Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. N. Bondar', On necessary conditions for the solvability of one class of elliptic systems in a half-space, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 8–23

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.302>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 15:03:52

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ*)

Л. Н. Бондарь

Рассматриваются краевые задачи в полупространстве для класса эллиптических систем. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского. Указываются необходимые условия однозначной разрешимости в соболевских пространствах.

Ключевые слова: эллиптические системы, краевые задачи, условие Лопатинского, соболевские пространства, условия разрешимости.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.302

1. Постановка задачи, формулировка результатов. В работе продолжаются исследования (см. [1–5]) краевых задач в полупространстве $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ для эллиптических систем:

$$\begin{aligned} L(D_x)U &= F(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ B(D_x)U|_{x_n=0} &= \Phi(x'). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Сформулируем условия на матричные дифференциальные операторы $L(D_x)$ и $B(D_x)$. Обозначим через $l_{j,r}(i\eta)$, $b_{j,r}(i\eta)$ элементы матриц $L(i\eta)$, $B(i\eta)$, являющихся символами соответствующих матричных дифференциальных операторов.

УСЛОВИЕ 1. Пусть матрица $L(i\eta)$ имеет размер $m \times m$ и ее элементы — однородные функции степени $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$, т. е. для любого $c > 0$ справедливы равенства $l_{j,r}(ci\eta) = c^l l_{j,r}(i\eta)$, $j, r = 1, \dots, m$.

УСЛОВИЕ 2. Равенство $\det L(i\eta) = 0$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$.

Матричные операторы, удовлетворяющие условиям 1, 2, входят в класс однородных эллиптических операторов (см., например, [6]).

Из условия 2 вытекает, что уравнение

$$\det L(is, i\zeta) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \quad (1.2)$$

не имеет вещественных корней по ζ . Обозначим через $\varkappa$ число корней, лежащих в верхней полуплоскости, число $\varkappa$ не зависит от s .

УСЛОВИЕ 3. Пусть матрица $B(i\eta)$ имеет размер $\varkappa \times m$ и ее элементы — однородные функции степени $\beta_j l$, $\beta_j l \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta_j l \leq l-1$, т. е. для любого $c > 0$ справедливы равенства $b_{j,r}(ci\eta) = c^{\beta_j l} b_{j,r}(i\eta)$, $j = 1, \dots, \varkappa$, $r = 1, \dots, m$.

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05132041).

УСЛОВИЕ 4. Краевая задача (1.1) удовлетворяет условию Лопатинского, т. е. краевая задача на полупрямой

$$\begin{aligned} L(is, D_{x_n})v &= 0, \quad x_n > 0, \\ B(is, D_{x_n})v|_{x_n=0} &= \varphi(s), \quad \sup_{x_n > 0} |v| < \infty, \end{aligned} \quad (1.3)$$

при $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ однозначно разрешима для любого вектора φ .

Из работ [2, 4] следует, что краевая задача (1.1) однозначно разрешима в W_p^l при $n/p' > l$. В работах [1, 3, 4] показано, что для разрешимости краевой задачи (1.1) в W_p^l при $n/p' \leq l$ необходимо накладывать некоторые дополнительные условия на $F(x)$ и $\Phi(x')$. Выписан явный вид этих условий в случае, когда $l-1 < n/p' \leq l$. В работе [3] в случае $\Phi(x') \equiv 0$ показано, что эти условия являются необходимыми и достаточными для разрешимости в W_p^l . В частном случае при $\Phi(x') \equiv 0$ хорошо известно [1, 5], что для разрешимости краевой задачи в W_p^l при $l-2 < n/p' \leq l-1$ достаточно потребовать от $F(x)$, когда $F(x) \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $(1+|x|)F(x) \in L_1(\mathbb{R}_+^n)$, выполнения следующих условий:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} F(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}_+^n} x^\nu F(x) dx = 0, \quad |\nu| = 1.$$

В данной работе указываются необходимые условия разрешимости краевой задачи (1.1) в соболевском пространстве W_p^l при $l-2 < n/p' \leq l-1$. Отметим, что полученные условия зависят от вида граничного оператора.

Обозначим через $\Psi^1(s)$ и $\Psi^2(s)$ следующие матрицы:

$$\begin{aligned} \Psi^1(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(s)} B(is, i\zeta) L^{-1}(is, i\zeta) d\zeta, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \\ \Psi^2(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(s)} \zeta B(is, i\zeta) L^{-1}(is, i\zeta) d\zeta, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(s)$ — контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения (1.2); $L^{-1}(is, i\zeta)$ — обратная матрица к $L(is, i\zeta)$.

В силу условий однородности 1, 3 имеем $\Psi_j^1(cs) = c^{\beta_j l - (l-1)} \Psi_j^1(s)$, где $\Psi_j^1(s)$ — j -я строка матрицы $\Psi^1(s)$. Отметим, что если $\beta_j l = l-1$, то $\Psi_j^1(cs) = \Psi_j^1(s)$. Возможен второй случай, когда $\beta_j l < l-1$. Поскольку $\beta_j l \in \mathbb{N}$, то $\beta_j l \leq l-2$, но тогда в силу определения матрицы Ψ^1 , используя теорему Коши, получим $\Psi_j^1(s) = 0$.

Обозначим через J множество индексов j , $j = 1, \dots, \varkappa$, для которых $\beta_j l = l-1$, и через Q — множество индексов q , $q = 1, \dots, \varkappa$, для которых $\beta_q l = l-2$.

Будем рассматривать краевые задачи вида (1.1), для которых матрицы $\Psi^1(s)$, $D_{s_j} \Psi^2(s)$ являются постоянными, т. е. не зависят от параметра s .

Теорема. Предположим, что

$$\begin{aligned} F(x) &= (F^1(x), \dots, F^m(x))^T \in \prod_{j=1}^m C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n), \\ \Phi(x') &= (\Phi^1(x'), \dots, \Phi^\varkappa(x'))^T \in \prod_{j=1}^\varkappa C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}). \end{aligned}$$

Для разрешимости краевой задачи (1.1) в $W_p^l(\mathbb{R}_+^n)$, $l-2 < n/p' \leq l-1$, $1 < p \leq 2$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\Psi_j^1 \int_{\mathbb{R}_+^n} F(x) dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(x') dx' = 0, \quad j \in J; \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j^1 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_\rho F(x) dx + D_{s_\rho} \Psi_j^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n F(x) dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} x_\rho \Phi^j(x') dx' &= 0, \\ i \Psi_q^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n F(x) dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^q(x') dx' &= 0, \\ \rho &= 1, \dots, n-1, \quad j \in J, \quad q \in Q, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где Ψ_j^k — j -я строчка матрицы Ψ^k , $k = 1, 2$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорему.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости для системы уравнений Навье [7]:

$$\begin{aligned} L(D_x)U &= F(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^3, \\ B(D_x)U|_{x_n=0} &= \Phi(x'), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$L(D_x) = \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_1}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_1x_2}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_1x_3}^2 \\ (\lambda + \mu)D_{x_1x_2}^2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_2}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_2x_3}^2 \\ (\lambda + \mu)D_{x_1x_3}^2 & (\lambda + \mu)D_{x_2x_3}^2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_{x_3}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$U = (U^1, U^2, U^3)^T$, $F = (F^1, F^2, F^3)^T$, $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)^T$; λ, μ — постоянные Ламе, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, Δ — оператор Лапласа по x . Для первой краевой задачи оператор $B(D_x) = I$. Операторы $L(D_x)$ и $B(D_x)$ удовлетворяют условиям 1–4. Оператор $L(D_x)$ эллиптический, для него $\det L(i\xi) = -\mu^2(\lambda + 2\mu)|\xi|^6$, $\xi = (s, \xi_3)$, $l = 2$, $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$; $J = \emptyset$, $Q = \{1, 2, 3\}$,

$$\Psi^1 = 0, \quad \Psi^2(s) = i \begin{pmatrix} -1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & -1/\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}, \quad D_{s_j} \Psi^2(s) = 0.$$

В силу теоремы имеем, что для разрешимости рассматриваемой краевой задачи в $\prod_{j=1}^3 W_p^2(\mathbb{R}_+^3)$ при $1 < p \leq 3/2$ даже для финитных бесконечно дифференцируемых функций F^j , Φ^j , $j = 1, 2, 3$, необходимо выполнение условия

$$\begin{pmatrix} 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1/(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}_+^3} x_3 F(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x') dx' = 0.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим смешанную краевую задачу для эллиптической системы типа Бицадзе [8]: задачу (1.6), когда

$$L(D_x) = \begin{pmatrix} -\Delta + 2D_{x_1}^2 & 2D_{x_1x_2}^2 & 2D_{x_1x_3}^2 \\ 2D_{x_1x_2}^2 & -\Delta + 2D_{x_2}^2 & 2D_{x_2x_3}^2 \\ 2D_{x_1x_3}^2 & 2D_{x_2x_3}^2 & -\Delta + 2D_{x_3}^2 \end{pmatrix},$$

$U = (U^1, U^2, U^3)^T$, $F = (F^1, F^2, F^3)^T$, $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)^T$; Δ — оператор Лапласа по x . Граничный оператор $B(D_x) = \text{diag}(1, 1, D_{x_3})$. Операторы $L(D_x)$, $B(D_x)$ удовлетворяют условиям 1–4. Оператор $L(D_x)$ эллиптический, для него $\det L(i\xi) = -|\xi|^6$, $\xi = (s, \xi_3)$, $l = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1/2$; $Q = \{1, 2\}$, $J = \{3\}$,

$$\Psi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^2(s) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2s_1 & 2s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{s_1}\Psi^2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{s_2}\Psi^2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по теореме разрешимости краевой задачи в соболевском пространстве $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}_+^3)$ при $1 < p \leq 3/2$ даже для финитных бесконечно дифференцируемых функций F^j , Φ^j , $j = 1, 2, 3$, необходимо выполнение условий

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} F^3(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^3(x') dx' = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} x_k F^3(x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+^3} x_3 F^k(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} x_k \Phi^3(x') dx' = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} x_3 F^k(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^k(x') dx' = 0, \quad k = 1, 2.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим вторую краевую задачу теории упругости для системы уравнений Навье [7]: задачу (1.6) с оператором $L(D_x)$ из (1.7), где граничный оператор $B(D_x)$ имеет вид

$$B(D_x) = \begin{pmatrix} \mu D_{x_3} & 0 & \mu D_{x_1} \\ 0 & \mu D_{x_3} & \mu D_{x_2} \\ \lambda D_{x_1} & \lambda D_{x_2} & (\lambda + 2\mu) D_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Операторы $L(D_x)$ и $B(D_x)$ удовлетворяют условиям 1–4. Оператор $L(D_x)$ эллиптический, для него $\det L(i\xi) = -\mu^2(\lambda + 2\mu)|\xi|^6$, $\xi = (s, \xi_3)$, $l = 2$, $\beta_j = 1/2$, $j = 1, 2, 3$; $J = \{1, 2, 3\}$,

$$\Psi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^2(s) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \lambda / (\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & s_2 \lambda / (\lambda + 2\mu) \\ s_1 & s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{s_1}\Psi^2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda / (\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{s_2}\Psi^2(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda / (\lambda + 2\mu) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы имеем, что для разрешимости рассматриваемой краевой задачи в $\prod_1^3 W_p^2(\mathbb{R}_+^3)$ при $1 < p \leq 3/2$ даже для финитных бесконечно дифференцируемых функций F^j , Φ^j , $j = 1, 2, 3$, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^3} F^j(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^j(x') dx' &= 0, \quad j = 1, 2, \\
\int_{\mathbb{R}_+^3} F^3(x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^3(x') dx' &= 0, \\
\int_{\mathbb{R}_+^3} x_k F^k(x) dx - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{\mathbb{R}_+^3} x_3 F^3(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} x_k \Phi^k(x') dx' &= 0, \quad k = 1, 2, \\
\int_{\mathbb{R}_+^3} x_k F^j(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} x_k \Phi^j(x') dx' &= 0, \quad k, j = 1, 2, \quad k \neq j, \\
\int_{\mathbb{R}_+^3} x_k F^3(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+^3} x_3 F^k(x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} x_k \Phi^3(x') dx' &= 0, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда рассматривается вторая краевая задача для системы Навье при нулевых граничных функциях, аналогичная теорема доказана в [9].

2. Формула решения вспомогательной задачи. Предположим, что

$$\begin{aligned}
F(x) &= (F^1(x), \dots, F^m(x))^T \in \prod_{j=1}^m C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n), \\
\Phi(x') &= (\Phi^1(x'), \dots, \Phi^\infty(x'))^T \in \prod_{j=1}^\infty C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}).
\end{aligned}$$

Обозначим через $\tilde{F}(s, x_n)$ и $\tilde{\Phi}(s)$ преобразование Фурье по переменной x' вектор-функций $F(x', x_n)$ и $\Phi(x')$ соответственно.

Рассмотрим краевую задачу на полупространстве для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
L(is, D_{x_n})\omega &= \tilde{F}(s, x_n), \quad x_n > 0, \\
B(is, D_{x_n})\omega|_{x_n=0} &= \tilde{\Phi}(s), \quad \sup_{x_n > 0} |\omega| < \infty.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В силу условия Лопатинского эта задача однозначно разрешима. Ее решение можно представить в виде

$$\omega(s, x_n) = \omega_0(s, x_n) + v(s, x_n), \tag{2.2}$$

где $\omega_0(s, x_n)$ — ограниченное решение системы $L(is, D_{x_n})\omega = \tilde{F}(s, x_n)$, $x_n > 0$; вектор-функция $v(s, x_n)$ — решение краевой задачи (1.3), где $\varphi(s) = \tilde{\Phi}(s) - B(is, D_{x_n})\omega_0(s, x_n)|_{x_n=0}$.

Следуя схеме, указанной в [2], решение задачи (2.1) можно записать в виде

$$\omega(s, x_n) = \tilde{L}(is, D_{x_n})R\tilde{F}(s, x_n) + \sum_{j=1}^\infty \varphi^j(s)\omega_j(s, x_n), \tag{2.3}$$

где

$$R\tilde{F}(s, x_n) = \int_0^{x_n} J_+(s, x_n - y_n) \tilde{F}(s, y_n) dy_n + \int_{x_n}^{\infty} J_-(s, x_n - y_n) \tilde{F}(s, y_n) dy_n,$$

$$J_+(s, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\exp(ix_n \zeta)}{a(is, i\zeta)} d\zeta, \quad J_-(s, x_n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^-} \frac{\exp(ix_n \zeta)}{a(is, i\zeta)} d\zeta,$$

при этом контур $\Gamma^+ = \Gamma^+(s)$ охватывает все корни уравнения (1.2), лежащие в верхней полуплоскости, а контур $\Gamma^- = \Gamma^-(s)$ охватывает корни, лежащие в нижней полуплоскости; $\varphi^j(s) = \tilde{\Phi}^j(s) - B_j(is, D_{x_n})\omega_0(s, x_n)|_{x_n=0}$, $B_j(is, D_{x_n}) = (b_{j,1}(is, D_{x_n}), \dots, b_{j,m}(is, D_{x_n}))$. Здесь $\{\omega_1(s, x_n), \dots, \omega_{\kappa}(s, x_n)\}$ — канонический базис краевой задачи (1.3), т. е. каждая вектор-функция $\omega_j(s, x_n)$ является решением (1.3) с единичным граничным вектором $\varphi = e_j$, j -я компонента которого равна единице.

3. Доказательство теоремы. Мы будем использовать схему рассуждений, приведенную в [1], при доказательстве необходимости условий ортогональности для квазиэллиптических уравнений ($m = 1$). Для определенности будем считать, что $0 \in \text{supp } F$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что краевая задача (1.1) имеет решение $U(x) = (U^1(x), \dots, U^m(x))^T$, $U^r(x) \in W_p^l(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p \leq 2$, $r = 1, \dots, m$, хотя условия (1.4), (1.5) не выполнены. В силу [2] $D_x^\nu U^r(x) \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < |\nu| \leq l$. Следовательно, нужно показать: чтобы $D_x^\nu U^r(x)$, $|\nu| \leq 1$, была из $L_p(\mathbb{R}_+^n)$, при $l - 2 < n/p' \leq l - 1$ необходимы условия (1.4), (1.5).

На первом шаге предположим, что $D_x^\nu U^r(x) \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $|\nu| = 1$, причем $\nu = (\nu', 0)$, но хотя бы одно из условий (1.4) не выполнено. Для $\nu = (\nu', \nu_n)$ рассуждения аналогичные. В силу неравенства Хаусдорфа — Юнга для каждой компоненты вектор-функции $U^r(x)$ имеет место оценка

$$\| |(is)^{\nu'} \tilde{U}^r(s, x_n), L_{p'}(\mathbb{R}^{n-1}) \|, L_p(\mathbb{R}_+) \| \leq c \| D_{x'}^{\nu'} U^r(x', x_n), L_p(\mathbb{R}_+^n) \|, \quad (3.1)$$

где $\tilde{U}^r(s, x_n)$ — частичное преобразование Фурье по x' функции $U^r(x', x_n)$, $1/p + 1/p' = 1$. Вектор-функция $\tilde{U}(s, x_n)$ является решением краевой задачи (2.1), следовательно, для нее имеет место представление (2.3).

Введем обозначение

$$W_j(s, y_n) = -B_j(is, D_{x_n}) \tilde{L}(is, D_{x_n}) J_-(s, x_n - y_n)|_{x_n=0}.$$

Перепишем $\tilde{U}(s, x_n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(s, x_n) = & \int_0^{x_n} \tilde{L}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n - y_n) \tilde{F}(s, y_n) dy_n \\ & + \int_{x_n}^{\infty} \tilde{L}(is, D_{x_n}) J_-(s, x_n - y_n) \tilde{F}(s, y_n) dy_n \\ & + \sum_{j=1}^{\kappa} \int_0^{\infty} W_j(s, y_n) \tilde{F}(s, y_n) dy_n \omega_j(s, x_n) + \sum_{j=1}^{\kappa} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор-функцию $\tilde{U}(s, x_n)$ при $x_n \geq a = \text{diam}(\text{supp } F)$. В случае $x_n \geq a$ вектор-функция $F(x) = 0$ и вектор-функцию $\tilde{U}(s, x_n)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{U}(s, x_n) = \int_0^\infty \left(\tilde{L}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n - y_n) + \sum_{j=1}^\infty W_j(s, y_n) \omega_j(s, x_n) \right) \tilde{F}(s, y_n) dy_n \\ + \sum_{j=1}^\infty \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n). \end{aligned}$$

При $x_n > 0$, $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ определим матрицу

$$\Omega^1(s, x_n, y_n) = \tilde{L}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n - y_n) + \sum_{j=1}^\infty W_j(s, y_n) \omega_j(s, x_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{U}^r(s, x_n) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) \tilde{F}^k(s, y_n) dy_n + \sum_{j=1}^\infty \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n) \\ = \tilde{U}_0^r(s, x_n) + \sum_{j=1}^\infty \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n), \quad (3.2) \end{aligned}$$

где $\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n)$ — элементы матрицы $\Omega^1(s, x_n, y_n)$. Используя представление $\tilde{U}^r(s, x_n)$, в силу оценки (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left\| (is)^{\nu'} \tilde{U}_0^r(s, x_n) + \sum_{j=1}^\infty (is)^{\nu'} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\ \leq c \|D_x^{\nu'} U^r(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Оценка для $\tilde{U}_0^r(s, x_n)$ была проведена в работе [3], поэтому мы лишь схематично остановимся на этом слагаемом, отсылая за подробностями к указанной работе. Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0^r(s, x_n) = \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\ + \int_0^\infty \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) [\tilde{F}^k(s, y_n) - \tilde{F}^k(0, y_n)] dy_n \\ + \int_0^\infty \sum_{k=1}^m [\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) - \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0)] \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n; \\ \sum_{j=1}^\infty \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n) = \sum_{j \in J} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in Q'} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n) \\ = \sum_{j \in J} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in J} [\tilde{\Phi}^j(s) - \tilde{\Phi}^j(0)] \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in Q'} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j(s, x_n), \end{aligned}$$

где Q' — множество индексов q , $q = 1, \dots, \varkappa$, для которых $\beta_q l \leq l - 2$. Тогда в силу неравенства Минковского получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\| \sum_{k=1}^m (is)^{\nu'} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \right. \right. \\
& + \sum_{j \in J} (is)^{\nu'} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n) L_{p'}(|s| < 1) \left. \right\|, L_p(x_n > 2a) \left\| \leq c_1 \|D_{x'}^{\nu'} U^r(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \right. \\
& + \sum_{k=1}^m \left\| \left\| \int_0^\infty \Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) [\tilde{F}^k(s, y_n) - \tilde{F}^k(0, y_n)] dy_n, L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& + \sum_{k=1}^m \left\| \left\| \int_0^\infty [\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) - \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0)] \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n, L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& + \sum_{j \in J} \left\| \left\| [\tilde{\Phi}^j(s) - \tilde{\Phi}^j(0)] (is)^{\nu'} \omega_j^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& + \sum_{q \in Q'} \left\| \left\| \tilde{\Phi}^q(s) (is)^{\nu'} \omega_q^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& = c_1 \|D_{x'}^{\nu'} U^r(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| + \sum_{k=1}^m I_k^1 + \sum_{k=1}^m I_k^2 + \sum_{j \in J} I_j^3 + \sum_{q \in Q'} I_q^4.
\end{aligned}$$

Проведем оценку всех слагаемых отдельно.

В силу условий 1–4, повторяя рассуждения из доказательства леммы 4.2 [10, гл. 4], получим при $x_n > 0$ следующую оценку:

$$|\omega_j^r(s, x_n)| \leq c |s|^{-\beta_j l} e^{-\delta |s| x_n}, \quad j = 1, \dots, \varkappa, \quad r = 1, \dots, m,$$

где $c, \delta > 0$ — константы.

Пользуясь этой оценкой, неравенством Минковского и равенством

$$\tilde{\Phi}^j(s) - \tilde{\Phi}^j(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 s_i D_{\tau_i} \tilde{\Phi}^j(\tau) |_{\tau=\zeta s} d\zeta,$$

получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} I_j^3 + \sum_{j \in Q'} I_q^4 & \leq c_1(\Phi) \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \left\| |s|^{-\beta_j l+2} e^{-\delta |s| x_n}, L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& + c_2(\Phi) \sum_{q \in Q'} \left\| \left\| |s|^{-\beta_q l+1} e^{-\delta |s| x_n}, L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\|.
\end{aligned}$$

Определим области $G_k = \{s \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 2^{-k-1} < |s| < 2^{-k}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Следуя схеме рассуждений из доказательства теоремы 10 [1], будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} I_j^3 + \sum_{q \in Q'} I_q^4 & \leq c_1(\Phi) \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k \geq 0} \left\| \left\| |s|^{-\beta_j l+2} e^{-\delta |s| x_n}, L_{p'}(G_k) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& + c_2(\Phi) \sum_{q \in Q'} \sum_{k \geq 0} \left\| \left\| |s|^{-\beta_q l+1} e^{-\delta |s| x_n}, L_{p'}(G_k) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \\
& \leq c_3(\Phi) \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k \geq 0} 2^{-k(n/p'+1-\beta_j l)} + c_4(\Phi) \sum_{q \in Q'} \sum_{k \geq 0} 2^{-k(n/p'-\beta_q l)}.
\end{aligned}$$

Поскольку для $j \in J$ имеем $\beta_j l = l - 1$, а для $q \in Q'$ выполнено $\beta_q l \leq l - 2$, то, учитывая условие теоремы $n/p' > l - 2$, получим $n/p' + 1 - \beta_j l > 0$, $n/p' - \beta_q l > 0$. Следовательно, $\sum_{j \in J} I_j^3 + \sum_{q \in Q'} I_q^4 \leq c_5(\Phi)$.

Используя неравенства

$$|\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n)| \leq c|s|^{(1-l)}e^{-\delta/2|s|x_n}, \quad |D_{y_n}\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n)| \leq c|s|^{(2-l)}e^{-\delta/2|s|x_n},$$

справедливые для функции $\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n)$ при $x_n > 2y_n > 0$, и рассуждая аналогично, нетрудно доказать оценки для I_j^1, I_j^2 :

$$\sum_{k=1}^m I_k^1 + \sum_{k=1}^m I_k^2 \leq c_6(F).$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^m (is)^{\nu'} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_{\mathbb{R}_+^n} F^k(y) dy \right. \\ & \left. + \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' (is)^{\nu'} \omega_j^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \leq c_7. \end{aligned}$$

Из определения матрицы $\Omega^1(s, x_n, 0)$ следует, что она является решением краевой задачи при $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} L(is, D_{x_n})\Omega^1 &= 0, \quad x_n > 0, \\ B(is, D_{x_n})\Omega^1|_{x_n=0} &= \Psi^1, \quad \sup_{x_n > 0} \|\Omega^1\| < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку для краевой задачи выполнено условие Лопатинского, то столбцы матрицы $\Omega^1(s, x_n, 0)$ представимы в виде

$$\Omega_k^1(s, x_n, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_{j,k}^1 \omega_j(s, x_n), \quad (3.3)$$

где $\Psi_{j,k}^1$ — элементы матрицы Ψ^1 .

Введем обозначение

$$\begin{aligned} V_r^1(a, \varepsilon) &= \left\| \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' (is)^{\nu'} \omega_j^r(s, x_n) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m (is)^{\nu'} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_{\mathbb{R}_+^n} F^k(y) dy, L_{p'}(|s| < \varepsilon) \right\|, L_p(x_n > 2a), \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$0 < \varepsilon < 1, \quad r = 1, \dots, m.$$

Используя представление функции $\Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0)$, условия 1–4 из п. 1, имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) &= \sum_{j=1}^{\infty} c^{\beta_j l} \Psi_{j,k}^1 \omega_j^r(cs, c^{-1}x_n) \\ &= \sum_{j \in J} c^{\beta_j l} \Psi_{j,k}^1 \omega_j^r(cs, c^{-1}x_n) = c^{l-1} \Omega_{r,k}^1(cs, c^{-1}x_n, 0), \end{aligned}$$

$$\sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j^r(s, x_n) = c^{l-1} \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j^r(cs, c^{-1}x_n).$$

Отсюда следуют равенства $V_r^1(ca, c^{-1}\varepsilon) = c^{(l-1-n/p')} V_r^1(a, \varepsilon)$, $r = 1, \dots, m$.

Докажем, что найдется $V_j^1(a, \varepsilon) > 0$. Предположим противное, пусть все $V_r^1(a, \varepsilon) = 0$, $r = 1, \dots, m$. Учитывая определение $V_r^1(a, \varepsilon)$, в силу неотрицательности подынтегрального выражения эти условия эквивалентны:

$$\sum_{k=1}^m \Omega_k^1(s, x_n, 0) \int_{\mathbb{R}_+^n} F^k(y) dy + \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) \equiv 0,$$

$$x_n > 2a, \quad 0 < |s| < \varepsilon,$$

где $\Omega_k^1(s, x_n, 0)$ — k -й столбец матрицы $\Omega^1(s, x_n, 0)$. Это тождество можно переписать следующим образом, используя представление для $\Omega_k^1(s, x_n, 0)$:

$$\sum_{j \in J} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' + \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 \int_{\mathbb{R}_+^n} F^k(y) dy \right) \omega_j(s, x_n) \equiv 0,$$

$$x_n > 2a, \quad 0 < |s| < \varepsilon.$$

Вспоминая, что $\omega_j(s, x_n)$, $j = 1, \dots, \varkappa$, — канонический базис краевой задачи (1.3), получим

$$\sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 \int_{\mathbb{R}_+^n} F^k(y) dy + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' = 0, \quad j \in J.$$

Но в силу предположения хотя бы одно из условий (1.4) не имеет места. Получили противоречие. Таким образом, существует $V_j^1(a, \varepsilon) > 0$. Выбирая $c > 1$, учитывая, что $n/p' \leq l-1$, получим $\frac{V_j^1(ca, c^{-1}\varepsilon)}{V_j^1(a, \varepsilon)} \geq 1$. С другой стороны, поскольку $0 < V_j^1(a, \varepsilon) \leq c_2 < \infty$, то из определения (3.4) вытекает $\lim_{c \rightarrow \infty} V_j^1(ca, c^{-1}\varepsilon) = 0$. Отсюда получаем противоречие.

На втором шаге предположим, что краевая задача (1.1) имеет решение $U(x) = (U^1(x), U^2(x), \dots, U^m(x))^T$, $U^r(x) \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p \leq 2$, $l-2 < n/p' \leq l-1$, но хотя бы одно из условий (1.5) не выполняется.

В силу неравенства Хаусдорфа — Юнга для каждой компоненты вектор-функции $U^r(x)$ имеет место оценка

$$\| \tilde{U}^r(s, x_n), L_{p'}(\mathbb{R}^{n-1}) \|, L_p(\mathbb{R}_+) \| \leq c \| U^r(x), L_p(\mathbb{R}_+^n) \|, \quad 1/p + 1/p' = 1. \quad (3.5)$$

Обозначим через Q'' множество индексов q , $q = 1, \dots, \varkappa$, для которых $\beta_q l < l-2$.

Воспользуемся равенством (3.2) и представим его в более удобном виде:

$$\tilde{U}^r(s, x_n) = \sum_{k=1}^m \int_0^\infty \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n +$$

$$\sum_{j \in J} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n) + \tilde{U}_1^r(s, x_n) + \tilde{U}_2^r(s, x_n),$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^r(s, x_n) &= \sum_{k=1}^m \int_0^\infty \Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) [\tilde{F}^k(s, y_n) - \tilde{F}^k(0, y_n)] dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \int_0^\infty [\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) - \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0)] \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^\infty \Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^1 s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) |_{\tau=\lambda s} d\lambda dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \int_0^\infty \int_0^1 D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) |_{\tilde{y}_n=\lambda y_n} d\lambda y_n \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^\infty [\Omega_{r,k}^1(s, x_n, y_n) - \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0)] \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^1 s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) |_{\tau=\lambda s} d\lambda dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \sum_{\rho,j=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 s_\rho s_j D_{\tau_\rho \tau_j}^2 \tilde{F}^k(\tau, y_n) |_{\tau=\lambda_1 \lambda_2 s} \lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_1 dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) |_{\tau=0} dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 D_{\tilde{y}_n}^2 \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) |_{\tilde{y}_n=\lambda_1 \lambda_2 y_n} \lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_1 y_n^2 \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) |_{\tilde{y}_n=0} \int_0^\infty y_n \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
&= \tilde{U}_3^r(s, x_n) + \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) |_{\tau=0} dy_n \\
&\quad + \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) |_{\tilde{y}_n=0} \int_0^\infty y_n \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n; \\
\tilde{U}_2^r(s, x_n) &= \sum_{j \in \{J, Q\}} [\tilde{\Phi}^j(s) - \tilde{\Phi}^j(0)] \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n) \\
&\quad + \sum_{j \in Q''} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n) = \sum_{j \in \{J, Q\}} \sum_{\rho=1}^{n-1} \int_0^1 s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) |_{\tau=\lambda s} d\lambda \omega_j^r(s, x_n) \\
&\quad + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q''} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n) \\
&= \sum_{j \in Q} \sum_{\rho=1}^{n-1} \int_0^1 s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) |_{\tau=\lambda s} d\lambda \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q''} \tilde{\Phi}^j(s) \omega_j^r(s, x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j \in J} \sum_{\rho, b=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 s_\rho s_b D_{\tau_\rho \tau_b}^2 \tilde{\Phi}^j(\tau) \big|_{\tau=\lambda_1 \lambda_2 s} \lambda_1 d\lambda_1 d\lambda_2 \omega_j^r(s, x_n) \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) \big|_{\tau=0} \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n) \\
& = \tilde{U}_4^r(s, x_n) + \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) \big|_{\tau=0} \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n).
\end{aligned}$$

Поскольку мы доказали, что условие (1.4) является необходимым для того, чтобы $D_{x_j} U(x) \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$ при $l-2 < n/p' \leq l-1$, $j = 1, \dots, n$, следовательно,

$$\begin{aligned}
\tilde{U}^r(s, x_n) &= \tilde{U}_1^r(s, x_n) + \tilde{U}_2^r(s, x_n) = \tilde{U}_3^r(s, x_n) + \tilde{U}_4^r(s, x_n) \\
&+ \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) \big|_{\tau=0} dy_n \\
&+ \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) \big|_{\tilde{y}_n=0} \int_0^\infty y_n \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
&+ \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) \big|_{\tau=0} \omega_j^r(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n).
\end{aligned}$$

В силу неравенства Минковского, учитывая (3.5), пользуясь аналогичными рассуждениями как при оценке слагаемого $\tilde{U}_0^r(s, x_n)$ из (3.2), можно получить

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\| \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} s_j D_{\tau_j} \tilde{F}^k(\tau, y_n) \big|_{\tau=0} dy_n \right. \right. \\
& + \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n) \big|_{\tilde{y}_n=0} \int_0^\infty y_n \tilde{F}^k(0, y_n) dy_n \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{\tau_\rho} \tilde{\Phi}^j(\tau) \big|_{\tau=0} \omega_j^r(s, x_n) \\
& \left. \left. + \sum_{j \in Q} \tilde{\Phi}^j(0) \omega_j^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < 1) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\| \leq c.
\end{aligned}$$

Из определения матрицы $D_{y_n} \Omega^1(s, x_n, y_n) \big|_{y_n=0}$ следует, что она является решением краевой задачи при $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
L(is, D_{x_n})\Omega &= 0, \quad x_n > 0, \\
B(is, D_{x_n})\Omega \big|_{x_n=0} &= -i\Psi^2(s), \quad \sup_{x_n>0} \|\Omega\| < \infty,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
-i\Psi^2(s) &= B(is, D_{x_n})D_{y_n}\Omega^1(s, x_n, y_n)|_{x_n, y_n=0} \\
&= B(is, D_{x_n})D_{y_n}\tilde{L}(is, D_{x_n})J_+(s, x_n - y_n)|_{x_n, y_n=0} \\
&- \sum_{j=1}^{\infty} B(is, D_{x_n})\omega^j(s, x_n)|_{x_n=0}D_{y_n}B_j(is, D_{z_n})\tilde{L}(is, D_{z_n})J_-(s, z_n - y_n)|_{z_n, y_n=0} \\
&= -B(is, D_{x_n})D_{x_n}\tilde{L}(is, D_{x_n})J_+(s, x_n)|_{x_n=0} \\
&\quad + D_{x_n}B(is, D_{x_n})\tilde{L}(is, D_{x_n})J_-(s, x_n)|_{x_n=0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(s)} \zeta B(is, i\zeta)L^{-1}(is, i\zeta) d\zeta, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(s)$ — контур, охватывающий все корни уравнения (1.2).

Учитывая однородность матриц $B(is, i\zeta)$, $L^{-1}(is, i\zeta)$, получим $\Psi_{jk}^2(cs) = c^{\beta_j l - (l-2)} \Psi_{jk}^2(s)$. Возможны разные варианты. Если $\beta_j l = l - 1$, тогда функция $\Psi_{jk}^2(s)$ однородная первой степени, т. е. $\Psi_{jk}^2(cs) = c\Psi_{jk}^2(s)$.

В предположении, что существуют $D_{s_\rho}\Psi_{jk}^2(s)$, по теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$\Psi_{jk}^2(s) = \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{s_\rho} \Psi_{jk}^2(s), \quad j \in J,$$

где $D_{s_\rho}\Psi_{jk}^2(s)$ — однородная функция нулевой степени. Будем предполагать, что функция $\Psi_{jk}^3(s) = D_{s_\rho}\Psi_{jk}^2(s) = \text{const}$. Если $\beta_j l = l - 2$, тогда функция $\Psi_{jk}^2(s)$ однородная нулевой степени, т. е. $\Psi_{jk}^2(cs) = \Psi_{jk}^2(s)$. Будем предполагать, что в этом случае функция $\Psi_{jk}^2(cs) = \Psi_{jk}^2(s) = \text{const}$. Если $\beta_j l < l - 2$, то из определения функции $\Psi_{jk}^2(s) = 0$.

Поскольку для краевой задачи (3.6) выполнено условие Лопатинского, то решение краевой задачи единственно и столбцы матрицы $D_{y_n}\Omega^1(s, x_n, y_n)|_{y_n=0}$ представимы в виде

$$D_{y_n}\Omega_k^1(s, x_n, y_n)|_{y_n=0} = -i \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_{j,k}^2(s)\omega_j(s, x_n), \quad (3.7)$$

где $\Psi_{j,k}^2$ — элементы матрицы Ψ^2 .

Введем обозначение

$$\begin{aligned}
V_r^2(a, \varepsilon) &= \left\| \left\| -i \sum_{k=1}^m \Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) \sum_{j=1}^{n-1} s_j \int_{\mathbb{R}_+^n} y_j F^k(y) dy \right. \right. \\
&+ \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_{r,k}^1(s, x_n, \tilde{y}_n)|_{\tilde{y}_n=0} \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy - i \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \omega_j^r(s, x_n) \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j \in Q_{\mathbb{R}^{n-1}}} \int \Phi^j(y') dy' \omega_j^r(s, x_n), L_{p'}(|s| < \varepsilon) \right\|, L_p(x_n > 2a) \right\|, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $r = 1, \dots, m$.

Учитывая представления (3.3), (3.7) для столбцов матриц $\Omega_k^1(s, x_n, 0)$, $D_{y_n} \Omega_k^1(s, x_n, y_n)|_{y_n=0}$, а также вид $\omega_j(s, x_n)$, будем иметь

$$\begin{aligned}\Omega_{r,k}^1(s, x_n, 0) &= c^{l-1} \Omega_{r,k}^1(cs, c^{-1}x_n, 0), \\ D_{y_n} \Omega_k^1(s, x_n, y_n)|_{y_n=0} &= c^{l-2} D_{y_n} \Omega_k^1(cs, c^{-1}x_n, y_n)|_{y_n=0}.\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства $V_r^2(ca, c^{-1}\varepsilon) = c^{l-1-n/p'} V_r^2(a, \varepsilon)$, $r = 1, \dots, m$.

Докажем, что найдется $V_k^2(a, \varepsilon) > 0$. Предположим противное, пусть все $V_r^2(a, \varepsilon) = 0$, $r = 1, \dots, m$. Учитывая определение $V_r^2(a, \varepsilon)$, в силу неотрицательности подынтегрального выражения эти условия эквивалентны:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \Omega_k^1(s, x_n, 0) &\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j \int_{\mathbb{R}_+^n} (-i) y_j F^k(y) dy \right) \\ &+ \sum_{k=1}^m D_{\tilde{y}_n} \Omega_k^1(s, x_n, \tilde{y}_n)|_{\tilde{y}_n=0} \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy \\ &- i \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) \equiv 0\end{aligned}$$

при $x_n > 2a$, $0 < |s| < \varepsilon$. Это тождество можно переписать следующим образом, используя представления для $\Omega_k^1(s, x_n, 0)$, $D_{y_n} \Omega_k^1(s, x_n, y_n)|_{y_n=0}$:

$$\begin{aligned}-i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 &\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}_+^n} y_\rho F^k(y) dy \right) \omega_j(s, x_n) \\ &- i \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy \omega_j(s, x_n) \\ &- i \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) \equiv 0,\end{aligned}$$

$$x_n > 2a, \quad 0 < |s| < \varepsilon.$$

Учитывая представления однородной функции $\Psi_{j,k}^2(s)$, можем записать

$$\begin{aligned}-i \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 &\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}_+^n} y_\rho F^k(y) dy \right) \omega_j(s, x_n) \\ &- i \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^m \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{s_\rho} \Psi_{j,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy \omega_j(s, x_n) \\ &- i \sum_{j \in Q} \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy \omega_j(s, x_n)\end{aligned}$$

$$-i \sum_{j \in J} \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) + \sum_{j \in Q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^j(y') dy' \omega_j(s, x_n) \equiv 0,$$

$$x_n > 2a, \quad 0 < |s| < \varepsilon.$$

Учитывая, что $\omega_j(s, x_n)$, $j = 1, \dots, \mathcal{K}$, — канонический базис краевой задачи (2.3), получим

$$\begin{aligned} & -i \sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 \left(\sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}_+^n} y_\rho F^k(y) dy \right) \\ & -i \sum_{k=1}^m \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho D_{s_\rho} \Psi_{j,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy - i \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \equiv 0, \quad j \in J, \\ & -i \sum_{k=1}^m \Psi_{q,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^q(y') dy' \equiv 0, \quad q \in Q. \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \left(\sum_{k=1}^m \Psi_{j,k}^1 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_\rho F^k(y) dy \right) \\ & + \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \left(\sum_{k=1}^m D_{s_\rho} \Psi_{j,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy \right) + \sum_{\rho=1}^{n-1} s_\rho \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} y_\rho \Phi^j(y') dy' \right) \equiv 0, \quad j \in J, \\ & -i \sum_{k=1}^m \Psi_{q,k}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n F^k(y) dy + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^q(y') dy' \equiv 0, \quad q \in Q. \end{aligned}$$

Следовательно, выполнены равенства (1.5).

Но в силу предположения хотя бы одно из условий (1.5) не имеет места. Противоречие. Таким образом, существует $V_j^2(a, \varepsilon) > 0$. Выбирая $c > 1$, учитывая, что $n/p' \leq l-1$, получим $\frac{V_j^2(ca, c^{-1}\varepsilon)}{V_j^2(a, \varepsilon)} \geq 1$. С другой стороны, поскольку $0 < V_j^2(a, \varepsilon) \leq c_2 < \infty$, из определения (3.8) вытекает $\lim_{c \rightarrow \infty} V_j^2(ca, c^{-1}\varepsilon) = 0$. Отсюда получаем противоречие.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
2. Demidenko G. V. On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in $\mathbb{R}_+^n$ // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, N 1. P. 1–11.
3. Бондарь Л. Н. Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 341–350.
4. Бондарь Л. Н. Необходимые условия разрешимости одного класса краевых задач для квазиэллиптических систем // Мат. труды. 2018. Т. 21, № 1. С. 3–16.

5. Бондарь Л. Н. Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических систем в весовых соболевских пространствах // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 3–17.
6. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 3. С. 373–416.
7. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
8. Янушаускас А. И. Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука, 1985.
9. Бондарь Л. Н. Условия разрешимости второй краевой задачи для системы Навье // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 3–14.
10. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

Поступила в редакцию 24 мая 2019 г.

После доработки 24 мая 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

*Бондарь Лина Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1
630090 г. Новосибирск
E-mail: b.lina@ngs.ru*