Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Dedok, A. L. Karchevsky, V. G. Romanov, A numerical method of determining permittivity from the modulus of the electric intensity vector of an electromagnetic field, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 48–58

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.305>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.87.193.239

April 26, 2023, 14:25:36

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО МОДУЛЮ ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ*)

В. А. Дедок, А. Л. Карчевский, В. Г. Романов

Для немагнитной непроводящей среды рассматривается система уравнений электродинамики. Для этой системы изучается задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости ε по модулю вектора электрической напряженности электромагнитного поля, являющегося результатом интерференции двух полей, вызванных точечными источниками стороннего тока. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость отлична от положительной постоянной ε_0 только внутри некоторой компактной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, а модуль вектора электрической напряженности поля задан для всех частот, начиная с некоторой фиксированной частоты ω_0 , на границе S некоторой области Ω , содержащей Ω_0 внутри себя. Показано, что эта информация позволяет свести исходную задачу к хорошо известной обратной кинематической задаче об определении коэффициента рефракции внутри Ω по временам пробега электромагнитной волны между точками границы этой области. Построен алгоритм численного решения обратной задачи, приведены тестовые расчеты на симулированных данных.

Ключевые слова: обратная безфазовая задача, уравнения Максвелла, численный алгоритм, обратная кинематическая задача.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.305

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon(x) \frac{\partial E}{\partial t} + j^0 \delta(x - y) \delta(t), \quad \operatorname{rot} E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с нулевыми начальными данными

$$(E, H)_{t=0} = 0. \quad (2)$$

В этой системе $\mu_0 > 0$ — постоянный коэффициент магнитной проницаемости, $\varepsilon(x)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости. Векторы $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ характеризуют напряженности электрического и магнитного полей соответственно, вектор j^0 определяет направление диполя, сосредоточенного в точке $y \in \mathbb{R}^3$. Будем предполагать, что коэффициент диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ является бесконечно дифференцируемой положительной функцией всюду в $\mathbb{R}^3$, совпадающей с заданной положительной постоянной ε_0 вне $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R_0, R_0 > 0\}$, а носитель разности $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$ содержится внутри Ω_0 . Обозначим через $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$ индекс рефракции в неоднородной среде и через $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ значение его в однородной среде. В дальнейшем предполагается также, что $n(x)$ удовлетворяет условиям

$$0 < n_0 \leq n(x) \leq n_1, \quad (3)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00120).

в которых n_0 и n_1 — заданные постоянные. Как следует из результатов [1], решение задачи (1), (2), т. е. совокупность функций $E(x, t, y)$, $H(x, t, y)$, экспоненциально быстро затухает по времени для каждого ограниченного множества пространственных переменных. Это позволяет рассматривать преобразование Фурье функций E и H :

$$\tilde{E}(x, \omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t, y) e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{H}(x, \omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, t, y) e^{i\omega t} dt. \quad (4)$$

При этом функции $\tilde{E}(x, \omega, y)$, $\tilde{H}(x, \omega, y)$ являются решением системы уравнений

$$\operatorname{rot} \tilde{H} = -i\omega \varepsilon(x) \tilde{E} + j^0 \delta(x - y), \quad \operatorname{rot} \tilde{E} = i\omega \mu_0 \tilde{H}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (5)$$

и удовлетворяют некоторым условиям излучения на бесконечности. Заметим, что функции $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ могут рассматриваться как решения стационарной системы (5), отвечающей периодическим по времени решениям $E(x, t, y) = \tilde{E} e^{i\omega t}$, $H(x, t, y) = \tilde{H} e^{i\omega t}$.

Ниже рассмотрим задачу об определении функции $\varepsilon(x)$ в области Ω_0 по заданному на некотором множестве модулю суммы двух векторов $\tilde{E}(x, \omega, y)$ и $\tilde{E}(x, \omega, z(y))$, где точка $z(y)$ выбирается по y специальным образом. Точную постановку этой задачи приведем позже.

Обратные задачи, в которых решение дифференциального уравнения является комплекснозначной функцией, а для отыскания коэффициентов этого уравнения задается в качестве информации только модуль решения некоторой прямой задачи, начали рассматриваться сравнительно недавно. Первые результаты об определении потенциала в уравнении Шрёдингера по модулю рассеянного поля были получены в работах [2–5], для обобщенного уравнения Гельмгольца в работах [5–11], для системы уравнений электродинамики, соответствующей периодическим по времени электромагнитным колебаниям, в работах [12–14]. Численный метод решения задачи об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности рассеянного электромагнитного поля разработан в [15].

Характерной особенностью рассмотренных в работах [2, 3, 6–9, 11, 12] безфазовых обратных задач является то, что искомый коэффициент предполагается известной постоянной вне некоторой заданной компактной области Ω с гладкой границей S и на S задается модуль рассеянного поля, инициированного либо точечными источниками, локализованными на S , либо плоскими волнами, падающими из бесконечности. Но измерять рассеянное поле часто довольно затруднительно, оказывается значительно проще измерить модуль полного поля. Такие постановки задач с заданием модуля полного поля для уравнений электродинамики рассмотрены в работах [13, 14]. При этом рассматриваются встречные пучки падающих волн и на S измеряется результат их интерференции.

В настоящей работе изучается постановка безфазовой обратной задачи для системы уравнений Максвелла (5), аналогичная [14], в которой инициирующие электромагнитные колебания волны вызваны точечными источниками, приложенными вне области Ω_0 .

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R, R > R_0\sqrt{2}\}$ и $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$. Обозначим через $S(y) = \{x \in S \mid -y \cdot x \geq R^2 - 2R_0^2\}$ ту часть сферы S , которая является теневой, если источник света поместить в точку y , а область Ω_0 считать непрозрачной для света. При условии $R > R_0\sqrt{2}$ множество $S(y)$ принадлежит полусфере $S^+(y) = \{x \in S \mid -y \cdot x > 0\}$. Примем, что вектор j^0 имеет единичную длину и ортогонален вектору y , т. е. $|j^0| = 1$, $j^0 \cdot y = 0$.

ЗАДАЧА. Пусть функция

$$f(x, \omega, y) = |\tilde{E}(x, \omega, y) + \tilde{E}(x, \omega, z(y))|^2 \quad (6)$$

задана для всех $y \in S$, $x \in S(y)$, $\omega \geq \omega_0 > 0$ и $z(y) = -yl$, где $l > l^* = \max \{R^2/(R^2 - 2R_0^2), 1 + 2n_1/n_0\}$. Требуется по функции $f(x, \omega, y)$ найти ε внутри Ω_0 (см. рис. 1).

В формулировке задачи ω_0 — некоторая фиксированная частота.

Рис. 1. Теневая область $S(y)$ и определяемое в области Ω_0 включение

Таким образом, в постановке задачи предполагается, что задан квадрат модуля электрической напряженности электромагнитного поля, возникающего как результат интерференции двух волн, инициированных диполями одинаковой ориентации, помещенными в точках y и $z(y) = -yl$. При выполнении условия $l \geq R^2/(R^2 - 2R_0^2)$ множество $S(y)$ принадлежит части сферы S , освещенной источником света, помещенным в точку $z(y)$. Смысл второго из ограничений на l будет объяснен в п. 4.

2. Векторный потенциал, его структура. Введем векторный потенциал $A(x, t, y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} H(x, t, y) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} A(x, t, y), \\ E(x, t, y) &= -A_t(x, t, y) + \int_{-\infty}^t \nabla(n^{-2}(x) \operatorname{div} A(x, \tau, y)) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $n(x) = \sqrt{\mu_0 \varepsilon(x)}$. Уравнения (1) выполняются, если $A(x, t, y)$ является решением следующей задачи Коши:

$$n^2(x) A_{tt} - \Delta A + (\operatorname{div} A) \nabla \ln n^2(x) = \mu_0 j^0 \delta(t) \delta(x - y), \quad A|_{t < 0} = 0. \quad (8)$$

В однородной среде (когда $n(x) \equiv n_0$) решение этой задачи имеет вид

$$A^0(x, t, y) = a^0(x, y) \delta(t - \tau_0(x, y)), \quad (9)$$

в котором

$$\tau_0(x, y) = n_0 |x - y|, \quad a^0(x, y) = \frac{n_0 \mu_0 j^0}{4\pi \tau_0(x, y)}. \quad (10)$$

Структура фундаментального решения для уравнений, главная часть которых представляет собой волновой оператор $n^2(x) \partial_t^2 - \Delta$, хорошо изучена (см., например, [16]) при условии, что риманова метрика $d\tau = n(x) |dx|$, где $|dx| = \left(\sum_{i=1}^3 dx_i^2 \right)^{1/2}$ является простой в $\mathbb{R}^3$, т. е. когда каждая пара точек x и y

из $\mathbb{R}^3$ может быть соединена ровно одной геодезической $\Gamma(x, y)$. Мы примем здесь это условие.

Обозначим через $\tau(x, y)$ риманову длину геодезической $\Gamma(x, y)$. Как известно, функция $\tau(x, y)$ является решением уравнения эйконала

$$|\nabla_x \tau(x, y)|^2 = n^2(x). \quad (11)$$

Из известных результатов следует (см. [1, 16]), что решение задачи (8) представимо в виде

$$A(x, t, y) = \alpha(x, y)\delta(t - \tau(x, y)) + B(x, t, y)(t - \tau(x, y))\theta_0(t - \tau(x, y)), \quad (12)$$

где $B(x, t, y)$ — непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, экспоненциально убывающая вместе с производными по x, t до второго порядка при $t \rightarrow +\infty$, функция $\alpha(x, y)$ удовлетворяет некоторому уравнению первого порядка, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда. Это уравнение получается в результате подстановки представления (12) в уравнение (8), использования равенства (11) и приравнивания к нулю коэффициента при $\delta'(t - \tau(x, y))$. Искомое уравнение имеет вид

$$2(\nabla \tau(x, y) \cdot \nabla) \alpha + \alpha \Delta \tau(x, y) - (\alpha \cdot \nabla \tau(x, y)) \nabla \ln n^2(x) = 0. \quad (13)$$

К этому уравнению необходимо добавить данные при $x \rightarrow y$. Так как точка $y \in S$ лежит в однородной среде, то решение задачи (8) в шаре $|x - y| \leq R - R_0$ должно совпадать с вычисляемым по формуле (9). Поэтому

$$\alpha(x, y)|_{x \rightarrow y} \sim \frac{n_0 \mu_0 j^0}{4\pi \tau_0(x, y)}. \quad (14)$$

Уравнение (13) представляет собой векторное обыкновенное дифференциальное уравнение вдоль геодезической $\Gamma(x, y)$. Решение задачи (13), (14) может быть представлено в явном виде через якобиан перехода от римановых координат точки x к декартовым и матричную экспоненту (см., например, [14]). Однако для численного расчета функции $\alpha(x, y)$ лучше использовать уравнение (13) (см. п. 5).

3. Высокочастотная асимптотика данных обратной задачи.

Вычислим структуру функции $E(x, t, y)$. Используя формулы (7) и (12), находим, что

$$E(x, t, y) = -\alpha_{\perp}(x, y)\delta'(t - \tau(x, y)) + b(x, y)\delta(t - \tau(x, y)) + C(x, t, y)\theta_0(t - \tau(x, y)). \quad (15)$$

Здесь $\alpha_{\perp}(x, y) = \alpha(x, y) - n^{-2}(x)(\alpha(x, y) \cdot \nabla \tau(x, y)) \nabla \tau(x, y)$ — проекция вектора $\alpha(x, y)$ на плоскость, ортогональную вектору $\nabla \tau(x, y)$; $b(x, y)$ — гладкая ограниченная функция; $C(x, t, y)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, экспоненциально убывающая при $t \rightarrow +\infty$.

Найдем асимптотику функции $\tilde{E}(x, \omega, y)$ при $\omega \rightarrow +\infty$. Из формулы (15) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, \omega, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-\alpha_{\perp}(x, y)\delta'(t - \tau(x, y)) + b(x, y)\delta(t - \tau(x, y)) \\ &\quad + C(x, t, y)\theta_0(t - \tau(x, y))] e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{i\omega \tau(x, y)}}{\sqrt{2\pi}} \left[i\omega \alpha_{\perp}(x, y) + b(x, y) + \int_0^{\infty} C(x, t + \tau(x, y), y) e^{i\omega t} dt \right] \\ &= i\omega \frac{e^{i\omega \tau(x, y)}}{\sqrt{2\pi}} [\alpha_{\perp}(x, y) + O(1/\omega)]. \quad (16) \end{aligned}$$

Аналогичная асимптотическая формула справедлива и для однородной среды:

$$\tilde{E}^0(x, \omega, y) = i\omega \frac{e^{i\omega\tau_0(x, y)}}{\sqrt{2\pi}} [\alpha_\perp^0(x, y) + O(1/\omega)], \quad \omega \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

Здесь $\alpha_\perp^0(x, y) = a^0(x, y)j_\perp^0(x, y)$, функция $a^0(x, y)$ определена формулой (10), $j_\perp^0(x, y)$ — проекция вектора j^0 на плоскость, ортогональную вектору $\nabla\tau(x, y)$.

Заметим, что $\tilde{E}(x, \omega, z(y)) = \tilde{E}^0(x, \omega, z(y))$ для $x \in S(y)$, если $z(y) = -yl$ и $l \geq l^*$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x, \omega, y) &= |\tilde{E}(x, \omega, y) + \tilde{E}(x, \omega, z(y))|^2 = \frac{\omega^2}{2\pi} [|\alpha_\perp(x, y)|^2 + |\alpha_\perp^0(x, z(y))|^2 \\ &+ 2\alpha_\perp(x, y) \cdot \alpha_\perp^0(x, z(y)) \cos[\omega(\tau_0(x, z(y)) - \tau(x, y))] + O(1/\omega)], \quad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

4. Сведение исходной задачи к обратной кинематической задаче. Так как из условий (3) следует, что

$$\min_{x \in S(y)} \tau_0(x, z(y)) = n_0 R(l - 1), \quad \max_{x \in S(y)} \tau(x, y) \leq 2Rn_1,$$

то

$$\eta(x, y) = \tau_0(x, z(y)) - \tau(x, y) \geq n_0 R(l - 1) - 2Rn_1 > 0,$$

если $l > 1 + 2n_1/n_0$. Таким образом, $\eta(x, y) > 0$ при выполнении условия $l > l^*$. Зафиксируем в (18) $y \in S$ и $x \in S(y)$. Тогда функция $f(x, \omega, y)/\omega^2$ является функцией только одной переменной ω и почти периодической функцией этой переменной. Так как $j^0 \cdot y = 0$, то и $j^0 \cdot z(y) = 0$, откуда следует, что $|\alpha_\perp^0(x, z(y))| \neq 0$ для $x \in S(y)$. Из формул (13), (14) следует, что аналогичным свойством обладает и вектор $\alpha_\perp(x, y)$, если градиент функции $\varepsilon(x)$ мал. При этом выполняется и условие $\alpha_\perp^0(x, z(y)) \cdot \alpha_\perp(x, y) \neq 0$. Заметим, что выполнение этого условия легко проверяется по данным задачи: если оно не выполнено, то в правой части равенства (18) отсутствует член с косинусом и $f(x, \omega, y)/\omega^2$ стремится к некоторой постоянной при $\omega \rightarrow +\infty$. В последнем случае достаточно сместить точку $z(y)$, чтобы добиться выполнения нужного условия.

Так как частота ω не ограничена сверху, то из равенства (18) можно однозначно найти число $\eta(x, y)$. Поэтому однозначно находится и $\tau(x, y) = \tau_0(x, y) - \eta(x, y)$ для всех $y \in S$ и $x \in S(y)$. Заметим, что $\tau(x, y) = n_0|x - y|$ для $x \in S \setminus S(y)$. Поэтому функция $\tau(x, y)$ оказывается известной для всех $y \in S$ и $x \in S$. В итоге мы приходим к хорошо известной геометрической задаче: найти $n(x)$ внутри Ω по заданным римановым расстояниям $\tau(x, y)$ между любыми точками $y \in S$ и $x \in S$. Физическая трактовка этой задачи следующая: требуется найти коэффициент рефракции $n(x)$ в области Ω по заданным временам пробега электромагнитной волны между любой парой точек x и y границы этой области. Эта задача носит название обратной кинематической задачи.

В предположении о простоте римановой метрики, сделанном выше, теорема единственности и оценка условной устойчивости решения обратной кинематической задачи получены в работах [17–20]. Отсюда вытекает единственность решения поставленной выше задачи об определении коэффициента $\varepsilon(x)$ внутри Ω_0 по заданной функции $f(x, \omega, y)$. Некоторые численные методы решения обратной кинематической задачи приведены в работах [21, 22].

5. Численный алгоритм решения прямой задачи. Положим $\nabla\tau(x, y) = p(x, y)$. Тогда уравнения геодезических линий, а также уравнения для функ-

ций $\tau(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{p}{n^2(x)}, \quad \frac{dp}{ds} = \nabla \ln n(x), \quad \frac{d\tau}{ds} = 1, \\ \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\Delta\tau(x, y)}{2n^2(x)}\alpha + \frac{1}{2}(\alpha \cdot p)\nabla n^{-2}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Начальные данные для них имеют вид

$$x|_{s=0} = y, \quad p|_{s=0} = n_0\nu(\theta, \varphi), \quad \tau|_{s=0} = 0, \quad \alpha \sim \frac{n_0\mu_0 j^0}{4\pi s} \quad \text{при } s \rightarrow +0. \quad (20)$$

Здесь $\nu(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \equiv (n_1, n_2, n_3)$.

Из соотношений (19), (20) следует, что $s = \tau(x, y)$.

Так как уравнение для функции $\alpha(x, y)$ содержит $\Delta\tau(x, y)$, присоединим к уравнениям (19) уравнения для вторых производных $\tau(x, y)$. Введем

$$Q_{km} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_k \partial x_m}, \quad N_{km} = \frac{1}{2}n^{-2}(n^2)_{x_k x_m}, \quad \mathcal{V}_{km} = \nu_k^0 \nu_m^0$$

и квадратные 3×3 матрицы Q , N , $\mathcal{V}$, составленные из соответствующих компонент. Тогда соотношения для вычисления матрицы Q можно записать в виде (см. [15])

$$\frac{d}{ds}Q = -\frac{1}{n^2}Q^2 + N, \quad Q \sim \frac{n_0^2}{s}(I - \mathcal{V}) \quad \text{при } s \rightarrow +0, \quad (21)$$

в котором I — единичная матрица.

Соотношения для определения функции $\alpha(x, y)$ примут вид

$$\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\text{tr } Q}{2n^2(x)}\alpha + \frac{1}{2}(\alpha \cdot p)\nabla n^{-2}(x) = 0, \quad \alpha \sim \frac{n_0\mu_0 j^0}{4\pi s} \quad \text{при } s \rightarrow +0. \quad (22)$$

Здесь $\text{tr } Q$ — след матрицы Q .

Выписанная выше система соотношений не совсем удобна для численного решения из-за вида начальных условий для функций α и Q . Воспользуемся тем, что в шаре $|x - y| \leq R - R_0$ функция $n(x, y)$ является постоянной, поэтому решение этой системы может быть найдено в явном виде:

$$x = y + \nu s/n_0, \quad p = n_0\nu, \quad \alpha = \frac{n_0\mu_0 j^0}{4\pi s}, \quad Q = \frac{n_0^2}{s}(I - \mathcal{V}), \quad s \in [0, s_0].$$

Здесь $s_0 = n_0(R - R_0)$. Для продолжения решения при $s > s_0$ получаем следующую систему уравнений с данными Коши при $s = s_0$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= p/n^2, \quad x|_{s=s_0} = y + \nu s_0/n_0, \\ \frac{dp}{ds} &= \nabla \ln n, \quad p|_{s=s_0} = n_0\nu, \\ \frac{d}{ds}Q &= -\frac{1}{n^2}Q^2 + N, \quad Q|_{s=s_0} = \frac{n_0^2}{s_0}(I - \mathcal{V}), \\ \frac{d\alpha}{ds} &= -\frac{\text{tr } Q}{2n^2}\alpha - \frac{1}{2}(\alpha \cdot p)\nabla n^{-2}(x), \quad \alpha|_{s=s_0} = \frac{n_0\mu_0 j^0}{4\pi s_0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Решая задачу Коши (23) для всевозможных $\nu(\theta, \varphi)$, построим семейство геодезических, выходящих из точки $y \in S$. Таким образом, при фиксированном $y \in S$

находится взаимно однозначное соответствие между точками x и параметрами s, θ, φ . Следовательно, находятся $\alpha(x, y), \tau(x, y)$ как функции переменных x, y .

Для численного решения системы (23) использовался метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Так как, вообще говоря, для конкретной пары точек $\{x, y\}$ вектор $\nu(\theta, \varphi)$ заранее не известен, то задача его вычисления решалась при помощи минимизации некоторого функционала невязки. С учетом того, что вектор $\nu(\theta, \varphi)$ имеет единичную длину и, следовательно, $\nu_3 = \sqrt{1 - \nu_1^2 - \nu_2^2}$, подходящий функционал был выбран в виде $J[\nu_1, \nu_2] = |x(s^*) - x|^2$, где $x \in S(y)$, а s^* — то значение параметра s , при котором решение задачи $x(s)$ из (23) выходит на S .

6. Численные решения обратной задачи. По аналогии с [15] численное решение обратной задачи основано на минимизации функционала невязки

$$\Phi(n) = \int_S dS \int_{S(y)} [\tau(x, y; n) - \tau_*(x, y)]^2 dS. \quad (24)$$

Здесь $\tau(x, y; n)$ — время пробега между точками $x \in S(y)$ и $y \in S$, определяемое решением задачи (19) при заданном индексе рефракции $n(x)$; $\tau_*(x, y)$ — время пробега между теми же точками, вычисленное по функции $f(x, \omega, y)$; dS — элемент площади поверхности. При численной реализации интегралы в (24) заменяются квадратурными формулами.

Для минимизации функционала невязки (24) был использован метод сопряженных градиентов. Описание получения градиента функционала невязки можно также найти в [15].

Численные эксперименты по решению обратных задач проводились на симулированных данных. Данные были получены из точных решений прямой задачи ($\tau_*(x, y)$) и на зашумленных ($\hat{\tau}_*(x, y)$). В зашумленные данные обратной задачи была внесена случайная ошибка:

$$\hat{\tau}_*(x, y) = \tau_*(x, y) \left(1 + \xi \frac{p}{100} \right),$$

где ξ — равномерно распределенная случайная величина на интервале $[-1, 1]$; p — процент ошибки.

Для описания локализованных включений была рассмотрена функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \sin^2(\pi t/2), & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases} \quad (25)$$

$\varphi(t) \in C^1(\mathbb{R})$ с кусочно-гладкой второй производной.

Данная функция рассматривалась в работе [23] при исследовании жестких фреймов вейвлетов. Будем считать, что неоднородность имеет вид включения или нескольких включений, и построим коэффициент рефракции используя функцию φ следующим образом:

$$\begin{aligned} n(x) &= n_0 + \tilde{n}(x) = n_0 + \gamma[1 - \varphi(\beta(r(x) - \alpha))], \\ r(x) &= (a(x_1 - x_1^0)^2 + b(x_2 - x_2^0)^2 + c(x_3 - x_3^0)^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь (x_1^0, x_2^0, x_3^0) — центр неоднородности, $a > 0, b > 0, c > 0$ характеризуют эллиптичность неоднородности, параметр $\alpha > 0$ отвечает за «ширину» площадки неоднородности, $\beta > 0$ — за «крутизну» изменения коэффициента рефракции, $\gamma > 0$ — за величину отклонения коэффициента рефракции от константы.

Такой вид включения удобен в том числе и для визуализации полученного решения. Индекс рефракции постоянен внутри первого эллипсоида и вне второго. Расстояние между этими эллипсоидами характеризует крутизну изменения параметра $n(x)$. В проекции на двумерную плоскость это может быть отображено в виде двух эллипсов подобно линиям уровня на географических картах.

Покажем это на более наглядном примере. На рис. 2 показаны три области G_0 , G_1 и G_2 в плоскости $x_3 = 0$. Область G_2 соответствует точкам x , для которых $r(x) < \alpha$. В этой области $\varphi(\beta(r(x) - \alpha)) \equiv 0$, соответственно $n(x) \equiv n_0 + \gamma$. Область G_0 соответствует точкам x , для которых $r(x) > \alpha + 1/\beta$. В этой области $\varphi(\beta(r(x) - \alpha)) \equiv 1$, соответственно $n(x) \equiv n_0$. В промежуточной области G_1 , соответствующей значениям $\alpha < r(x) < \alpha + 1/\beta$, значение функции $n(x)$ плавно изменяется в пределах от n_0 до $n_0 + \gamma$. При этом чем больше значение β , тем быстрее происходит изменение от n_0 до $n_0 + \gamma$.

Рис. 2. Форма неоднородности, задаваемая функцией $n(x)$

Далее в рассмотренных ниже примерах 1–3 и 5 для наглядного изображения функций, задаваемых формулами вида (26), в плоскости $x_3 = 0$ показаны две концентрических окружности и эллипсы для примера 4. Внутри окружности или эллипса меньшего размера значение функции тождественно равно $n_0 + \gamma$, вне окружности или эллипса большего размера n_0 между этими окружностями или эллипсами функция $n(x)$ принимает промежуточные значения.

В случае наличия k неоднородностей рассматриваемого вида коэффициент $n(x)$ имеет следующий вид:

$$n(x) = n_0 + \tilde{n}_1(x) + \tilde{n}_2(x) + \dots + \tilde{n}_k(x). \quad (27)$$

В данном представлении $\tilde{n}_j(x)$ соответствует j -й неоднородности вида (26) со своими значениями параметров α_j , β_j , γ_j , a_j , b_j , c_j , $x_{1,j}^0$, $x_{2,j}^0$ и $x_{3,j}^0$.

Ниже рассмотрены пять модельных примеров решения обратной задачи.

ПРИМЕР 1. Две неоднородности с центрами, расположенными в точках $(-0, 4; -0, 4; 0)$ и $(0, 4; 0, 4; 0)$, с одинаковыми параметрами $a_1 = a_2 = 1, 0$, $b_1 = b_2 = 1, 0$, $c_1 = c_2 = 1, 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 4, 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 1$, различными значениями параметра $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = 0, 025$. Пример 1 соответствует конфигурации с неоднородностями с различным размером «плотной» части.

ПРИМЕР 2. Две неоднородности с центрами, расположенными в точках $(-0, 4; -0, 4; 0)$ и $(0, 4; 0, 4; 0)$, с одинаковыми параметрами $a_1 = a_2 = 1, 0$, $b_1 = b_2 = 1, 0$, $c_1 = c_2 = 1, 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 1$, различными значениями параметров $\beta_1 = 4, 0$, $\beta_2 = 8, 0$. Пример 2 соответствует конфигурации с неоднородностями с одинаковой «плотной» частью, но различной скоростью убывания плотности.

ПРИМЕР 3. Две неоднородности с центрами, расположенными в точках $(-0, 4; -0, 4; 0)$ и $(0, 4; 0, 4; 0)$, с одинаковыми параметрами $a_1 = a_2 = 1, 0$,

$b_1 = b_2 = 1, 0$, $c_1 = c_2 = 1, 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1$ и $\beta_1 = \beta_2 = 4, 0$, различными значениями параметров $\gamma_1 = 0, 1$, $\gamma_2 = 0, 025$. Пример 3 соответствует конфигурации с одинаковыми по размеру, но существенно разными по плотности неоднородностями.

ПРИМЕР 4. Две неоднородности с центрами, расположенными в точках $(-0, 4; -0, 4; 0)$ и $(0, 4; 0, 4; 0)$, с одинаковыми параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 4, 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 1$, различными значениями параметров $a_1 = 0, 75$, $b_1 = 0, 5$, $c_1 = 1$, $a_2 = 0, 5$, $b_2 = 0, 75$, $c_2 = 1$. Пример 4 соответствует конфигурации с неоднородностями с различной формой «плотной» части.

ПРИМЕР 5. Три неоднородности с одинаковыми параметрами плотности, с центрами в вершинах правильного треугольника $(0, 0; 0, 5; 0)$, $(-0, 43; -0, 25; 0)$ и $(0, 43; -0, 25; 0)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 8, 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 1$. Пример 5 соответствует конфигурации с тремя затеняющими друг друга неоднородностями.

Во всех случаях уровень шума составлял 5%. Область D состоит из пар точек вида $(x_{i,j}, y_i)$, где $y_1 = (10, 0; 0, 0; 0, 0)$, $y_2 = (0, 0; 10, 0; 0, 0)$, $y_3 = (0, 0; 0, 0; 10, 0)$, а $x_{i,j} \in S(y_i)$.

На рис. 3 представлено сравнение точного решения обратной задачи в примере 1 (сплошная черная линия), численного решения, полученного на незашумленных данных (сплошная серая линия), и численного решения, полученного на зашумленных данных (пунктирная серая линия) с погрешностью 5%.

Рис. 3. Пример 1: точное и приближенные решения

В левой части рис. 3 по аналогии с рис. 2 указаны области G_0 , G_1 и G_2 в плоскости $x_3 = 0$. Это изображение позволяет понять, насколько точно восстанавливаются области, в которых $n(x)$ постоянны. В правой части рис. 3 изображены значения коэффициента $n(x)$ на прямой $x_1 = z$, $x_2 = z$, $x_3 = 0$, проходящей через центры исходных неоднородностей. Эта часть рисунка позволяет оценить, насколько точно восстанавливаются максимальные значения $n_{\max}$ функции $n(x)$ и скорость изменения функции $n(x)$ от n_0 до $n_{\max}$.

Аналогичные данные для примеров 2 и 3 представлены на рис. 4 и 5.

Рис. 4. Пример 2: точное и приближенные решения

Рис. 5. Пример 3: точное и приближенные решения

В примерах 4 и 5 неоднородности не располагаются симметрично относительно какой-либо плоскости и изображение графика коэффициента $n(x)$ вдоль какой-либо прямой не дает визуального понимания точности решения обратной задачи. Поэтому на рис. 6 приведем лишь изображения границ областей G_0 , G_1 и G_2 в плоскости $x_3 = 0$.

Рис. 6. Примеры 4 (а), 5 (б): точное и приближенные решения

Точность решения в примере 5 несколько ниже из-за того, что неоднородности «затеняют» друг друга.

В работе показана возможность численного определения неоднородностей диэлектрической проницаемости по заданному модулю вектора электрической напряженности электромагнитного поля, являющегося результатом интерференции двух полей, вызванных точечными источниками стороннего тока. Алгоритм был апробирован на симулированных зашумленных данных и показал удовлетворительную работоспособность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг Б. Р. О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \rightarrow \infty$ нестационарных задач // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 2(182). С. 3–55.
2. Klivanov M. V., Romanov V. G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 4. P. 415–428.
3. Klivanov M. V., Romanov V. G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problems for the Schrödinger equation: the plane wave case // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 1. P. 48–63.
4. Novikov R. G. Explicit formulas and global uniqueness for phaseless inverse scattering in multidimensions // J. Geom. Anal. 2015; DOI 10.1007/5.12220-014-9553-7
5. Novikov R. G. Formulas for phase recovering from phaseless scattering data at fixed frequency // Bull. Sci. Math. 2015; DOI 10.1016/j.bulsci.2015.04.005
6. Klivanov M. V., Romanov V. G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nanostructures // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 2. P. 187–193.

7. Romanov V. G. Some geometric aspects in inverse problems // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 68–84.
8. Klibanov M. V., Romanov V. G. Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2016. V. 76, N 1. P. 178–196; DOI 10.1137/15M1022367
9. Klibanov M. V., Romanov V. G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // Inverse Problems. 2016. V. 32, N 2, 015005; DOI 10.1088/0266-5611/32/1/015005
10. Romanov V. G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26, N 5. P. 681–688.
11. Romanov V. G., Yamamoto M. Recovering two coefficients in an elliptic equation via phaseless information // Inverse Probl. Imaging. 2019. V. 13, N 1. P. 81–91.
12. Романов В. Г. Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 916–924.
13. Романов В. Г. Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 626–638.
14. Романов В. Г. Определение диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности высокочастотного электромагнитного поля // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 3. С. 269–272.
15. Карчевский А. Л., Дедок В. А. Восстановление коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электрического поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 50–59; <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.305>
16. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
17. Мухометов Р. Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.
18. Мухометов Р. Г., Романов В. Г. К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n -мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 41–44.
19. Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмологии // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 2. С. 302–305.
20. Бейлькин Г. Я. Устойчивость и единственность решения обратной кинематической задачи сейсмологии в многомерном случае // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука, 1979. С. 3–6.
21. Алексеев А. С., Лаврентьев М. М., Мухометов Р. Г. и др. Численный метод решения трехмерной обратной кинематической задачи сейсмологии // Математические проблемы геофизики. 1971. Вып. 2. С. 143–165.
22. Alekseev A. S., Belonosova A. V. et al. Seismic studies of low-velocity layers and horizontal inhomogeneities within the crust and upper mantle on the territory of the USSR // Tectonophysics. 1973. V. 20. С. 47–56.
23. Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y. J. Painless nonorthogonal expansions // J. Math. Phys. V. 27, N 5. P. 1271–1283; DOI 10.1063/1.527388

Поступила в редакцию 24 мая 2019 г.

После доработки 24 мая 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Дедок Василий Александрович

Карчевский Андрей Леонидович

Романов Владимир Гаврилович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

630090 г. Новосибирск

E-mail: dedok@math.nsc.ru; karchevs@math.nsc.ru; romanov@math.nsc.ru