma} g \bar{w} = 0 \quad (21)$$

при любых $(\bar{v}, \bar{w}) \in H$, где

$$H = \{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) \mid v - w = 0 \text{ на } \gamma\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вариационное уравнение (21) эквивалентно задаче минимизации: найти $(v^\infty, w^\infty) \in H$, для которого выполняется равенство

$$\mathcal{E}_\infty(v^\infty, w^\infty) = \min_{(\bar{v}, \bar{w}) \in H} \mathcal{E}_\infty(\bar{v}, \bar{w})$$

с функционалом энергии

$$\mathcal{E}_\infty(v^\infty, w^\infty) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\infty v_{x_i x_j}^\infty - \int_{\Omega} f v^\infty + \frac{1}{2} \int_{\gamma} b(w_{xx}^\infty)^2 - \int_{\gamma} g w^\infty.$$

Исходя из этого теорему существования для задачи (21) можно было бы доказать по аналогии с теоремой 1 независимо от проводимых ниже рассуждений. Мы же далее получим существование решения задачи (21) именно как результат предельного перехода $\beta \rightarrow \infty$ в вариационном неравенстве (17).

Теорема 4. Если $\beta \rightarrow \infty$, то для семейства решений вариационного неравенства (17) выполняется сходимост

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v^\infty, w^\infty) \quad \text{сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma), \quad (22)$$

где (v^∞, w^∞) — решение вариационного уравнения (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что сходимост вида (22) выполняется в слабом смысле. Из (17) получаем тождество

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta v_{x_i x_j}^\beta + \int_{\gamma} b(w_{xx}^\beta)^2 + \beta \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)^2 = \int_{\Omega} f v^\beta + \int_{\gamma} g w^\beta.$$

Так как по предположению теоремы $\beta \rightarrow \infty$, то можно без ограничения общности полагать, что $\beta \neq 0$. Тогда из полученного тождества приходим к оценкам

$$\|v^\beta\|_{H_0^2(\Omega)} \leq c_5, \quad \|w^\beta\|_{H_0^2(\gamma)} \leq c_5, \quad \int_{\gamma} (v^\beta - w^\beta)^2 \leq \frac{c_5}{\beta}, \quad c_5 \equiv \text{const} \geq 0. \quad (23)$$

На основании первых двух оценок находим, при необходимости выбирая из семейства (v^β, w^β) подсемейство, что

$$(v^\beta, w^\beta) \rightarrow (v^\infty, w^\infty) \quad \text{слабо в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma), \quad (24)$$

где элемент (v^∞, w^∞) принадлежит по меньшей мере пространству $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$.

Более того, как несложно видеть из последней оценки (23), выполняется соотношение $v^\infty - w^\infty = 0$ на γ , следовательно предельный элемент (v^∞, w^∞) в (24) принадлежит пространству H .

Установим теперь, что элемент (v^∞, w^∞) является решением вариационного уравнения (21). Из вариационного неравенства (17) вытекает, что для фиксированного $(\bar{v}, \bar{w}) \in H$ верно тождество

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\beta \bar{v}_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_{\gamma} b w_{xx}^\beta \bar{w}_{xx} - \int_{\gamma} g \bar{w} = 0.$$

Перейдя здесь к пределу на основании сходимости (24), получаем в точности вариационное уравнение (21).

Докажем, наконец, сильную сходимость (22). Из вариационного неравенства (17) имеем оценку

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\beta} v_{x_i x_j}^{\beta} + \int_{\gamma} b(w_{xx}^{\beta})^2 \leq \int_{\Omega} f v^{\beta} + \int_{\gamma} g w^{\beta}. \quad (25)$$

Перейдя здесь к верхнему пределу на основании (24), с учетом (21) находим

$$\overline{\lim}_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\beta} v_{x_i x_j}^{\beta} + \int_{\gamma} b(w_{xx}^{\beta})^2 \right\} \leq \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\infty} v_{x_i x_j}^{\infty} + \int_{\gamma} b(w_{xx}^{\infty})^2.$$

Одновременно с этим левая часть оценки (25) слабо полунепрерывна снизу, поэтому получаем следующее:

$$\int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\beta} v_{x_i x_j}^{\beta} + \int_{\gamma} b(w_{xx}^{\beta})^2 \rightarrow \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\infty} v_{x_i x_j}^{\infty} + \int_{\gamma} b(w_{xx}^{\infty})^2.$$

Отсюда благодаря неравенству Пуанкаре — Фридрихса следует, что сходимость вида (25) действительно выполняется в сильном смысле. Теорема 4 доказана.

Теперь приступим к изучению краевой задачи, по отношению к которой решение вариационного уравнения (21) является слабым: найти функции v^{∞} и w^{∞} такие, что

$$(b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\infty})_{x_i x_j} = f \quad \text{в } \Omega_{\gamma}, \quad (26)$$

$$[m_{\nu}(v^{\infty})] = 0, \quad [t_{\nu}(v^{\infty})] + (b w_{xx}^{\infty})_{xx} = g \quad \text{на } \gamma, \quad (27)$$

$$v^{\infty} - w^{\infty} = 0, \quad [v^{\infty}] = 0, \quad [v_{\nu}^{\infty}] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (28)$$

$$w^{\infty} = 0, \quad w_x^{\infty} = 0 \quad \text{на } \partial\gamma, \quad (29)$$

$$v^{\infty} = 0, \quad v_n^{\infty} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (30)$$

Приведенная задача описывает равновесие пластины и балки, которые скреплены друг с другом вдоль линии.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. Если гладкие функции v^{∞} , w^{∞} удовлетворяют соотношениям (26)–(30), то пара (v^{∞}, w^{∞}) является решением вариационного уравнения (21). С другой стороны, если решение $(v^{\infty}, w^{\infty}) \in H$ вариационного уравнения (21) дополнительно удовлетворяет требованию $v^{\infty} \in V(\Omega_{\gamma})$, то для него верны соотношения (26)–(30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть v^{∞} и w^{∞} — гладкие функции, для которых справедливы соотношения (26)–(30). Непосредственно из соотношений (28)–(30) вытекает принадлежность элемента (v^{∞}, w^{∞}) пространству H . Далее, выберем элемент $(\bar{v}, \bar{w})$ из H произвольно и рассмотрим выражение

$$L_{v,w}^{\infty} = \int_{\Omega} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^{\infty} \bar{v}_{x_i x_j} - \int_{\Omega} f \bar{v} + \int_{\gamma} b w_{xx}^{\infty} \bar{w}_{xx} - \int_{\gamma} g \bar{w},$$

являющееся левой частью вариационного уравнения (21). Докажем, что это выражение равно нулю. Интегрирование по частям в первом и третьем слагаемых с учетом уравнения (26) дает

$$L_{v,w}^\infty = - \int_{\gamma} [m_\nu(v^\infty)] \bar{v}_\nu + \int_{\gamma} [t_\nu(v^\infty)] \bar{v} + \int_{\gamma} ((bw_{xx}^\infty)_{xx} - g) \bar{w}.$$

Воспользовавшись здесь соотношениями (27) и условием $\bar{v} = \bar{w}$ на γ , получаем, что левая часть уравнения (21) равна нулю. Таким образом, вариационное уравнение (21) доказано.

2. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $(v^\infty, w^\infty) \in H$ является решением вариационного уравнения (21) и удовлетворяет требованию $v^\infty \in V(\Omega_\gamma)$. Поскольку в этом случае справедливость условий (28)–(30) очевидна, то докажем лишь соотношения (26) и (27).

Подставим в (21) в качестве пробных функций элементы

$$(\bar{v}, \bar{w}) = (v^\infty, w^\infty) \pm (\varphi, 0), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma).$$

Находим

$$\int_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} v_{x_k x_l}^\infty \varphi_{x_i x_j} = \int_{\Omega_\gamma} f \varphi.$$

Проинтегрировав здесь по частям и применив к результату интегрирования лемму Дюбуа — Реймона, получаем дифференциальное уравнение (26).

Далее, выберем элемент $(\phi, \psi) \in H$ произвольно и подставим в (21) тестовые элементы вида $(\bar{v}, \bar{w}) = (v^\infty, w^\infty) \pm (\phi, \psi)$. С помощью формулы Грина (12), приведенной в разд. 1, приходим к тождествам

$$\langle [m_\nu(v^\infty)], \phi \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [t_\nu(v^\infty)], \phi \rangle_{3/2, \Sigma} + \langle (bw_{xx}^\infty)_{xx} - g, \psi \rangle_{2, \gamma} = 0,$$

означающим, что выполняются соотношения (27). Таким образом, мы доказали справедливость всех соотношений (26)–(30) для достаточно регулярного решения вариационного уравнения (21). Теорема 5 доказана.

3. Задача оптимального управления. Перейдем к изучению задачи оптимального управления. Пусть роль множества допустимых управлений играет промежуток $[0, \infty]$ расширенной числовой прямой. Предположим, что $(v_\star, w_\star)$ — некоторый заданный элемент пространства $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$. Пусть функционалом качества служит функция

$$G(\beta) = \|v^\beta - v_\star\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w^\beta - w_\star\|_{H_0^2(\gamma)},$$

где (v^β, w^β) — это либо (если управление β конечно) решение вариационного неравенства (17), либо (если β равно бесконечности) решение вариационного уравнения (21). Введенная таким образом функция G определена корректно всюду на промежутке $[0, \infty]$.

Задача оптимального управления имеет следующий вид: найти $\beta \in [0, \infty]$, для которого выполняется равенство

$$G(\beta) = \min_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}), \quad (31)$$

и, таким образом, задача состоит в нахождении параметра β , при котором отклонение (v^β, w^β) от $(v_\star, w_\star)$ минимально.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интерес к исследованию задачи (31) вызван обратной задачей, в которой наряду с неизвестными перемещениями v^β , w^β пластины и балки также неизвестен и подлежит отысканию параметр сцепления $\beta \in [0, \infty]$, а функции $v_\star$, $w_\star$ используются в качестве дополнительной информации.

Ответ на вопрос о существовании решения поставленной задачи оптимального управления дает следующая

Теорема 6. *Задача минимизации (31) имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β_n — минимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность, что

$$\beta_n \in [0, \infty], \quad G(\beta_n) \rightarrow \inf_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}).$$

Без ограничения общности будем полагать, что последовательность β_n является сходящейся. Возможны два случая:

- 1) начиная с некоторого номера $\beta_n \in [0, \infty)$ и при этом $\beta_n \rightarrow \beta_*$, где $\beta_* \in [0, \infty]$;
- 2) начиная с некоторого номера $\beta_n = \infty$.

В случае 2 существование решения задачи (31) очевидно. В свою очередь, в случае 1 по доказанным выше теоремам 3 и 4 имеет место сходимость

$$(v^{\beta_n}, w^{\beta_n}) \rightarrow (v^{\beta_*}, w^{\beta_*}) \quad \text{сильно в } H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma).$$

Используя эту сходимость, получаем, что

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{\beta} \in [0, \infty]} G(\bar{\beta}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|v^{\beta_n} - v_*\|_{H_0^2(\Omega)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \|w^{\beta_n} - w_*\|_{H_0^2(\gamma)} \\ &= \|v^{\beta_*} - v_*\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w^{\beta_*} - w_*\|_{H_0^2(\gamma)} = G(\beta_*), \end{aligned}$$

т. е. в случае 1 решением задачи (31) является β_* . Таким образом, решение задачи (31) существует и в случае 1, и в случае 2. Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Caffarelli L. A. Further regularity for the Signorini problem // Commun. Part. Diff. Eq. 1979. V. 4, N 9. P. 1067–1075.
2. Athanassopoulos I., Caffarelli L. A. Optimal regularity of lower-dimensional obstacle problems // J. Math. Sci. 2006. V. 132, N 3. P. 274–284.
3. Petrosyan A., Shahgholian H., Uraltseva N. N. Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems. Providence: Amer. Math. Soc., 2012. (Grad. Stud. Math; V. 136).
4. Caffarelli L. A., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1979. V. 6, N 1. P. 151–184.
5. Caffarelli L. A., Friedman A., Torelli A. The two-obstacle problem for the biharmonic operator // Pacific J. Math. 1982. V. 103, N 3. P. 325–335.
6. Schild B. On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1986. V. 13, N 4. P. 559–616.
7. Dal Maso G., Paderni G. Variational inequalities for the biharmonic operator with varying obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. V. 153, N 1. P. 203–227.
8. Khludnev A. M., Sokolowski J. Modelling and Control in Solid Mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verl., 1997.
9. Khludnev A. M. On unilateral contact of two plates aligned an angle to each other // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. V. 49, N 4. P. 553–567.
10. Khludnev A. M., Leugering G. Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures // Z. Anal. Anwend. 2008. V. 27, N 2. P. 157–177.
11. Неустроева Н. В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, N 4. С. 92–105.
12. Rotanova T. A. Unilateral contact problem for two plates with a rigid inclusion in the lower plate // J. Math. Sci. 2013. V. 188, № 4. P. 452–462.
13. Хлуднев А. М., Хоффманн К.-Х., Боткин Н. Д. Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, N 3. С. 707–717.
14. Khludnev A. M., Tani A. Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies // Eur. J. Mech. A Solids. 2008. V. 27, N 3. P. 365–377.

15. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111.
16. Фурцев А. И. Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки // Сиб. электрон. мат. известия. 2018. Т. 15. С. 935–949; URL: <http://semr.math.nsc.ru>
17. Khludnev A. M. On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // Math. Mech. Solids. 2018; DOI 10.1177/1081286518796472
18. Khludnev A. M. On modeling elastic bodies with defects // Сиб. электрон. мат. известия. 2018. Т. 15. С. 153–166; URL: <http://semr.math.nsc.ru>

Поступила в редакцию 17 ноября 2018 г.

После доработки 17 ноября 2018 г.

Принята к публикации 27 декабря 2018 г.

Фурцев Алексей Игоревич

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 15

630090 г. Новосибирск

E-mail: al.furtsev@mail.ru, furtsev@hydro.nsc.ru