Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. G. Kazantsev, V. B. Kardakov, Poloidal-toroidal decomposition of solenoidal vector fields in the ball, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 74–95

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.307>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.89.185.249

April 26, 2023, 16:04:11

ПОЛОИДАЛЬНО–ТОРОИДАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В ШАРЕ

С. Г. Казанцев, В. Б. Кардаков

Изучается полиномиальная ортогональная базисная система векторных полей в шаре, которая соответствует разложению Гельмгольца и подразделяется на три части: потенциальную, гармоническую и соленоидальную. Показано, что разложение соленоидального векторного поля по этому базису является полоидально-тороидальным разложением (представлением Ми). При этом тороидальными потенциалами являются полиномы Цернике, а полоидальными потенциалами — обобщенные полиномы Цернике. Полиномиальную систему тороидальных и полоидальных векторных полей в шаре можно использовать при решении практических задач, в частности для представления геомагнитного поля в ядре Земли.

Ключевые слова: соленоидальные, тороидальные и полоидальные векторные поля, представление Ми, векторные сферические гармоники, полиномы Цернике.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.307

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается построенный ранее в [1] ортогональный полиномиальный базис основного пространства $\mathbf{L}_2(B^3)$, который соответствует разложению Гельмгольца и подразделяется на три части: потенциальную, гармоническую и соленоидальную. Показано, что разложение соленоидального векторного поля по этому базису является полоидально-тороидальным разложением. Такое представление называют также разложением или представлением Ми (см. [2, 3]). При этом полиномы Цернике $Z_{Nl}^{(N+k)}$ оказываются тороидальными, а обобщенные полиномы Цернике $Z_{Nl}^{[1](N+k)}$ — полоидальными потенциалами. Приводится построение других полоидально-тороидальных базисов, связанных с использованием различных спектральных задач для векторного лапласиана [4–6].

Полиномиальную систему тороидальных и полоидальных полей в шаре можно использовать, в частности, для представления геомагнитного поля в ядре Земли [7]. Разложение соленоидального векторного поля в сферической геометрии на полоидальные и тороидальные компоненты используется в механике жидкости и магнитной гидродинамике (система МГД-уравнений) для скаляризации задачи.

Следующий раздел содержит основные понятия и обозначения, напоминаются необходимые факты из функционального анализа. Приводятся определения для дифференциальных операций на сфере, скалярных и векторных сферических гармоник. В разд. 2 рассматриваются полиномиальные базисы основных скалярных и векторных пространств $L^2(B^3)$ и $\mathbf{L}^2(B^3)$. Последний раздел посвящен полоидально-тороидальному разложению соленоидального векторного поля в шаре. В приложении приведены основные свойства полиномиальных базисных векторных полей.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — декартова система координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ с координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ определяется обычным образом: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Через $B^3 = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < 1\}$ и $S^2 = \{\boldsymbol{\xi} : |\boldsymbol{\xi}| = 1\}$ обозначим единичный шар и единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ соответственно. Здесь $|\mathbf{x}|$ и $|\boldsymbol{\xi}|$ обозначают евклидову норму векторов.

Напомним определения основных дифференциальных операций — операторов ∇v , div , rot . Оператор ∇ или градиент вычисляет градиентное (потенциальное) векторное поле $\nabla v :=$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

а скалярная функция v называется скалярным потенциалом.

Гладкое векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1, a_2, a_3)^T$ называется соленоидальным, если его дивергенция равна нулю ($\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$), где оператор дивергенции div определяется как

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Другой дифференциальный оператор rot (оператор ротора) кратко определяется через символический определитель

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} := \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

здесь $\times$ означает векторное произведение. Если векторное поле потенциально, то ротор такого поля равен нулю: $\operatorname{rot} \nabla v = \mathbf{0}$.

Векторный оператор Лапласа Δ определяется формулой через покомпонентное применение скалярного оператора Лапласа Δ :

$$\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3)^T = \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix}.$$

Для векторного оператора Лапласа имеется векторное тождество

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Приведем формулы вычисления операций ∇ , div , rot и Δ для специального класса скалярных и векторных функций, которое будут часто использоваться в дальнейшем. Пусть даны гладкая скалярная функция одной переменной $f(s)$ и два постоянных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Функции вида $f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$ называются функциями типа плоской волны или ридж-функциями. Тогда имеют место формулы

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \frac{df(s)}{ds} \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}} = f'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} &= f'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} &= f'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= f''(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) |\mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

1.1. Функциональные пространства Соболева в шаре B^3 . В работе используются стандартные обозначения для эрмитовых пространств Соболева $L_2(B^3)$, $H^1(B^3)$, $H_0^1(B^3)$ в скалярном случае и $\mathbf{L}_2(B^3) \equiv (L_2(B^3))^3$, $\mathbf{H}^1(B^3) \equiv (\mathbf{H}^1(B^3))^3$, $\mathbf{H}_0^1(B^3) \equiv (\mathbf{H}_0^1(B^3))^3$ в векторном. Пространство Лебега $L_2(B^3)$ — эрмитово пространство функций, определенных в шаре B^3 , со скалярным произведением и конечной нормой

$$(u, v)_{L_2(B^3)} = \int_{B^3} u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \overline{v(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi}, \quad \|u\|_{L_2(B^3)}^2 = (u, u)_{L_2(B^3)}. \quad (1)$$

Пусть $H^1(B^3) \equiv H(\nabla) = \{v \in L_2(B^3) : \nabla v \in \mathbf{L}_2(B^3)\}$ — соболевское пространство функций в шаре B^3 . Это комплексное гильбертово пространство со стандартным скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_{H^1(B^3)} = \int_{B^3} u \bar{v} d\mathbf{x} + \int_{B^3} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} d\mathbf{x}, \quad \|u\|_{H^1(B^3)}^2 = (u, u)_{H^1(B^3)}. \quad (2)$$

Здесь ∇u — градиент функции u , а соответствующая норма обозначается $\|u\|_{H^1(B^3)}$.

В однородном пространстве $H_0^1(B^3) = \{v \in H^1(B^3) : v(\boldsymbol{\xi}) = 0, \boldsymbol{\xi} \in S^2\}$ скалярное произведение (интеграл Дирихле) и норма имеют вид

$$(u, v)_{H_0^1(B^3)} = \int_{B^3} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} d\mathbf{x}, \quad \|u\|_{H_0^1(B^3)}^2 = (u, u)_{H_0^1(B^3)} = \int_{B^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Такая норма в $H_0^1(B^3)$, как подпространства $H^1(B^3)$, эквивалентна норме основного пространства $H^1(B^3)$.

В векторном случае $\mathbf{L}_2(B^3)$ — эрмитово пространство векторных функций, определенных в шаре B^3 , со скалярным произведением и конечной нормой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(B^3)} = \int_{B^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(B^3)}^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(B^3)}. \quad (4)$$

Обозначим через $L_2(S^2) \equiv L_2(S^2; \mathbb{C})$ пространство квадратично-интегрируемых функций на сфере S^2 с эрмитовым скалярным произведением и конечной нормой

$$(u, v)_{L_2(S^2)} = \int_{S^2} u(\boldsymbol{\xi}) \overline{v(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi}, \quad \|u\|_{L_2(S^2)} = \sqrt{(u, u)_{L_2(S^2)}},$$

где $d\boldsymbol{\xi}$ — мера Лебега на сфере S^2 , $\int_{S^2} d\boldsymbol{\xi} = 4\pi$.

Для векторных полей на сфере мы рассматриваем гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(S^2) \equiv (L_2(S^2))^3$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}_2(S^2)}$ и нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(S^2)}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{L}_2(S^2)} := \int_{S^2} \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \overline{\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi}, \quad \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{L}_2(S^2)}^2 := (\mathbf{a}, \mathbf{a})_{\mathbf{L}_2(S^2)}.$$

1.2. Разложение Гельмгольца. Важную роль в векторном анализе играют гармонические векторные поля $\mathbf{h}$, которые удовлетворяют однородной системе

$$\operatorname{div} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

и являются одновременно соленоидальными и потенциальными полями. Из этой системы следует, что гармоническое векторное поле удовлетворяет уравнению $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{0}$ с векторным лапласианом Δ и каждая компонента $\mathbf{h}$ — скалярная гармоническая функция. Обратное утверждение неверно. Гармоническое векторное поле есть потенциальное поле с гармоническим потенциалом: $\mathbf{h} = \nabla h$, $\Delta h = 0$. Обозначим через $\nabla \operatorname{Harm}(B^3) = \{\mathbf{h} = \nabla h : h \in H^1(B^3), \Delta h = 0\}$ подпространство гармонических векторных полей, а через $\nabla H_0^1(B^3) = \{\mathbf{p} = \nabla v : v \in H_0^1(B^3)\}$ — подпространство потенциальных полей, имеющих только нормальную составляющую на границе. Тогда ортогональная сумма дает все множество потенциальных полей:

$$\nabla H^1(B^3) = \{\mathbf{u} = \nabla v : v \in H^1(B^3)\} = \nabla H_0^1(B^3) \overset{L_2}{\oplus} \nabla \operatorname{Harm}(B^3).$$

Также пусть $\mathbf{H}_0(\operatorname{div} = 0)$ есть подпространство соленоидальных полей, имеющих только тангенциальную составляющую на границе S^2 :

$$\mathbf{H}_0(\operatorname{div} = 0) := \{\mathbf{v} \in (L_2(B^3))^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ на } S^2\}.$$

В терминах этих подпространств разложение Гельмгольца означает, что пространство $(L_2(B^3))^3$ есть ортогональная сумма трех подпространств [8–12]:

$$(L_2(B^3))^3 = \nabla H_0^1(B^3) \overset{L_2}{\oplus} \nabla \operatorname{Harm}(B^3) \overset{L_2}{\oplus} \mathbf{H}_0(\operatorname{div} = 0).$$

Таким образом, каждое векторное поле $\mathbf{f} \in (L_2(B^3))^3$ может быть представлено единственным образом в виде суммы потенциального $\mathbf{p}$, гармонического $\mathbf{h}$ и соленоидального $\overset{\circ}{\mathbf{J}}$ полей, имеющих только тангенциальную составляющую на границе S^2 :

$$\mathbf{f} = \mathbf{p} + \mathbf{h} + \overset{\circ}{\mathbf{J}}. \quad (5)$$

С другой стороны, для каждого потенциального векторного поля $\mathbf{p}$ существует скалярная функция v — скалярный потенциал, $\mathbf{p} = \nabla v$. Аналогично, для соленоидального поля $\overset{\circ}{\mathbf{J}}$ существует векторное поле $\mathbf{u}$, называемое векторным потенциалом, которое удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{J}}$. Ясно, что векторный потенциал $\mathbf{u}$ для $\overset{\circ}{\mathbf{J}}$ определяется неоднозначно, и в некоторых случаях мы можем брать в качестве векторного потенциала соленоидальное векторное поле или накладывать граничные условия на этот потенциал. Поэтому разложение (5) может быть записано с помощью скалярных и векторных потенциалов. Например, существуют гармонический потенциал $h \in \operatorname{Harm}(B^3)$, скалярный потенциал $v \in H_0^1(B^3)$ и векторный потенциал $\mathbf{u} \in (H_0^1(B^3))^3$ такие, что

$$\mathbf{h} = \nabla h, \quad \mathbf{p} = \nabla v, \quad \overset{\circ}{\mathbf{J}} = \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

При этом потенциалы $\mathbf{u}$, v и h определяются однозначно.

Произвольное соленоидальное поле $\overset{\circ}{\mathbf{J}} \in \nabla \operatorname{Harm}(B^3) \overset{L_2}{\oplus} \mathbf{H}_0(\operatorname{div} = 0)$ можно разложить в сумму тороидального $\mathbf{T}$ и полоидального полей $\mathbf{P}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x})),$$

где t и p — некоторые подходящие скалярные функции. Таким образом, тороидально-полоидальное разложение представляет соленоидальное векторное поле через два скалярных потенциала t и p . Другие сведения о тороидально-полоидальном разложении приводятся в разд. 3.

1.3. Скалярные и векторные сферические гармоники. Пусть ξ — единичный вектор на сфере, тогда

$$\xi = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

где (φ, θ) — полярная система координат на сфере, $0 < \varphi < 2\pi$ — долгота, а $0 < \theta < \pi$ — широта. Полярная система координат (φ, θ) порождает на сфере S^2 единичные векторные поля $\mathbf{e}_1(\xi)$ и $\mathbf{e}_2(\xi)$:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \frac{\partial}{\partial \theta} \xi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix},$$

которые образуют локальный ортонормированный базис в касательной (тангенциальной) плоскости к точке ξ и ортогональной вектору ξ .

Комплекснозначные сферические гармоники Y_{Nl} определяются в полярной системе координат с помощью присоединенных функций Лежандра

$$Y_{Nl}(\xi) = (-1)^l k_{Nl} e^{il\varphi} P_N^l(\cos \theta), \quad |l| \leq N.$$

Здесь внешний множитель $(-1)^l$ называется фазовым множителем Кондона — Шортли, а k_{Nl} — нормирующим коэффициентом:

$$k_{Nl} = \sqrt{\frac{2N+1}{4\pi} \frac{(N-l)!}{(N+l)!}}.$$

При комплексном сопряжении сферической гармоники выполняется правило $\overline{Y_{Nl}(\xi)} = (-1)^l Y_{N,-l}(\xi)$, а также имеет место правило четности $Y_{Nl}(-\xi) = (-1)^N Y_{Nl}(\xi)$. Самые младшие сферические гармоники (угловой момент $N = 0, 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{00}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{1,-1}(\xi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\xi_1 - i\xi_2), \\ Y_{10}(\xi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \xi_3, & Y_{11}(\xi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\xi_1 + i\xi_2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что точку (вектор) $\xi \in S^2$ можно записать в терминах этих сферических гармоник:

$$\xi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{1,-1}(\xi) - Y_{1,1}(\xi)) \\ i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{1,-1}(\xi) + Y_{1,1}(\xi)) \\ Y_{1,0}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Известно, что подпространство $\text{span}\{Y_{Nl}, |l| \leq N\}$ всех сферических гармоник степени N является собственным подпространством оператора Бельтрами — Лапласа Δ_ξ , отвечающим собственному значению $-\lambda_N^2 = -N(N+1)$, $\Delta_\xi Y_{Nl}(\xi) = -N(N+1)Y_{Nl}(\xi)$. Размерность этого подпространства равна $2N+1$, поэтому для него можно выбрать ортонормированный базис по-разному.

Скалярные комплекснозначные сферические гармоники $\{Y_{Nl}, |l| \leq N\}_{N \geq 0}$ образуют ортонормированный базис для $L_2(S^2)$, $\int_{S^2} Y_{Nl}(\xi) \overline{Y_{N'l'}}(\xi) d\xi = \delta_N^N \delta_l^{l'}$,

где δ_j^i — символ Кронекера.

Теорема 1 (формула Функа — Гекке). Пусть $f(t) \in L_1(-1, 1)$ — интегрируемая функция одной переменной. Тогда для каждой сферической гармоники Y_{Nl} степени N справедлива формула

$$\int_{S^2} f(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 2\pi Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \int_{-1}^1 f(t) P_N(t) dt, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$ есть скалярное произведение единичных векторов, а $P_N(\cdot)$ — полином Лежандра степени N .

Формула Функа — Гекке полезна для вычисления интегралов по сфере S^2 и играет важную роль в теории сферических гармоник. Более подробную информацию о формуле Функа — Гекке, а также общий обзор сферических гармоник и соответствующих проблем можно найти в монографиях [13–16].

Наряду со скалярными сферическими гармониками Y_{Nl} мы будем использовать векторные сферические гармоники, для определения которых потребуются оператор поверхностного градиента $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ и оператор повернутого поверхностного градиента $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}$ [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Операторы поверхностного градиента на сфере и повернутого поверхностного градиента для гладких функций $u(\boldsymbol{\xi})$ и $v(\boldsymbol{\xi})$ на сфере S^2 определяются по формулам

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u := \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (7)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} v := \boldsymbol{\xi} \times \nabla_{\boldsymbol{\xi}} v := -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta$.

Очевидно, что $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u(\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} u(\boldsymbol{\xi}) = 0$ и $\nabla u \cdot \nabla^{\perp} u = 0$, поэтому ∇u и $\nabla^{\perp} u$ будут касательными (тангенциальными) векторными полями на сфере S^2 . Векторное поле на сфере $\nabla^{\perp} v$ получается вращением поля ∇v на угол $\pi/2$ в касательной плоскости. Поле $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u$ называют полоидальным, электрическим или потенциальным, а $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} v$ — тороидальным, магнитным или соленоидальным. Скалярные функции u и v называются потенциалом скорости и потоковой функцией соответственно.

Если воспользоваться формулами для компонент пространственного градиента ∇u в полярной системе координат

$$(\nabla u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (\nabla u)_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (\nabla u)_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

то можно записать разложение скалярного оператора Лапласа на радиальную и угловую части:

$$\nabla v = \nabla_{\mathbf{x}} v = \left(\frac{\boldsymbol{\xi} \partial}{\partial r} + \frac{\nabla_{\boldsymbol{\xi}}}{r} \right) v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = r \boldsymbol{\xi}, \quad (9)$$

т. е. поверхностный градиент $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ является угловой частью пространственного градиента ∇ . Например,

$$\begin{aligned} \nabla(r^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi})) &= \left(\frac{\boldsymbol{\xi} \partial}{\partial r} + \frac{\nabla_{\boldsymbol{\xi}}}{r} \right) (r^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi})) = r^{N-1} (N \boldsymbol{\xi} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi})), \\ \mathbf{x} &= r \boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
rY_{1,-1}(\boldsymbol{\xi}) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x_1 - \mathbf{i}x_2), \quad rY_{10}(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\xi_3, \\
rY_{11}(x) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x_1 + \mathbf{i}x_2), \\
\nabla rY_{1,-1}(\boldsymbol{\xi}) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(1, -\mathbf{i}, 0)^T, \quad \nabla rY_{10}(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}(0, 0, 1)^T, \\
\nabla rY_{11}(x) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(1, \mathbf{i}, 0)^T.
\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В канонических координатах поверхностная дивергенция $\operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}$ от векторной функции $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = v^1 \mathbf{e}_1(\boldsymbol{\xi}) + v^2 \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\xi}) + v^3 \boldsymbol{\xi}$ на сфере S^2 определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{v} := \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v^1 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} v^2 \right) + 2v^3. \quad (11)$$

Наконец, определим оператор Бельтрами $\Delta \equiv \Delta_{\boldsymbol{\xi}}$, который также называется оператором Бельтрами — Лапласа:

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi}} u(\boldsymbol{\xi}) = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (12)$$

т. е. дивергенция градиента будет оператором Лапласа на сфере S^2 .

Легко проверить, что $\operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} u(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Таким образом, мы говорим, что $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} u$ — потенциальное, а $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} u$ — соленоидальное поле на сфере S^2 . Дополнительные сведения о поверхностных дифференциальных операторах можно найти, например, в монографиях [15–17].

Перейдем к определению векторных сферических гармоник (см. [1, 15–17]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\boldsymbol{\xi} \in S^2$. Положим

$$\mathbf{y}_{00}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\xi} Y_{00}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} / \sqrt{4\pi}. \quad (13)$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $|l| \leq N$ определим на сфере S^2 векторные сферические гармоники $\mathbf{y}_{Nl}^{(j)}(\boldsymbol{\xi})$ трех типов ($j = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\xi} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}), \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) := \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}), \quad (15)$$

$$\mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) := \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad (16)$$

где $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$, $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}$ — операторы поверхностного градиента (7) и (8).

Из определения векторных сферических гармоник (13)–(16) следует, что

$$\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Таким образом, $\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}$ — радиальные векторные поля, тогда как $\mathbf{y}_{Nl}^{(2)}$ и $\mathbf{y}_{Nl}^{(3)}$ — касательные (тангенциальные) векторные поля на сфере S^2 . Система (13)–(16) образует ортогональный базис в функциональном пространстве $\mathbf{L}_2(S^2)$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}, \mathbf{y}_{N'l'}^{(1)})_{\mathbf{L}_2(S^2)} &= \delta_N^{N'} \delta_l^{l'}, \\
(\mathbf{y}_{Nl}^{(2)}, \mathbf{y}_{N'l'}^{(2)})_{\mathbf{L}_2(S^2)} &= (\mathbf{y}_{Nl}^{(3)}, \mathbf{y}_{N'l'}^{(3)})_{\mathbf{L}_2(S^2)} = N(N+1) \delta_N^{N'} \delta_l^{l'}.
\end{aligned}$$

Векторные сферические гармоники возникают естественным образом. Так, формулу (10) можно записать в виде

$$\nabla(r^N Y_{Nl}(\xi)) = r^{N-1} (N \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi)), \quad \mathbf{x} = r\xi,$$

а также

$$\nabla(r^{-N-1} Y_{Nl}(\xi)) = r^{-N-2} (-(N+1) \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi)), \quad \mathbf{x} = r\xi.$$

Обозначим

$$\mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\xi) := N \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi), \quad \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\xi) := -(N+1) \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi).$$

Мы видим, что векторные сферические гармоники $\mathbf{h}_{Nl}^{(i)}$ и $\mathbf{h}_{Nl}^{(e)}$ имеют отношение к гармоническим векторным полям, именно, $\mathbf{h}_{Nl}^{(i)}$ дает граничные значения гармонического поля $\nabla(r^N Y_{Nl}(\xi))$ внутри шара, а $\mathbf{h}_{Nl}^{(e)}$ — граничные значения поля $\nabla(r^{-N-1} Y_{Nl}(\xi))$, гармонического вне шара. Новая система векторных сферических гармоник $\{\mathbf{y}_{00}^{(1)}, \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}, \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}, \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}\}$ также образует ортогональный базис в функциональном пространстве $\mathbf{L}_2(S^2)$.

Для векторных сферических гармоник имеют место векторные формулы Функа — Гекке [1, 15–16]. Векторные формулы Функа — Гекке также будут применяться для вычислений сферических интегралов, в частности для вычисления векторных полей в сферических координатах и их граничных значений на сфере S^2 .

Теорема 2 (формулы Функа — Гекке для векторных сферических гармоник). Пусть $F(t) \in L_1(-1, 1)$ — интегрируемая функция одной переменной на отрезке $(-1, 1)$. Если $N = 0$, то

$$\int_{S^2} \mathbf{y}_{00}^{(1)}(\eta) F(\xi \cdot \eta) d\eta = 2\pi \mathbf{y}_{00}^{(1)}(\xi) \int_{-1}^1 s F(s) ds.$$

При $N \geq 1$ для векторных сферических гармоник (13)–(16) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\eta) F(\xi \cdot \eta) d\eta &= \alpha_{11} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \alpha_{12} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi), \\ \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\eta) F(\xi \cdot \eta) d\eta &= \alpha_{21} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\xi) + \alpha_{22} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\xi), \\ \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\eta) F(\xi \cdot \eta) d\eta &= \alpha_{33} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\xi), \end{aligned}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2N+1} \left(N \int_{-1}^1 F(s) P_{N-1}(s) ds + (N+1) \int_{-1}^1 F(s) P_{N+1}(s) ds \right) = \int_{-1}^1 F(s) s P_N(s) ds,$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2N+1} \left(\int_{-1}^1 F(s) P_{N-1}(s) ds - \int_{-1}^1 F(s) P_{N+1}(s) ds \right) = - \int_{-1}^1 F(s) P_{N+1}^{[1]}(s) ds,$$

$$\alpha_{21} = N(N+1)\alpha_{12}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad \alpha_{33} = \int_{-1}^1 F(s) P_N(s) ds.$$

Здесь

$$P_{N+1}^{[1]}(s) := \int_1^s P_N(t) dt = \frac{P_{N+1}(s) - P_{N-1}(s)}{2N+1}, \quad (17)$$

$$P_{N+1}^{[1]}(-1) = P_{N+1}^{[1]}(1) = 0, \quad N \geq 1.$$

Для векторных сферических гармоник $\mathbf{h}_{Nl}^{(i)}$ и $\mathbf{h}_{Nl}^{(e)}$ имеют место следующие симметричные формулы:

$$\int_{S^2} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\eta}) F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = 2\pi \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) \int_{-1}^1 F(s) P_{N-1}(s) ds,$$

$$\int_{S^2} \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\boldsymbol{\eta}) F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = 2\pi \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\boldsymbol{\xi}) \int_{-1}^1 F(s) P_{N+1}(s) ds.$$

2. Полиномиальные базисы основных пространств $L^2(B^3)$ и $\mathbf{L}^2(B^3)$

2.1. Полиномы Цернике $Z_{Nl}^{(N+2k)}$ и обобщенные полиномы Цернике $Z_{Nl}^{[1](N+2k)}$. Приведем определение полиномов Цернике в шаре B^3 (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Полиномы Цернике $Z_{Nl}^{(N+2k)}$ и обобщенные полиномы Цернике $Z_{Nl}^{[1](N+2k)}$ определяются по формуле

$$Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) := \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad N, k \geq 0, \quad |l| \leq N, \quad (18)$$

$$Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}) := \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) P_{N+2k}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad N, k \geq 0, \quad |l| \leq N, \quad (19)$$

где $C_m^{(3/2)}(\cdot)$ есть полиномы Гегенбауэра степени m и типа $3/2$, а $P_m(\cdot)$ — полиномы Лежандра. Степень полиномов (18) и (19) определяется по верхнему индексу $N+2k$.

С помощью формулы Функа — Гекке (6) полиномы Цернике $Z_{Nl}^{(N+2k)}$ и обобщенные полиномы Цернике $Z_{Nl}^{[1](N+2k)}$ можно записать в полярных координатах $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\xi}$:

$$Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) = 2\pi Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) \int_{-1}^1 P_N(s) C_{N+2k}^{(3/2)}(rs) ds, \quad (20)$$

$$Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}) = 2\pi Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) \int_{-1}^1 P_N(s) P_{N+2k}(rs) ds \quad (21)$$

и вычислить граничные значения при $r = 1$:

$$\begin{aligned} Z_{Nl}^{(N+2k)}(\boldsymbol{\xi}) &= 4\pi Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}), \\ Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} \frac{4\pi}{2N+1} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}), & k = 0, \\ 0, & k \geq 1, \end{cases} \quad \boldsymbol{\xi} \in S^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Норма полиномов Цернике зависит от верхнего индекса — степени полинома [1]:

$$\|Z_{Nl}^{(N+2k)}\|_{L_2(B^3)} = \frac{4\pi}{\sqrt{2N+4k+3}},$$

а граничные значения (22) — от нижнего.

В силу следующего свойства полиномов Лежандра и Гегенбауэра

$$P_m(s) = \frac{C_m^{(3/2)}(s) - C_{m-2}^{(3/2)}(s)}{2m+1}$$

мы можем выразить обобщенные полиномы $Z_{Nl}^{[1](N+2k)}$ через полиномы Цернике $Z_{Nl}^{(N+2k)}$. Получим

$$Z_{Nl}^{[1](N)} = \frac{Z_{Nl}^{(N)}}{2N+1}, \quad Z_{Nl}^{[1](N+2k)} = \frac{Z_{Nl}^{(N+2k)} - Z_{Nl}^{(N+2k-2)}}{2N+4k+1}, \quad k \geq 1. \quad (23)$$

Система полиномов Цернике $\{Z_{Nl}^{(N+2k)}, |l| \leq N\}_{N,k \geq 0}$ образует ортогональный базис пространства $L_2(B^3)$. Система $\{Z_{Nl}^{[1](N+2k)}, |l| \leq N\}_{N,k \geq 0}$ также будет базисом пространства $L_2(B^3)$. В силу (23) процесс ортогонализации Грама — Шмидта этой системы приведет нас к ортогональному базису из полиномов Цернике $Z_{Nl}^{(N+2k)}$. При $k = 0$ полиномы $Z_{Nl}^{(N)}$ являются однородными гармоническими полиномами (лапласовыми шаровыми функциями), $\Delta Z_{Nl}^{(N)} = 0$, $Z_{Nl}^{(N)}(\mathbf{x}) = 4\pi |\mathbf{x}|^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x} = |\mathbf{x}| \boldsymbol{\xi}$ и образуют ортогональный базис в подпространстве гармонических функций $\text{Harm}(B^3) = \overline{\text{span}}\{Z_{Nl}^{(N)}, |l| \leq N\}_{N \geq 0}$ — пространстве Бергмана. Гармонические полиномы Цернике первой степени имеют вид

$$\begin{aligned} Z_{1,-1}^{(1)}(\mathbf{x}) &= 4\pi \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x_1 - ix_2), \quad Z_{10}^{(1)}(\mathbf{x}) = 4\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x_3, \\ Z_{11}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -4\pi \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x_1 + ix_2). \end{aligned}$$

При $k = 0$ из (23) получаем $Z_{Nl}^{[1](N)} = \frac{Z_{Nl}^{(N)}}{2N+1}$, т. е. $Z_{Nl}^{[1](N)}$ есть гармонические функции. Исключая из рассмотрения гармонические полиномы $Z_{Nl}^{[1](N)}$, видим, что система $\{Z_{Nl}^{[1](N+2k)}, |l| \leq N\}_{N \geq 0, k \geq 1}$ будет базисом однородного пространства $H_0^1(B^3)$, ортогональным относительно скалярного произведения (3). Ортогональность следует из равенства

$$\nabla Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}),$$

так как потенциальные векторные поля $\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}$ ортогональны в пространстве $\mathbf{L}_2(B^3)$ [1]. Для L_2 - и H_0^1 -норм имеют место формулы

$$\begin{aligned}\|Z_{Nl}^{[1](N+2k)}\|_{L_2} &= 4\pi \sqrt{\frac{2(2N+4k+1)}{(2N+4k-1)(2N+4k+3)}}, \\ \|Z_{Nl}^{[1](N+2k)}\|_{H_0^1} &= \|\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}\|_{L_2} = \frac{4\pi}{\sqrt{2N+4k+1}}.\end{aligned}$$

2.2. Спектральный базис пространств $L^2(B^3)$ и $H_0^1(B^3)$. Пусть $\lambda_N^{(1)} < \lambda_N^{(2)} < \dots < \lambda_N^{(m)} < \dots$ — положительные корни уравнения $j_N(\lambda) = 0$, $j_N(\lambda_N^{(m)}) = 0$. Известно (см. [18]), что система собственных функций $\{\psi_{Nl}^{(m)} : |l| \leq N\}_{N \geq 0, m \geq 1}$, где

$$-\Delta \psi_{Nl}^{(m)} = \lambda_N^{(m)} \psi_{Nl}^{(m)}, \quad \psi_{Nl}^{(m)}(\mathbf{x}) = 4\pi i^N j_N(\lambda_N^{(m)}|\mathbf{x}|) Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) \in H_0^1(B^3),$$

образует базис в пространствах $L_2(B^3)$ и $H_0^1(B^3)$, причем ортогональный как в $L_2(B^3)$, так и в однородном пространстве $H_0^1(B^3)$ в смысле скалярных произведений (1) и (3) соответственно. Здесь $j_N(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{N+1/2}(r)$ — сферическая функция Бесселя первого рода, где $J_\nu(z)$ есть функции Бесселя первого рода:

$$J_{N+1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{N+2k+1/2}}{2^{N+2k+1/2} k! \Gamma(N+k+3/2)}.$$

Следующая формула дает разложение гармонической функции (шарового полинома) по спектральному базису:

$$Z_{Nl}^{(N)}(\mathbf{x}) = 8\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) j_N(\lambda_N^{(m)} r)}{\lambda_N^{(m)} j_{N+1}(\lambda_N^{(m)})}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (24)$$

2.3. Соленоидальные и потенциальные полиномиальные векторные поля в шаре. В работе [1] для пространства $\mathbf{L}^2(B^3)$ векторных полей в единичном шаре построен ортогональный базис из полиномиальных вектор-функций в соответствии с разложением Гельмгольца, т. е. с подразделением базиса на три части: потенциальную, гармоническую и соленоидальную. Именно, $\{\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}, |l| \leq N\}_{N \geq 1}$ — ортогональный базис пространства гармонических полей $\nabla \text{Harm}(B^3)$, $\{\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k+1)}, |l| \leq N\}_{N, k \geq 0}$ — ортогональный базис пространства потенциальных полей $\nabla H_0^1(B^3)$ и $\{\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k+1)}, \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}, |l| \leq N\}_{N \geq 1, k \geq 0}$ — ортогональный базис пространства соленоидальных векторных полей $\mathbf{H}_0(\text{div} = 0)$. Таким образом, в основном пространстве $\mathbf{L}^2(B^3)$ у нас имеется ортогональный полиномиальный базис и для каждой вектор-функции $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(B^3)$ справедливо единственное разложение (ряд Фурье)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + \mathbf{h} + \mathbf{J},$$

где

$$\mathbf{p} = \nabla v = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l f_{Nl}^{(N+2k+1)A} \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k+1)}(\mathbf{x}) \text{ — потенциальная часть;}$$

$\mathbf{h} = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_l f_{Nl}^{(N-1)H} \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x})$ — гармоническая часть;
 $\mathbf{J} = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l f_{Nl}^{(N+2k+1)B} \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k+1)}(\mathbf{x}) + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l f_{Nl}^{(N+2k)C} \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x})$ — соленоидальная часть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определим в шаре B^3 векторные поля, следуя работе [1]:

$$\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) := \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad N, k \geq 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) := \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad N \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) := \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad N \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (27)$$

где для удобства считаем $\mathbf{A}_{00}^{(-1)}(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Заметим, что в этом определении учтены все варианты значений целых переменных N и k , для которых данные интегралы существуют и не равны нулю. Как и для полиномов Цернике, верхний индекс в круглых скобках указывает на степень векторного полинома от переменных x_1, x_2 и x_3 . Из определения векторных полиномов можно получить их явный вид, однако в настоящей работе явный вид не используется. Интегральные определения (25)–(27) позволяют изучать свойства векторных полиномов, не прибегая к их явному виду.

Система векторных полей (25)–(27) допускает другую систему индексирования (n, k, l) , при которой группируются векторные полиномы одной степени n :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n-1-2k,l}^{(n)} & \quad k = 0, \dots, [(n-1)/2], \quad |l| \leq n-1-2k, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{B}_{n+1-2k,l}^{(n)} & \quad k = 0, \dots, [n/2], \quad |l| \leq n+1-2k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{C}_{n-2k,l}^{(n)} & \quad k = 0, \dots, [(n-1)/2], \quad |l| \leq n-2k, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Индексирование в (25)–(27) удобно тем, что не делает различия в четности степени полиномов.

Можно сказать, что формулы (25)–(27) являются обобщением полиномов Цернике (20) на векторный случай. При построении базисных векторных полей используются векторные сферические гармоники и полиномы Гегенбауэра. Очевидно, что многие свойства векторных полиномов, как и полиномов Цернике, связаны со свойствами полиномов Гегенбауэра. Например, полиномиальные векторы $\text{rot } \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}$ и $\text{rot } \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ можно вычислять в виде разложений по базису

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)} &= \sum_{s=0}^{k-1} (2N+4s+3) \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2s)}, \\ \text{rot } \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)} &= - \sum_{s=0}^k (2N+4s+1) \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2s-1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\frac{d}{ds} C_n^{(3/2)}(s) = 3C_{n-1}^{(5/2)}(s) = \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} (2n-4s+1) C_{n-1-2s}^{(3/2)}(s).$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{B}_{Nl}^{(N+1)} &= (2N+3)\mathbf{C}_{Nl}^{(N)}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{C}_{Nl}^{(N)} = -(2N+1)\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2)} &= -(2N+1)\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)} - (2N+5)\mathbf{B}_{Nl}^{(N+1)}.\end{aligned}$$

При ограничении $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} \in S^2$ мы видим, что векторные поля $\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k+1)}$, $\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k+1)}$ и $\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ при $k \geq 0$ совпадают с векторными сферическими гармониками (14)–(16):

$$\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k+1)}(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}), \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k+1)}(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \quad (30)$$

$$\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi \mathbf{y}_{N,l}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (31)$$

Первые векторные полиномы в формулах (25) и (26) дают нам гармонические векторные поля:

$$\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta},$$

которые на границе принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N-1}^{(3/2)}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \frac{4\pi}{2N+1} (N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{4\pi}{2N+1} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N-1}^{(3/2)}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \frac{4\pi(N+1)}{2N+1} (N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{4\pi(N+1)}{2N+1} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда следует равенство

$$\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N+1} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}).$$

Поэтому при формировании базиса надо учитывать что-то одно: $\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}$ или $\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. В качестве стандартного гармонического векторного поля возьмем $\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) &:= \\ &= \int_{S^2} (N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta})) C_{N-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \int_{S^2} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\eta}) C_{N-1}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}.\end{aligned} \quad (34)$$

Тогда

$$\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = N\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}).$$

На границе выполняется равенство

$$\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) = N\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi(N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) = 4\pi\mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}).$$

Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2N+1}\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) &= \frac{N+1}{2N+1}\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \nabla Z_{Nl}^{(N)}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

где $Z_{Nl}^{(N)}$ есть гармонический полином Цернике. Вычислим норму $\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}$. Имеем

$$\|\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} = \sqrt{\frac{16\pi^2 N(N+1)^2}{(2N+1)^2}} = \frac{N+1}{2N+1}\|\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} \Rightarrow \|\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} = 4\pi\sqrt{N}.$$

Для примера приведем гармонические векторные поля-константы, $N-1=0$. Их должно быть три: $l=-1, 0, 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1,-1}^{(0)} &= \nabla Z_{1,-1}^{(1)} = 4\pi\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(1, -i, 0)^T, \quad \mathbf{H}_{10}^{(0)} = \nabla Z_{10}^{(1)} = 4\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(0, 0, 1)^T, \\ \mathbf{H}_{11}^{(0)} &= \nabla Z_{11}^{(1)} = -4\pi\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(1, i, 0)^T.\end{aligned}$$

3. ПОЛОИДАЛЬНО-ТОРОИДАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В этом разделе для соленоидальных базисных полей покажем, что $\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}$ — тороидальные, а $\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ — полоидальные векторные поля, и в результате разложения соленоидального векторного поля в шаре по этому базису получим полоидально-тороидальное разложение.

Пусть t и p — скалярные функции, тогда рассмотренные выше дифференциальные операторы (7), (8) и (12) возникают естественно при вычислении $\text{rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x}))$ и $\text{rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x}))$ через сферические координаты $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\xi}$ (см. формулу (2.2) в [19]). А именно, имеют место равенства

$$\text{rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})) = -\mathbf{x} \times \nabla t(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial t}{\partial\varphi} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial t}{\partial\theta} \mathbf{e}_2 = -\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} t, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}\text{rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x})) &= -\frac{\boldsymbol{\xi}}{r} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial p}{\partial\theta} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial p}{\partial\varphi} \mathbf{e}_2 \right) \\ &= -\frac{\boldsymbol{\xi}}{r} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nabla_{\boldsymbol{\xi}} p(r\boldsymbol{\xi}).\end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что $\mathbf{x} \times \nabla$ — оператор углового момента (оператор количества движения) из квантовой механики и при его повторном применении мы получим угловую часть оператора Лапласа:

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{x} \times \nabla)^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Соленоидальные поля

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})), \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x}))$$

называются тороидальным и полоидальным полем соответственно. Скалярные функции t и p в этих представлениях называются скалярными потенциалами.

Учитывая формулы (35) и (36), имеем

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\xi}^{\perp} t(r\xi), \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}) = -\frac{\xi}{r} \Delta_{\xi} p + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nabla_{\xi} p(r\xi), \quad \mathbf{x} = r\xi, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (37)$$

Векторное поле $\mathbf{P}$ будет полоидальным, если оно является ротором тороидального поля; другими словами, если существует скалярное поле p такое, что $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x}))$. Таким образом, ротор тороидального поля полоидален и, наоборот, ротор полоидального поля является тороидальным полем. Каждое тороидальное поле является соленоидальным, так как дивергенция от ротора равна нулю.

Из представления (37) видно, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) = 0$, поэтому силовые линии (линии тока) тороидального векторного поля лежат на сферических поверхностях $r = \text{const} \leq 1$, что используется для визуализации таких векторных полей. Соленоидальное векторное поле $\mathbf{T}$ будет тороидальным тогда и только тогда, когда оно тангенциально на всех сферах с центром в начале координат, т. е. не имеет радиальной компоненты.

При действии векторного лапласиана на тороидальные и полоидальные поля имеют место следующие соотношения [5, 20]: если поле $\mathbf{T}$ тороидально, то $\Delta \mathbf{T} = \text{rot}(\mathbf{x} \Delta t(\mathbf{x}))$, и если поле $\mathbf{P}$ полоидально, то $\Delta \mathbf{P} = \text{rot rot}(\mathbf{x} \Delta p(\mathbf{x}))$.

Определение 7 симметрично в том смысле, что ротор тороидального поля будет полоидальным полем и, наоборот, ротор полоидального — тороидальным. В самом деле,

$$\text{rot rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x})) = -\Delta \text{rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x})) = -\text{rot}(\mathbf{x} \Delta p(\mathbf{x})). \quad (38)$$

Напомним, что любое соленоидальное поле $\mathbf{J}$ можно разложить в сумму тороидального $\mathbf{T}$ и полоидального $\mathbf{P}$ полей:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})) + \text{rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x})),$$

где t и p — некоторые подходящие скалярные функции. Тороидально-полоидальное разложение является единственным, если потребовать, чтобы средние значения скалярных полей t и p обращались в нуль на любой сфере радиуса $0 < r \leq 1$.

Покажем известный способ решения задачи разложения (см. [4]; формула (2.39) в [20]). Используя представления (37) в искомом разложении, получим равенство

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}) = -\frac{\xi}{r} \Delta_{\xi} p + \frac{1}{r} \nabla_{\xi} p(r\xi) + \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{\xi} p(r\xi) - \nabla_{\xi}^{\perp} t(r\xi), \quad \mathbf{x} = r\xi.$$

После скалярного умножения на $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\Delta_{\xi} p(\mathbf{x})$. Значит, скалярную функцию p можно определить через обращение оператора Бельтрами — Лапласа. Если далее рассмотреть ротор векторного поля $\mathbf{J}$

$$\text{rot } \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \text{rot rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})) + \text{rot rot rot}(\mathbf{x}p(\mathbf{x}))$$

$$= \text{rot rot}(\mathbf{x}t(\mathbf{x})) - \text{rot}(\mathbf{x} \Delta p(\mathbf{x})) = -\frac{\xi}{r} \Delta_{\xi} t + \dots,$$

то, аналогично предыдущему, получается уравнение $\mathbf{x} \cdot \text{rot } \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\Delta_{\xi} t(\mathbf{x})$. Скалярный тороидальный потенциал t также определяется обращением оператора Δ_{ξ} . Так как обратный оператор Бельтрами — Лапласа нужно вычислять при всех значениях параметра r , $0 < r \leq 1$, то возникает условие для единственности разложения: средние значения скалярных полей t и p обращаются в нуль на каждой сфере радиуса r :

$$\int_{S^2} t(r\xi) d\xi = \int_{S^2} p(r\xi) d\xi = 0, \quad \text{а также} \quad t(\mathbf{0}) = p(\mathbf{0}) = 0.$$

Теорема 3. Пусть функции f, F заданы на отрезке $[-1, 1]$ и $f = F'$. Тогда векторное поле вида $\int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}$ будет тороидальным полем с потенциалом $t(\mathbf{x}) = - \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}$, а векторное поле $\int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}$ — полоидальным с потенциалом $p(\mathbf{x}) = \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}$:

$$\operatorname{rot} \left(\underbrace{\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}}_{=t(\mathbf{x})} \right) = - \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad (39)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\underbrace{\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}}_{=p(\mathbf{x})} \right) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (39). Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \right) &= - \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= - \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta} f'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{x} f'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} \times \underbrace{(\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta}) f'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta})}_{=\nabla_{\boldsymbol{\eta}} f} d\boldsymbol{\eta} = \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} \times \nabla_{\boldsymbol{\eta}} f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) \nabla_{\boldsymbol{\eta}}^{\perp} f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = - \int_{S^2} \nabla_{\boldsymbol{\eta}}^{\perp} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= - \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

Здесь использовалась формула интегрирования по частям на сфере для оператора $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}$

$$\int_{S^2} u(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} v(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = - \int_{S^2} v(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} u(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Заметим, что для оператора $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_{S^2} u(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} v(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = - \int_{S^2} v(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} u(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + 2 \int_{S^2} \boldsymbol{\xi} u(\boldsymbol{\xi}) v(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

При доказательстве (40) мы учтем предыдущие выкладки, тогда получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \right) &= - \operatorname{rot} \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) \times \boldsymbol{\eta} F'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) f(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Использование формул (39) и (40) покажем на примере вывода формулы (38), которая упоминалась ранее. Применим к (40) оператор ротора

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\underbrace{\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}}_{=p} \right) &= \operatorname{rot} \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) F'(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{S^2} \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) F''(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) F''(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \\ &\stackrel{(39)}{=} -\operatorname{rot} \left(\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F''(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \right) = -\operatorname{rot} \left(\mathbf{x} \Delta \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) F(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \right). \end{aligned}$$

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 4. Соленоидальные векторные поля $\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}$ и $\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ основного базиса (26), (27) образуют ортогональную систему полоидальных и тороидальных векторных полей в $\mathbf{L}^2(B^3)$. Именно, поле $\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}$ является полоидальным векторным полем:

$$\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x})), \quad (41)$$

а поле $\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ — тороидальным:

$$\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) = -\operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \times \nabla Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}). \quad (42)$$

Средние значения скалярных потенциалов $-Z_{Nl}^{(N+2k)}$ и $Z_{Nl}^{[1](N+2k)}$ на каждой сфере радиуса $0 < r \leq 1$ равны нулю:

$$\int_{S^2} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(r\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{S^2} Z_{Nl}^{(N+2k)}(r\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad N = 1, 2, \dots$$

Разложение соленоидального векторного поля $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(B^3)$ по основному базису является полоидально-тороидальным разложением

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\mathbf{x} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l J_{Nl}^{(N+2k-1)B} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}) \right) \\ &\quad + \operatorname{rot} \left(-\mathbf{x} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l J_{Nl}^{(N+2k)C} Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l J_{Nl}^{(N+2k-1)B} \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) \text{ — полоидальная часть;} \\ \mathbf{T} &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_l J_{Nl}^{(N+2k)C} \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) \text{ — тороидальная часть.} \end{aligned}$$

Выражения в скобках определяют полоидальный и тороидальный потенциалы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся теоремой 3, полагая $f(s) = C_{N+2k}^{(3/2)}(s)$ в формуле (39) и $F(s) = P_{N+2k}(s)$ в формуле (40). Тогда

$$Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) C_{N+2k}^{(3/2)}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta},$$

$$Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) P_{N+2k}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}.$$

Теорема 4 доказана.

Общие свойства полоидальных и тороидальных полей теперь переносятся на векторные полиномы $\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}$ и $\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}$, например,

$$\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} Z_{Nl}^{(N+2k)}(r\boldsymbol{\xi}),$$

$$\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) = -\frac{\boldsymbol{\xi}}{r} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(r\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(r\boldsymbol{\xi}),$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) = -\Delta_{\boldsymbol{\xi}} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x}),$$

которые также можно получить непосредственно, воспользовавшись векторной теоремой Функа — Гекке.

Пусть теперь $f(s) = e^{i\lambda s}$ и $F(s) = e^{i\lambda s}/(i\lambda)$. Тогда по теореме 3 имеем

$$\text{rot} \left(\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta} \right) = - \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta},$$

$$\text{rot rot} \left(\mathbf{x} \int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta} \right) = i\lambda \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{J}_{Nl}^{(3)}(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta}.$$

В результате получим тороидальные и полоидальные поля, зависящие от параметра λ . Из формул Функа — Гекке следует

$$\mathbf{J}_{Nl}^{(3)}(\mathbf{x}, \lambda) = 4\pi i^N j_N(\lambda r) \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda) = \alpha_{21} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \alpha_{22} 2\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$$

$$= 4\pi i^{N-1} \frac{(N+1)j_{N-1}(\lambda r)}{2N+1} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) + 4\pi i^{N+1} N j_{N+1}(\lambda r) \frac{\mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\boldsymbol{\xi})}{2N+1},$$

$$\int_{S^2} Y_{Nl}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta} = 4\pi i^N j_N(\lambda) Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}).$$

При выводе этих соотношений использовалась формула

$$\int_{-1}^1 P_N(s) e^{i\lambda r s} ds = 2i^N j_N(\lambda r).$$

Дальше построение полоидально-тороидального базиса связано со способом выбора параметра λ , т. е. предполагает использование спектральных задач для векторного Лапласиана.

1. Рассмотрим случай, когда тороидальные и полоидальные поля обращаются в нуль на границе сферы (см. [4, 5]). Для этого нам надо определить параметр λ . В тороидальном случае имеем

$$\mathbf{J}_{Nl}^{(3)}(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) e^{i\lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} d\boldsymbol{\eta} = 4\pi i^N j_N(\lambda r) \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}).$$

Так как требуется $\mathbf{J}_{Nl}^{(3)}(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbf{H}_0^1(B^3)$, то получаем условие $j_N(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_N^{(m)} \Rightarrow \mathbf{J}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}, \lambda_N^{(m)}) = 0$. Тороидные потенциалы имеют вид

$$t_{Nl}(\mathbf{x}, \lambda_N^{(m)}) = -4\pi i^N j_N(\lambda_N^{(m)} r) Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}). \quad (43)$$

В полоидальном случае имеем

$$\mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{4\pi i^{N-1}(N+1)}{2N+1} j_{N-1}(\lambda r) \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{4\pi i^{N+1}N}{2N+1} j_{N+1}(\lambda r) \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (44)$$

Сначала занулим на границе второе слагаемое, полагая

$$\lambda = \lambda_{N+1}^{(m)}, \quad j_{N+1}(\lambda_{N+1}^{(m)}) = 0.$$

Получим

$$i\lambda_{N+1}^{(m)} \mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \lambda_{N+1}^{(m)}) = 4\pi i^N \frac{(N+1)\lambda_{N+1}^{(m)} j_{N-1}(\lambda_{N+1}^{(m)})}{2N+1} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}).$$

Видим, что это след гармонического поля, так как

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{4\pi(N+1)}{2N+1} \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}(\boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) &= \text{rot rot}(\mathbf{x} Z_{Nl}^{[1](N)}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2N+1} \text{rot rot}(\mathbf{x} Z_{Nl}^{(N)}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Откуда искомое полоидальное векторное поле

$$\tilde{\mathbf{J}}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda_{N+1}^{(m)}) := i\lambda_{N+1}^{(m)} \mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda_{N+1}^{(m)}) - i^N \lambda_{N+1}^{(m)} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x})$$

обладает нужным свойством $\tilde{\mathbf{J}}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \lambda_{N+1}^{(m)}) = 0$ или $\tilde{\mathbf{J}}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda_{N+1}^{(m)}) \in \mathbf{H}_0^1(B^3)$. Полоидальный потенциал в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{Nl}(\mathbf{x}, \lambda_{N+1}^{(m)}) &= 4\pi i^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) j_N(\lambda_{N+1}^{(m)} r) - i^N \lambda_{N+1}^{(m)} j_{N-1}(\lambda_{N+1}^{(m)}) Z_{Nl}^{[1](N)}(\mathbf{x}) \\ &= 4\pi i^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) \left(j_N(\lambda_{N+1}^{(m)} r) - \frac{\lambda_{N+1}^{(m)} j_{N-1}(\lambda_{N+1}^{(m)})}{2N+1} r^N \right) \\ &= 4\pi i^N Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) (j_N(\lambda_{N+1}^{(m)} r) - j_N(\lambda_{N+1}^{(m)}) r^N), \end{aligned}$$

так как

$$j_N(\lambda_{N+1}^{(m)}) = \frac{\lambda_{N+1}^{(m)} j_{N-1}(\lambda_{N+1}^{(m)})}{2N+1}.$$

2. Следующий случай рассматривался в работе [6]. Тороидальные потенциалы определялись, как и выше, по формуле (43), а для полоидальных полей требовалось условие их непрерывного продолжения вне сферы как гармонических полей. Для этого нам надо в (44) занулить первое слагаемое, положив $\lambda = \lambda_{N-1}^{(m)}$, $j_{N-1}(\lambda_{N-1}^{(m)}) = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{Nl}^{(2)}(\mathbf{x}, \lambda_{N-1}^{(m)}) &= \frac{4\pi i^{N+1} N}{2N+1} j_{N+1}(\lambda_{N-1}^{(m)} r) \mathbf{h}_{Nl}^{(e)}(\boldsymbol{\xi}), \\ p_{Nl}(\mathbf{x}, \lambda_{N-1}^{(m)}) &= 4\pi i^{N-1} Y_{Nl}(\boldsymbol{\xi}) \frac{j_N(\lambda_{N-1}^{(m)} r)}{\lambda_{N-1}^{(m)}}. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полиномиальная система векторных полей (25)–(27) представляет собой полную ортогональную систему в пространстве $\mathbf{L}_2(B^3)$, а разложение Фурье векторного поля по этому базису осуществляет разложение Гельмгольца (5). В работе показано, что разложение соленоидального векторного поля по этому базису дает также и полоидально-тороидальное разложение (разложение Ми). Таким образом, в настоящей работе предложена полиномиальная ортогональная система тороидальных и полоидальных векторных полей в шаре.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ (25)–(27)

Гармонические и полоидальные поля при $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)} &= \nabla Z_{Nl}^{[1](N)} = \frac{\nabla Z_{Nl}^{(N)}}{2N+1}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}|_{S^2} &= \frac{4\pi(N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)} + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)})}{2N+1}, \quad \|\mathbf{A}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{4\pi\sqrt{N}}{2N+1}. \end{aligned}$$

Потенциальные поля при $N \geq 0$, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)} &= \nabla Z_{Nl}^{[1](N+2k)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)} = \sum_{s=0}^{k-1} (2N+4s+3) Z_{Nl}^{(N+2s)}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}|_{S^2} = 4\pi\mathbf{y}_{Nl}^{(1)}, \quad \|\mathbf{A}_{Nl}^{(N+2k-1)}\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{4\pi}{\sqrt{2N+4k+1}}. \end{aligned}$$

Гармонические и полоидальные поля при $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)} &= (N+1)\nabla Z_{Nl}^{[1](N)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}|_{S^2} &= \frac{4\pi(N+1)(N\mathbf{y}_{Nl}^{(1)} + \mathbf{y}_{Nl}^{(2)})}{2N+1}, \\ \|\mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} &= \frac{4\pi(N+1)\sqrt{N}}{2N+1}, \quad \mathbf{B}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{[1](N)}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Соленоидальные и полоидальные поля при $N \geq 1, k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)} &= -\operatorname{rot} \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}(\boldsymbol{\eta}) P_{N+2k}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)} &= \sum_{s=0}^{k-1} (2N+4s+3) \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2s)}, \quad \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}|_{S^2} = 4\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}, \\ \|\mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}\|_{\mathbf{L}_2} &= 4\pi \sqrt{\frac{N(N+1)}{2N+4k+1}}, \quad \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2k-1)}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{[1](N+2k)}(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

Соленоидальные и тороидальные поля при $N \geq 1, k \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)} &= \operatorname{rot} \int_{S^2} \mathbf{y}_{Nl}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}) P_{N+2k+1}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad \operatorname{div} \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)} &= -\sum_{s=0}^k (2N+4s+1) \mathbf{B}_{Nl}^{(N+2s-1)}, \quad \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}|_{S^2} = 4\pi \mathbf{y}_{Nl}^{(3)}, \\ \|\mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}\|_{\mathbf{L}_2} &= 4\pi \sqrt{\frac{N(N+1)}{2N+4k+3}}, \\ \mathbf{C}_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}) &= -\operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \times \nabla Z_{Nl}^{(N+2k)}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Гармонические и полоидальные поля при $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)} &= \nabla Z_{Nl}^{(N)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}|_{S^2} = 4\pi \mathbf{h}_{Nl}^{(i)}, \\ \|\mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}\|_{\mathbf{L}_2} &= 4\pi \sqrt{N}, \quad \mathbf{H}_{Nl}^{(N-1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N+1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{x} Z_{Nl}^{(N)}(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster Th.* Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions // J. Inverse Ill-Posed Problem. 2007. V. 15, N 1. P. 19–55.
2. *Backus G. E.* Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling // Rev. Geophys. 1986. V. 24. P. 75–109.
3. *Backus G., Parker R., Constable C.* Foundations of Geomagnetism. Cambridge: Univ. Press, 1996.
4. *Быков В. М.* Течения Стокса в шаре // Прикл. механика и техн. физика. 1980. № 2. С. 65–70.
5. *Rummler B.* The eigenfunctions of the Stokes operator in the open unit ball and in the open spherical annulus // 8 Asian Computational Fluid Dynamics Conf. Hong Kong, 10–14 January, 2010; ACFD0163-T001-A-001-3
6. *Водинчар Г. М., Крутьева Л. К.* Базисные системы для геомагнитного поля // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. Вып. 1(1). С. 24–30.
7. *Roberts P. H., King E.* On the genesis of the Earth's magnetism // Reports on Progress in Physics. 2013. V. 76, N 9; 096801.
8. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
9. *Auchmuty G.* Orthogonal decompositions and bases for three-dimensional vector fields // Numer. Funct. Anal. Optim. 1994. V. 15, N 5–6. P. 455–488.
10. *Kozono H., Yanagisawa T.* L^r -variational inequality for vector fields and the Helmholtz—Weyl decomposition in bounded domains // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 4. P. 1853–1920.

11. Amick Ch. J. Decomposition theorems for solenoidal vector fields // J. Lond. Math. Soc. 1977. N 2. P. 288–296.
12. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Methods for Navier—Stokes Equations. Theory and Algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986.
13. Atkinson K., Han H. Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction. V. 2044. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2012.
14. Muller C. Spherical Harmonics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1966. (Lecture Notes in Mathematics. V. 17).
15. Freedon W., Schreiner M. Spherical Functions of Mathematical Geosciences. A Scalar, Vectorial, and Tensorial Setup. Berlin: Springer-Verl., 2009.
16. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
17. Nedelec J.-C. Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems. N. Y.: Springer-Verl., 2001. (Applied Mathematical Sciences. V. 144).
18. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
19. Ivers D. J. Kinematic dynamos in spheroidal geometries // Proc. Roy. Soc. A473. 20170432, 2017; <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2017.0432>
20. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 8 апреля 2019 г.

После доработки 8 апреля 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Казанцев Сергей Гаврилович

Институт математики им. С.П. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

630090 г. Новосибирск

Кардаков Виктор Борисович

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

ул. Ленинградская, 113

630113 г. Новосибирск

E-mail: kazan@math.nsc.ru