Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. V. Demidenko, I. A. Uvarova, Yu. A. Khazova, On one system of ordinary differential equations of large dimension and a delay equation, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 59–73

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2018.22.306>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 10:14:07

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И УРАВНЕНИИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ^{*)}

Г. В. Демиденко, И. А. Уварова, Ю. А. Хазова

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая многостадийный синтез вещества. Доказаны глобальные предельные теоремы, в которых устанавливаются связи между решениями системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом. Полученные результаты позволяют находить приближенные решения рассматриваемых систем сколь угодно высокой размерности на всей полуоси. Установлены оценки аппроксимации.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных высокой размерности, уравнение с запаздывающим аргументом, глобальные предельные теоремы, оценки аппроксимации.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.306

Введение. В настоящей работе мы продолжаем изучение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_n x + F(t, x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} &= x^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta > 0, \quad \tau > 0, \quad n \gg 1,$$

$$\begin{aligned} F(t, x) &= (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^T, \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \\ x^0 &= (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T. \end{aligned}$$

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086), Программы развития Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» на 2015–2024 гг.

Системы вида (1) возникают при моделировании многостадийного синтеза вещества [1, 2]. Количество дифференциальных уравнений в (1) соответствует числу стадий синтеза, τ — суммарное время протекания стадий из первого состояния в n -е. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции $x(t)$ определяют концентрацию вещества на i -й стадии процесса. Первое нелинейное уравнение системы (1) определяет закон инициации, последнее — закон диссипации вещества, остальные уравнения характеризуют скорость изменения концентрации вещества на промежуточных стадиях (см. [1]).

Отметим, что в задаче синтеза вещества биологов прежде всего интересует концентрация конечного продукта. Поэтому, рассматривая систему (1), нужно уметь достаточно точно вычислять последнюю компоненту решения $x_n(t)$. Но процесс синтеза может иметь очень большое число промежуточных стадий и достигать фантастической величины (например, 10^{30}). Поэтому при изучении системы (1) исследователь может столкнуться с серьезными трудностями, имея проблему большой размерности такого типа.

Решение этой проблемы было предложено в 2002 г. в результате совместной деятельности биологов и математиков. Метод ее решения основан на установленных связях между решениями системы (1) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом. Предположение о возможных связях между последней компонентой решения системы (1) (при $g(t, z) \equiv g(z)$, $n \gg 1$) и решением уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(y(t - \tau)) \quad (2)$$

было высказано В. А. Лихошваем исходя из биологических соображений. Численные расчеты, проведенные С. И. Фадеевым для конкретных систем, подтвердили это предположение. Строгое математическое доказательство существования таких связей на малом интервале $(0, T)$ впервые было получено Г. В. Демиденко и опубликовано в совместной работе [2] в виде некоторых предельных теорем. В частности, при нулевых данных $x^0 = 0$ в [2] была доказана оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n(t) - y(t)| \leq c/n^{1/4}, \quad n \geq n_0, \quad (3)$$

где $y(t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$y(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad y(\tau + 0) = 0, \quad (4)$$

константа $c > 0$ зависит от функции $g(z)$, величины T и параметров τ, θ .

Из доказанных предельных теорем вытекает, что если число стадий n достаточно велико, то для приближенного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ достаточно найти решение $y(t)$ начальной задачи (2), (4), а неравенство (3) будет характеризовать теоретическую оценку точности полученного результата. Конечно, ввиду нелинейности при нахождении решения задачи (2), (4) нужно будет использовать приближенные методы, которые неизбежно повлекут дополнительные погрешности при вычислениях. Однако при использовании метода шагов (см., например, [3]) эти погрешности будут возникать при построении приближенных решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, и их нетрудно оценить.

Как отмечено в [4], с математической точки зрения гипотезу о наличии связей между компонентой $x_n(t)$ решения системы (1) и решением уравнения (2) можно было высказать, проводя параллель с исследованиями [5–8]. Напомним, что в этих работах изучался «обратный» вопрос об аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью решений специального класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности.

В дальнейшем результаты [2] были обобщены, в частности, был доказан ряд предельных теорем для некоторых классов систем дифференциальных

уравнений высокой размерности на произвольном конечном интервале $(0, T)$ (см., например, [9–18]). Однако при получении аналогичных результатов на всей полуоси $(0, \infty)$ возникают принципиальные сложности, связанные с поведением решений на бесконечности при всех достаточно больших $n \gg 1$. Впервые предельные теоремы на всей полуоси для системы (1) при некоторых условиях на нелинейные члены доказаны в работе [19], при этом глобальные оценки аппроксимации получены в пространствах Лебега $L_1(0, \infty)$. В настоящей работе мы продолжаем исследования [19] и доказываем глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0, \infty)$, в которых, как и на конечном интервале, установлены связи между решениями системы уравнений (1) высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)). \quad (5)$$

Эти теоремы являются аналогами глобальных теорем [19], но в такой формулировке они позволяют доказать обратные глобальные предельные теоремы по аналогии с [14].

Полученные результаты можно использовать для приближенного построения решений системы высокой размерности (1) на всей полуоси $(0, \infty)$ с указанием глобальных оценок аппроксимации при $n \gg 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $g(t, z) \in C(\mathbb{R}_2^+)$ ограничена, $g(t, 0) \equiv 0$, и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу:

$$|g(t, z)| \leq G < \infty, \quad |g(t, z^1) - g(t, z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad t \geq 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

1. Задача Коши в интегральной форме. Приведем некоторые результаты, полученные ранее при изучении свойств решений задачи Коши (1) для любой размерности системы $n > n_0$. Отметим, что из условий на функцию $g(t, z)$ следует, что задача Коши (1) однозначно разрешима, при этом решение существует на всей полуоси $[0, \infty)$. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть размерность системы n , для ее решения будем использовать обозначение $x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_n^n(t))^T$. Верхний индекс соответствует числу уравнений в системе, нижний — номеру компоненты решения.

В следующей лемме приведены некоторые интегральные соотношения для компонент решения $x^n(t)$, полученные в работе [14].

Лемма 1. Для компонент решения задачи Коши (1) справедливы интегральные соотношения

$$x_j^n(t) = \sum_{k=1}^j x_k^{n,0} e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{j-k}}{(j-k)!} + \int_0^t e^{-\frac{n-1}{\tau}(t-s)} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}(t-s)\right)^{j-1}}{(j-1)!} g(s, x_n^n(s)) ds, \\ j = 1, \dots, n-1, \\ x_n^n(t) = \sum_{k=1}^n x_k^{n,0} \hat{\psi}_{n-k+1}^n(t) + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n^n(s)) ds,$$

где $x_k^{n,0}$ — компоненты начального вектора x^0 ,

$$\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}, \\ \hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} \left(1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!}\right), \quad \omega_n = \frac{n-1}{\tau} - \theta, \quad k = 2, \dots, n.$$

Доказательства всех предельных теорем о сходимости последовательности $\{x_n^n(t)\}$ основаны на использовании леммы 1 и предельных свойствах последовательностей $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$. Напомним, что при доказательстве первой предельной теоремы в работе [2] была установлена

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ при $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_n^n(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau(1 + \varepsilon), T], \end{cases} \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В следующих леммах [14] содержатся обобщения леммы 2.

Лемма 3. Пусть $i \in \mathbb{N}$ фиксировано, тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{n-i}^n(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau(1 - \varepsilon)], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau(1 + \varepsilon), T] \end{cases} \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 4. Пусть $n = ml + 1$. Тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml+1}(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{\tau}{m}(1 - \varepsilon)\right], \\ e^{-\theta(t-\tau/m)}, & t \in \left[\frac{\tau}{m}(1 + \varepsilon), T\right], \end{cases} \quad l \rightarrow \infty.$$

Лемма 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$ фиксировано, тогда для любых $T > \tau$ и сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_k^n(t) \rightarrow e^{-\theta t}, \quad t \in [\varepsilon, T], \quad n \rightarrow \infty.$$

При доказательстве этих лемм существенно используется неравенство Стирлинга

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right). \quad (8)$$

С его помощью удастся получить оценки скорости сходимости последовательностей $\{\hat{\psi}_k^n(t)\}$ (см., например, [19]). В дальнейшем нам понадобятся некоторые из этих оценок. Приведем их в следующих трех леммах.

Лемма 6. Пусть $n_1 > \theta\tau + 1$ такое, что

$$\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1} > e^{-\theta\tau}/2, \quad n > n_1. \quad (9)$$

Тогда при всех $n > n_1$ выполнены оценки

$$0 < \hat{\psi}_k^n(t) < 2e^{-\theta(t-\tau)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$\|\hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t), L_2(0, \infty)\| \leq c/\sqrt{n-1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (11)$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от n .

Доказательство. Отметим, что неравенство (10) получено в работе [18].

Из леммы 1 имеем

$$\hat{\psi}_2^n(t) - \hat{\psi}_1^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} - e^{-\omega_n t} \right).$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} & \|\hat{\psi}_2^n(t) - \hat{\psi}_1^n(t), L_2(0, \infty)\| \\ & \leq \frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \left(\frac{\theta\tau}{n-1} \|e^{-\theta t}, L_2(0, \infty)\| + \|e^{-\frac{n-1}{\tau}t}, L_2(0, \infty)\| \right) \\ & = \frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \left(\frac{\sqrt{\theta\tau}}{\sqrt{2}(n-1)} + \sqrt{\frac{\tau}{2(n-1)}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что найдется константа $c > 0$, не зависящая от n , такая, что справедливо неравенство

$$\|\hat{\psi}_2^n(t) - \hat{\psi}_1^n(t), L_2(0, \infty)\| \leq c/\sqrt{n-1}, \quad n > n_1.$$

Пусть теперь $k = 2, \dots, n-1$. В силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} & \hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t) \\ & = e^{-\theta t} \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right)^k \left(\frac{\theta\tau}{n-1} \left(1 - e^{-\omega_n t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega_n t)^j}{j!} \right) - e^{-\omega_n t} \frac{(\omega_n t)^{k-1}}{(k-1)!} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t) \leq e^{-\theta t} \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right)^k \frac{\theta\tau}{n-1} - \frac{n-1}{n-1-\theta\tau} e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тогда для интегральной нормы получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t), L_2(0, \infty)\| & \leq \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right)^k \frac{\theta\tau}{n-1} \|e^{-\theta t}, L_2(0, \infty)\| \\ & + \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right)^k \left\| e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}, L_2(0, \infty) \right\|. \end{aligned}$$

Оценим норму

$$J = \left\| e^{-\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}, L_2(0, \infty) \right\|.$$

Имеем

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-2\frac{n-1}{\tau}t} \frac{\left(\frac{n-1}{\tau}t\right)^{2(k-1)}}{((k-1)!)^2} dt = \frac{\tau}{2(n-1)} \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^{2(k-1)}}{(2^{k-1}(k-1)!)^2} ds,$$

а поскольку $(2^{k-1}(k-1)!)^2 > (2(k-1)!)^2$, то

$$J^2 < \frac{\tau}{2(n-1)} \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^{2(k-1)}}{(2(k-1)!)^2} ds = \frac{\tau}{2(n-1)}. \quad (12)$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} & \|\hat{\psi}_{k+1}^n(t) - \hat{\psi}_k^n(t), L_2(0, \infty)\| \\ & \leq \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right)^k \frac{\sqrt{\theta\tau}}{\sqrt{2}(n-1)} + \left(\frac{n-1}{n-1-\theta\tau} \right) \sqrt{\frac{\tau}{2(n-1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, вытекает неравенство (11). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при $n > 2\theta\tau - i + 1 + 2\varepsilon^{-1}|i - \theta\tau|$ и $l \geq 1$ справедливы оценки

$$\|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_1(0, \infty)\| \leq c_1\varepsilon + \frac{c_2}{\varepsilon(n-1)}, \quad (13)$$

$$\|\hat{\psi}_{n-i}^n(t) - \hat{\psi}_{n+l-i}^{n+l}(t), L_2(0, \infty)\| \leq c_1\sqrt{\varepsilon} + \frac{c_2}{\varepsilon\sqrt{n-1}}, \quad (14)$$

где $c_1, c_2 > 0$ — константы, не зависящие от ε и n .

Лемма 8. Пусть $m \in N$ фиксировано, тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при $l_1, l_2 \in N$ таких, что $ml_1 > 2\theta\tau(1 + \varepsilon^{-1})$, $l_2 > l_1$, справедливы оценки

$$\|\hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_1(0, \infty)\| \leq c_3\varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon ml_1}, \quad (15)$$

$$\|\hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_2(0, \infty)\| \leq c_3\sqrt{\varepsilon} + \frac{c_4}{\varepsilon\sqrt{ml_1}}, \quad (16)$$

$$\|\hat{\psi}_{l_1+1}^{ml_1+1}(t) - \hat{\psi}_{l_2+1}^{ml_2+1}(t), L_2(\varepsilon, \infty)\| \leq \frac{c_4}{\varepsilon\sqrt{ml_1}}, \quad (17)$$

где $c_3, c_4 > 0$ — константы, не зависящие от ε и n .

Доказательства лемм 7 и 8 проводится так же, как доказательство леммы 6 с использованием неравенств (8), (12) и лемм 3, 4.

При доказательстве глобальных предельных теорем в L_2 -норме, как и в работе [19], нам понадобится следующий результат об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 1. Пусть $g(t, 0) \equiv 0$ и выполнены условия (6). Тогда при $0 < L < \theta$ нулевое решение задачи Коши (1) асимптотически устойчиво и при всех достаточно больших $n \gg 1$ имеют место следующие оценки:

$$|x_j^n(t)| \leq c \left(\sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}| \right) e^{-\delta t}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

где $\delta = \min \left\{ \frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L} \right\}$ и константа c не зависит от $n > n_0$.

2. Глобальные предельные теоремы. Увеличивая неограниченно число уравнений в (1) и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получаем последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. В этом разделе мы докажем глобальные предельные теоремы для такой последовательности при некоторых наборах начальных данных $x^{n,0}$.

Вначале рассмотрим последовательность задач Коши вида (1), предполагая, что векторы начальных данных имеют последнюю компоненту, которая может быть отличной от нуля, а все остальные компоненты — нулевые, т. е. начальные векторы в (1) имеют вид

$$x^{n,0} = (0, \dots, 0, a)^T, \quad |a| > 0. \quad (19)$$

В работе [19] была доказана следующая глобальная предельная теорема.

Теорема 2. Пусть $g(t, 0) \equiv 0$, выполнены условия (6), $0 < L < \theta$ и начальные данные имеют вид (19). Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно

сходится на любом отрезке $[0, T]$: $x_n^n(t) \rightarrow y(t)$, $n \rightarrow \infty$. Предельная функция $y(t)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= ae^{-\theta t}, \quad t \in [0, \tau], \\ y(\tau + 0) &= ae^{-\theta \tau}, \end{aligned} \quad (20)$$

при этом существует $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_0$ имеет место оценка

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |x_n^n(t) - y(t)| \leq c|a|/\sqrt{n},$$

где константа $c > 0$ не зависит от n .

Отметим, что для справедливости предельных теорем на конечном отрезке $[0, T]$ от нелинейной функции $g(t, z)$ не требуются дополнительные условия, кроме ограниченности и липшицевости по z (см., например, [2, 4, 18]). Напомним также, что в случае произвольных начальных данных в (1) последовательность $\{x_n^n(t)\}$, как правило, не является равномерно сходящейся. Локальные предельные теоремы справедливы в пространствах $L_p(0, T)$ (см., например, [4, 14]). В работе [19] были впервые установлены глобальные предельные теоремы в пространстве Лебега $L_1(0, \infty)$. Приведем ряд глобальных теорем в пространстве $L_2(0, \infty)$.

Вначале докажем аналог теоремы 2.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для последовательности $\{x_n^n(t)\}$ имеет место сходимост к решению задачи (20)

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

при этом существует $n_1 = n_1(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_1$ имеет место оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \leq c|a|/\sqrt{n}, \quad (21)$$

где константа $c > 0$ не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 для последней компоненты $x_n^n(t)$ решения задачи Коши (1) выполнены соотношения

$$x_n^n(t) = ae^{-\theta t} + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s)g(s, x_n^n(s)) ds. \quad (22)$$

Тогда для любых n, k имеем

$$\begin{aligned} x_{n+k}^{n+k}(t) - x_n^n(t) &= \int_0^t (\hat{\psi}_{n+k}^{n+k}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s))g(s, x_{n+k}^{n+k}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s)(g(s, x_{n+k}^{n+k}(s)) - g(s, x_n^n(s))) ds = I_{n,k}^1(t) + I_{n,k}^2(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим L_2 -норму первого слагаемого $I_{n,k}^1(t)$. Используя функцию Хевисайда $\chi(t)$, очевидно имеем

$$\begin{aligned} & \|I_{n,k}^1(t), L_2(0, \infty)\| \\ & \leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-s) |\hat{\psi}_{n+k}^{n+k}(t-s) - \hat{\psi}_n^n(t-s)| \chi(s) |g(s, x_{n+k}^{n+k}(s))| ds, L_2(R) \right\|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, получим

$$\|I_{n,k}^1(t), L_2(0, \infty)\| \leq \|\hat{\psi}_{n+k}^{n+k}(t) - \hat{\psi}_n^n(t), L_1(0, \infty)\| \|g(s, x_{n+k}^{n+k}(s)), L_2(0, \infty)\|.$$

В силу леммы 7 и оценки (13) при $n > 2\theta\tau(1 + (n-1)^{1/2}) + 1$ имеем

$$\|\hat{\psi}_{n+l}^{n+l}(t) - \hat{\psi}_n^n(t), L_1(0, \infty)\| \leq c_1/\sqrt{n},$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от n и может быть явно вычислена. Следовательно,

$$\|I_{n,k}^1(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}} \|g(s, x_{n+k}^{n+k}(s)), L_2(0, \infty)\|.$$

Учитывая теперь условия на функцию $g(t, z)$, имеем

$$|g(s, x_{n+k}^{n+k}(s))| \leq L|x_{n+k}^{n+k}(s)|.$$

Тогда в силу этого неравенства и теоремы 1 получаем

$$\|I_{n,k}^1(t), L_2(0, \infty)\| \leq c_1 L |a| / \sqrt{2\delta n}. \quad (24)$$

Для второго интеграла в (23) в силу условия Липшица в L_2 -норме имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|I_{n,k}^2(t), L_2(0, \infty)\| & \leq L \left\| \int_0^t |\hat{\psi}_n^n(t-s)| |x_{n+k}^{n+k}(s) - x_n^n(s)| ds, L_2(0, \infty) \right\| \\ & \leq L \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-s) |\hat{\psi}_n^n(t-s)| \chi(s) |x_{n+k}^{n+k}(s) - x_n^n(s)| ds, L_2(R) \right\|. \end{aligned}$$

Тогда в силу неравенства Юнга

$$\|I_{n,k}^2(t), L_2(0, \infty)\| \leq L \|\hat{\psi}_n^n(t), L_1(0, \infty)\| \|x_{n+k}^{n+k}(s) - x_n^n(s), L_2(0, \infty)\|. \quad (25)$$

По лемме 2 для последовательности $\{\hat{\psi}_n^n(t)\}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость (7). Тогда, учитывая лемму 3, в силу теоремы Лебега имеем

$$\int_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)| ds \rightarrow \frac{1 - e^{-\theta(t-\tau)}}{\theta}, \quad t > \tau.$$

Следовательно, найдется число $n_1 = n_1(\theta, L)$ такое, что для всех $n > n_1$ будет выполнено неравенство

$$\int_0^t |\hat{\psi}_n^n(s)| ds < \frac{L + \theta}{2L\theta}, \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Учитывая эту оценку, (24) и (25), из представления (23) получаем

$$\begin{aligned} & \|x_{n+k}^{n+k}(t) - x_n^n(t), L_2(0, \infty)\| \\ & \leq \frac{c_1 L |a|}{\sqrt{2\delta n}} + \frac{L + \theta}{2\theta} \|x_{n+k}^{n+k}(t) - x_n^n(t), L_2(0, \infty)\|, \quad n > n_0(\theta, \tau, L). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x_{n+k}^{n+k}(t) - x_n^n(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{2\theta}{(\theta - L)} \frac{c_1 L |a|}{\sqrt{2\delta n}}.$$

Отсюда вытекает сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$ в $L_2(0, \infty)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, для предельной функции $y(t)$ получаем оценку

$$\|y(t) - x_n^n(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{2\theta}{(\theta - L)} \frac{c_1 L |a|}{\sqrt{2\delta n}}. \quad (27)$$

В силу теоремы 2 функция $y(t)$ является решением начальной задачи (20). В этом можно убедиться непосредственно из (22). Действительно, переходя к пределу в (22) при $n \rightarrow \infty$, получаем тождества

$$\begin{aligned} y(t) & \equiv ae^{-\theta t}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ y(t) & \equiv ae^{-\theta t} + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s)) ds, \quad t > \tau, \\ y(\tau + 0) & \equiv ae^{-\theta \tau}. \end{aligned}$$

Из этих тождеств следует, что функция $y(t)$ удовлетворяет начальным условиям задачи (20) Дифференцируя второе из этих тождеств, имеем

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau.$$

Следовательно, $y(t)$ является решением начальной задачи (20). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда решение начальной задачи (20) принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$.

Доказательство. В силу теоремы 2 для решения $y(t)$ начальной задачи (20) при $t > 0$ справедлива оценка

$$|y(t)| \leq |x_n^n(t)| + c|a|/\sqrt{n}, \quad n \gg 1.$$

Учитывая теорему 1, имеем

$$|y(t)| \leq c_1 |a| e^{-\delta t} + c|a|/\sqrt{n}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $|y(t)| \leq c_1 |a| e^{-\delta t}$. Следовательно, $y(t) \in L_2(0, \infty)$. Тогда из уравнения с запаздывающим аргументом (20) с учетом условий на функцию $g(t, z)$ вытекает $y(t) \in W_2^1(\tau, \infty)$. Следствие доказано.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (1), предполагая, что $n = 2l + 1$ и вектор начальных данных имеет вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \quad \text{при } j \neq l+1. \quad (28)$$

В работе [14] доказано, что при таких начальных условиях на любом конечном интервале $(0, T)$ последовательность $\{x_n^n(t)\}$ также сходится, однако в этом случае сходимость уже не является равномерной, а только в $L_p(0, T)$, $1 \leq p < \infty$:

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_p(0, T)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

при этом предельная функция $y(t) \in W_p^1(\tau, T)$ является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= 0, \quad t \in [0, \tau/2), \\ y(t) &= ae^{-\theta(t-\tau/2)}, \quad t \in (\tau/2, \tau], \\ y(\tau + 0) &= ae^{-\theta\tau/2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В работе [19] доказан следующий аналог этого утверждения на всей полуоси $(0, \infty)$ в пространстве Лебега $L_1(0, \infty)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и начальный вектор в (1) имеет вид (28). Тогда обобщенное решение $y(t)$ начальной задачи (29) принадлежит соболевскому пространству $W_1^1(\tau, \infty)$ и выполняется оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_1(0, \infty)\| \leq c|a|/\sqrt{n}, \quad n = 2l + 1 \geq n_0(\theta, \tau, L), \quad (30)$$

где константа $c > 0$ не зависит от n .

Докажем аналог этой теоремы в пространстве $L_2(0, \infty)$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда обобщенное решение $y(t)$ начальной задачи (29) принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$ и выполняются оценки

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \leq c|a|/n^{1/6}, \quad n = 2l + 1 > n_0(\theta, \tau, L), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \|x_n^n(t) - y(t), L_2(\tau + \varepsilon, \infty)\| &\leq c(\varepsilon)|a|/\sqrt{n}, \\ \varepsilon > 0, \quad n = 2l + 1 > n_0(\theta, \tau, L), \end{aligned} \quad (32)$$

где константы $c, c(\varepsilon) > 0$ не зависят от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 для любых k и l , $k > l$, имеем

$$\begin{aligned} x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t) &= a(\hat{\psi}_{k+1}^{2k+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t)) \\ &+ \int_0^t (\hat{\psi}_{2k+1}^{2k+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s))g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)(g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s))) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\| &\leq |a| \|\hat{\psi}_{k+1}^{2k+1}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\| \\ &+ \left\| \int_0^t |\hat{\psi}_{2k+1}^{2k+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)| |g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s))| ds, L_2(0, \infty) \right\| \\ &+ \left\| \int_0^t |\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)| |g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s)) - g(s, x_{2l+1}^{2l+1}(s))| ds, L_2(0, \infty) \right\| \\ &= I_{l,k}^1 + I_{l,k}^2 + I_{l,k}^3. \end{aligned} \quad (33)$$

В силу леммы 8 и неравенства (16) имеем оценку

$$I_{l,k}^1 \leq c_1 |a| / (2l)^{1/6}, \quad l > \theta \tau (1 + \sqrt{2l}), \quad (34)$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от l и k .

Оценим второе слагаемое в (33). Используя функцию Хевисайда, имеем

$$I_{l,k}^2 \leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-s) |\hat{\psi}_{2k+1}^{2k+1}(t-s) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t-s)| |\chi(s)| |g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s))| ds, L_2(R) \right\|.$$

Тогда в силу неравенства Юнга получим

$$I_{l,k}^2 \leq \|\hat{\psi}_{2k+1}^{2k+1}(t) - \hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty)\| \|g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s)), L_2(0, \infty)\|.$$

Используя неравенство (15), будем иметь

$$I_{l,k}^2 \leq \frac{c}{\sqrt{2l}} \|g(s, x_{2k+1}^{2k+1}(s)), L_2(0, \infty)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от l и k . Отсюда в силу условий на функцию $g(t, z)$, как при выводе неравенства (24), получаем

$$I_{l,k}^2 \leq c_2 L |a| / \sqrt{2\delta l}. \quad (35)$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в (33). Повторяя предыдущие рассуждения, при $l \gg 1$ имеем

$$I_{l,k}^3 \leq L \|\hat{\psi}_{2l+1}^{2l+1}(t), L_1(0, \infty)\| \|x_{2k+1}^{2k+1}(s) - x_{2l+1}^{2l+1}(s), L_2(0, \infty)\|.$$

Принимая теперь во внимание оценку (26), получаем

$$I_{l,k}^3 \leq \frac{L + \theta}{2\theta} \|x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\|, \quad l \gg 1. \quad (36)$$

Подставляя оценки (34)–(36) в неравенство (33), получим, что существует $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_0$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \|x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\| &\leq \frac{c_1 |a|}{(2l)^{1/6}} + \frac{c_2 L |a|}{\sqrt{2\delta l}} \\ &+ \frac{L + \theta}{2\theta} \|x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $0 < L < \theta$, имеем

$$\|x_{2k+1}^{2k+1}(t) - x_{2l+1}^{2l+1}(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{2\theta}{\theta - L} \frac{c_3|a|}{(2l)^{1/6}}, \quad n > n_0.$$

Таким образом, последовательность $\{x_{2l+1}^{2l+1}(t)\}$ является фундаментальной и, следовательно, сходящейся в $L_2(0, \infty)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем (31). Из теоремы 2 следует, что $y(t)$ — обобщенное решение начальной задачи (29).

Поскольку $y(t) \in L_2(0, \infty)$ и $|g(t, y(t))| \leq L|y(t)|$, то из уравнения (29) вытекает, что $\frac{dy(t)}{dt} \in L_2(\tau, \infty)$. Следовательно, $y(t) \in W_2^1(\tau, \infty)$.

Из проведенных рассуждений и леммы 8 вытекает неравенство (32). Теорема 5 доказана.

Повторяя схему доказательства теорем 3 и 5, мы можем доказать ряд аналогичных предельных теорем для различных наборов начальных данных в задаче (1). Приведем некоторые из них.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2, $n = ml + 1$ и начальные условия в (1) имеют вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{l+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \quad \text{при } j \neq l + 1.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0, \infty)$. Предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-1}{m}\tau\right), \\ y(t) &= ae^{-\theta(t - \frac{m-1}{m}\tau)}, \quad t \in \left(\frac{m-1}{m}\tau, \tau\right], \\ y(\tau + 0) &= ae^{-\theta\tau/m}. \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2, $n = ml + 1$, $0 \leq s < m$ целое и начальные условия в (1) имеют вид

$$x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T, \quad x_{sl+1}^{n,0} = a, \quad x_j^{n,0} = 0 \quad \text{при } j \neq sl + 1.$$

Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0, \infty)$. Предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) &= ae^{-\theta(t - \frac{m-s}{m}\tau)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right], \\ y(\tau + 0) &= ae^{-\theta\frac{s}{m}\tau}. \end{aligned}$$

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 2, $i \in \mathbb{N}$ фиксировано и начальные данные в задаче Коши (1) имеют вид $x^{n,0} = (a_1, \dots, a_i, 0, \dots, 0)^T$. Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0, \infty)$. Предельная функция $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, \infty)$ и является обобщенным решением начальной задачи

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= 0, \quad t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) &= a_1 + \dots + a_i.\end{aligned}$$

Можно привести аналогичные глобальные предельные теоремы в пространстве $L_2(0, \infty)$ в случае, когда предельная функция $y(t)$ будет обобщенным решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) &= a,\end{aligned}\tag{37}$$

с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей конечное число разрывов первого рода, например, когда $\varphi(t) = e^{-\theta t} \varphi_{m,k}(t/\tau)$, где $\varphi_{m,k}(s)$ — функции Хаара:

$$\varphi_{m,k}(s) = \begin{cases} 2^{m/2}, & s \in [(k-1)2^{-m}, (k-1/2)2^{-m}), \\ -2^{m/2}, & s \in [(k-1/2)2^{-m}, k2^{-m}), \\ 0, & s \notin [(k-1)2^{-m}, k2^{-m}), \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Сформулируем соответствующую теорему, положив для определенности $m = 1, k = 1$ (сравните с [14]).

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 2, $n = 4l + 1$, компоненты начального вектора $x^{n,0} = (x_1^{n,0}, \dots, x_n^{n,0})^T$ в задаче Коши (1) имеют вид

$$x_1^{n,0} = ae^{-\theta\tau}, \quad x_{2l+1}^{n,0} = \sqrt{2}e^{-\theta\tau/2}, \quad x_{3l+1}^{n,0} = -2\sqrt{2}e^{-\theta\tau/4}, \quad x_{4l+1}^{n,0} = \sqrt{2},$$

остальные компоненты равны нулю. Тогда последовательность $\{x_n^n(t)\}$ сходится в $L_2(0, \infty)$, предельная функция $y(t)$ принадлежит $W_2^1(\tau, \infty)$ и является обобщенным решением задачи (37), где $\varphi(t) = e^{-\theta t} \varphi_{1,1}(t/\tau)$.

Приведем теперь формулировку глобальной предельной теоремы в пространстве $L_2(0, \infty)$ с указанием скорости сходимости.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 2 и последовательность начальных векторов $\{x^{n,0}\}$ в задаче (1) такая, что последовательность $\{x_n^n(t)\}$, составленная из последних компонент решений задач Коши вида (1), сходится в пространстве $L_2(0, \infty)$ к обобщенному решению $y(t) \in W_2^1(\tau, \infty)$ начальной задачи (37) с некоторой кусочно-непрерывной функцией $\varphi(t)$, имеющей разрывы первого рода. Тогда существует $n_0 = n_0(\theta, \tau, L)$ такое, что при $n > n_0$ справедлива оценка

$$\|x_n^n(t) - y(t), L_2(0, \infty)\| \leq \frac{c}{n^{1/6}} \sum_{k=1}^n |x_k^{n,0}|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и начального вектора $x^{n,0}$.

Заключение. Рассмотрена задача Коши (1) для системы дифференциальных уравнений высокой размерности, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества. Число стадий определяет число уравнений в системе. Компоненты $x_i(t)$ искомой вектор-функции определяют концентрацию вещества на i -й стадии. Наибольший интерес для биологов представляет концентрация конечного продукта, т. е. значения последней компоненты решения $x_n(t)$. В случаях, когда число стадий может быть очень большим, при решении систем вида (1) возникает проблема большой размерности.

На малом временном интервале $(0, T)$ эта проблема была решена в работе [2] на основе некоторых предельных теорем, которые устанавливали связи между решениями системы уравнений (1) и уравнения с запаздывающим аргументом (2). Эти связи позволили обосновать метод построения приближенного вычисления последней компоненты $x_n(t)$ решения системы (1). Затем было получено обобщение этого метода на другие классы систем дифференциальных уравнений высокой размерности и на произвольный конечный интервал $(0, T)$.

В настоящей работе мы изучаем указанную проблему большой размерности на всей полуоси $(0, \infty)$ в пространстве $L_2(0, \infty)$. При некоторых условиях на нелинейные члены в (1) нами установлены глобальные предельные теоремы, в которых, как и на конечном интервале, установлены связи между решениями системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом (5). Эти теоремы являются аналогами глобальных теорем в пространствах Лебега $L_1(0, \infty)$ из работы [19], но в такой формулировке они позволяют доказать обратные глобальные предельные теоремы по аналогии с [14].

Полученные результаты можно использовать для приближенного построения решений системы высокой размерности (1) на всей полуоси $(0, \infty)$ с указанием глобальных оценок аппроксимации при $n \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
2. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
3. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
4. Демиденко Г. В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Т. 5. Владикавказ: изд. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 45–56.
5. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 12. С. 1595–1601.
6. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
7. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
8. Gyori I. Two approximation techniques for functional differential equations // Comput. Math. Appl. 1988. V. 16, N 3. P. 195–214.
9. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
10. Мудров А. В. О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 57–69.

11. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В. О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 34–46.
12. Матвеева И. И., Попов А. М. О свойствах решений одной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 86–94.
13. Demidenko G. V., Kotova T. V. Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 2. P. 63–74.
14. Демиденко Г. В., Мельник И. А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
15. Матвеева И. И., Мельник И. А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.
16. Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
17. Matveeva I. I. On properties of solutions to one class of systems of nonlinear differential equations with parameters // Динамические системы. 2015. Т. 5(33), № 1–2. С. 13–24.
18. Демиденко Г. В., Уварова И. А. Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 2. С. 47–60.
19. Демиденко Г. В., Уварова И. А. Предельные теоремы для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Динамические системы. 2018. Т. 8(36), № 3. С. 205–234.

Поступила в редакцию 8 мая 2019 г.

После доработки 8 мая 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Демиденко Геннадий Владимирович

Уварова Ирина Алексеевна

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

630090 г. Новосибирск

Хазова Юлия Александровна

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

просп. Акад. Вернадского, 4

295007 г. Симферополь

E-mail: demidenk@math.nsc.ru; sibirotchka@ngs.ru; hazova.yuliya@hotmail.com