Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. I. Matveeva, Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 96–103

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.308>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.210.77.194

April 26, 2023, 13:39:30

ОЦЕНКИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*)

И. И. Матвеева

Рассмотрен класс линейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами. Используя специальный класс функционалов Ляпунова — Красовского, установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности.

Ключевые слова: системы с запаздыванием нейтрального типа, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.308

Работа посвящена исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\frac{dy(t - \tau)}{dt}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T -периодическими элементами, т. е.

$$A(t + T) \equiv A(t), \quad B(t + T) \equiv B(t), \quad C(t + T) \equiv C(t),$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания. Наша цель — получить условия экспоненциальной устойчивости решений и установить оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений при $t \rightarrow \infty$.

Исследованию проблемы устойчивости посвящено большое число работ (см., например, монографии [1–11] и имеющуюся в них библиографию). Для получения условий устойчивости исследователи часто используют функционалы Ляпунова — Красовского (типа Ляпунова) (например, см. библиографию в обзорах [12, 13]). Однако не каждый функционал Ляпунова — Красовского позволяет получать оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Много работ посвящено уравнениям с постоянными коэффициентами, включая уравнения нейтрального типа. В неавтономном случае число таких работ существенно меньше, особенно в случае, когда матрица $C(t)$ не является постоянной.

Данная работа продолжает наши исследования экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

и периодическими коэффициентами в линейных членах (см., например, работы [14–18]). В [14, 15] рассматривались системы с $C(t) \equiv 0$, в [16, 17] — системы, когда $C(t) \equiv C$ — постоянная матрица, в [18] — системы, когда $C(t)$ — T -периодическая матрица. Были указаны условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности. При получении этих результатов авторы перечисленных работ использовали введенные ими функционалы Ляпунова — Красовского.

Выбор подходящего функционала Ляпунова — Красовского позволяет для более широкого класса систем устанавливать экспоненциальную устойчивость и получать более точные оценки скорости убывания решений на бесконечности. В данной работе на решениях системы (1) мы вводим класс функционалов Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t-\tau}^t \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

В частности, он содержит функционалы, предложенные в работах [14–18]. В работах [14, 15] предложены функционалы, где

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в работах [16, 17] — функционалы, где

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C \\ -C^*H(t) & C^*H(t)C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в работе [18] — функционалы, где

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & L(s) \end{pmatrix}.$$

В разд. 1 вводятся необходимые обозначения и формулируются основные результаты, их доказательство проводится в разд. 2.

1. Основные результаты. Введем матрицы размера $2n \times 2n$:

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K_1(t, s) & K_2(t, s) \\ K_2^*(t, s) & K_3(t, s) \end{pmatrix}$$

такие, что

$$\mathcal{H}(t) \in C(\mathbb{R}_+) \cap C^1([lT, (l+1)T]), \quad l = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t+T), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t) \|u\|^2, \quad u, v \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $h(t) > 0$ — непрерывная T -периодическая функция,

$$\mathcal{K}(t, s) \in C^1([0, \infty) \times [0, \tau]), \quad (5)$$

$$\mathcal{K}(t, s) = \mathcal{K}^*(t, s), \quad \mathcal{K}(t, s) = \mathcal{K}(t+T, s), \quad \mathcal{K}(t, s) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad s \in [0, \tau]. \quad (6)$$

Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что S — положительно (или отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц используем спектральную норму.

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

с элементами

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= -\frac{dH_1(t)}{dt} - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) \\ &\quad - K_1(t, 0) - K_2(t, 0)A(t) - A^*(t)K_2^*(t, 0) - A^*(t)K_3(t, 0)A(t), \\ Q_{12}(t) &= -\frac{dH_2(t)}{dt} - H_1(t)B(t) - A^*(t)H_2(t) - K_2(t, 0)B(t) - A^*(t)K_3(t, 0)B(t), \\ Q_{13}(t) &= -H_1(t)C(t) - H_2(t) - K_2(t, 0)C(t) - A^*(t)K_3(t, 0)C(t), \\ Q_{22}(t) &= -\frac{dH_3(t)}{dt} - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) + K_1(t, \tau) - B^*(t)K_3(t, 0)B(t), \\ Q_{23}(t) &= -H_2^*(t)C(t) - H_3(t) + K_2(t, \tau) - B^*(t)K_3(t, 0)C(t), \\ Q_{33}(t) &= K_3(t, \tau) - C^*(t)K_3(t, 0)C(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 1. Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t, s)$, удовлетворяющие условиям (2)–(6), такие, что для матрицы $Q(t)$ в (7) справедливо неравенство

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

где $p(t)$ — T -периодическая функция, $p(t) \in C([lT, (l+1)T])$, $l = 0, 1, \dots$. Если существует T -периодическая функция $k(t)$ такая, что

$$\frac{\partial K(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial K(t, s)}{\partial s} + k(t)K(t, s) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad s \in [0, \tau], \quad (10)$$

и

$$\int_0^T \gamma(\xi) d\xi > 0, \quad \text{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \quad (11)$$

тогда нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1):

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\frac{dy(t - \tau)}{dt}, \quad t > 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi(t) \in C^1[-\tau, 0]$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений начальной задачи (12), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (12) имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right), \quad t > 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} V(0, \varphi) = & \left\langle \mathcal{H}(0) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \int_{-\tau}^0 \left\langle \mathcal{K}(0, -s) \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \frac{d\varphi(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \frac{d\varphi(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds, \end{aligned} \quad (14)$$

функции $h(t)$ и $\gamma(t)$ определены в (4) и (11) соответственно.

Нетрудно убедиться, что оценка (13) при условии (11) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (12) при $t \rightarrow \infty$. Действительно, в силу T -периодичности $\gamma(t)$ при любом $t = jT + \eta$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq \eta < T$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi &= j \int_0^T \gamma(\xi) d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi) d\xi \\ &= \frac{t}{T} \int_0^T \gamma(\xi) d\xi - \frac{\eta}{T} \int_0^T \gamma(\xi) d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi) d\xi \geq \gamma_1 t - 2\gamma_2 T, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(\xi) d\xi > 0, \quad \gamma_2 = \max_{\xi \in [0, T]} |\gamma(\xi)|.$$

Тогда из (13) получаем

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp \left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \gamma_2 T \right). \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (15) позволяет оценить скорость экспоненциального убывания решений системы (1) на бесконечности, при этом мы не используем спектральную информацию (спектр оператора монодромии или корни квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов).

Скорость убывания в (13) зависит от функции $p(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой функции. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 1 мы укажем такую функцию в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t, s)$, удовлетворяющие условиям (2)–(6), такие, что матрица $Q(t)$ в (7) положительно определена при $t \geq 0$. Перепишем матрицу $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^*(t) & Q_3(t) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{pmatrix} Q_{13}(t) \\ Q_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_3(t) = Q_{33}(t),$$

$Q_{ij}(t)$ определены в (8). Очевидно, что

$$Q(t) = \begin{pmatrix} I & Q_2(t)Q_3^{-1}(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_3^{-1}Q_2^*(t) & I \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$P(t) = Q_1(t) - Q_2(t)Q_3^{-1}(t)Q_2^*(t). \quad (17)$$

Если $Q(t)$ положительно определена, то матрица $P(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t, s)$, удовлетворяющие условиям (2)–(6), такие, что матрица $Q(t)$ в (7) положительно определена при $t \geq 0$. Если существует T -периодическая функция $k(t)$ такая, что выполнены (10) и (11) при $p(t) = \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}$, тогда для решения задачи (12) имеет место оценка (13).*

2. Доказательство основных результатов. Очевидно, утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из оценки (15), которая следует из неравенства (13), как показано выше. Поэтому достаточно доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (12). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t, s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, рассмотрим на решении $y(t)$ следующий функционал Ляпунова — Крассовского:

$$V(t, y) = \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t-\tau}^t \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds. \quad (18)$$

Дифференцируя его, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, y)}{dt} &= \left\langle \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{K}(t, 0) \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \mathcal{K}(t, \tau) \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Обозначим

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{dy(t-\tau)}{dt}.$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, y)}{dt} = & \left\langle \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \left\langle \mathcal{K}(t, 0) \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \mathcal{K}(t, \tau) \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, y)}{dt} = & - \left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t-\tau)}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds, \quad (19) \end{aligned}$$

где матрица $Q(t)$ определена в (7). Используя (9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, y)}{dt} \leq & -p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & + \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

В силу (10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, y)}{dt} \leq & -p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & - k(t) \int_{t-\tau}^t \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Тогда в силу определения функционала (18) получаем

$$\frac{dV(t, y)}{dt} \leq -\gamma(t)V(t, y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (11). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t, y) \leq V(0, \varphi) \exp \left(- \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right),$$

где $V(0, \varphi)$ определено в (14). Используя (4), с учетом определения функционала (18) получаем

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2 &\leq \frac{1}{h(t)} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\leq \frac{V(t, y)}{h(t)} \leq \frac{V(0, \varphi)}{h(t)} \exp \left(- \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство (13). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t, s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3, рассмотрим на решении задачи (12) функционал (18). Как при доказательстве теоремы 2, после дифференцирования получаем (19). В силу представления (16)

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t-\tau)}{dy(t-\tau)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t-\tau)}{dy(t-\tau)} \end{pmatrix} \right\rangle \geq \left\langle P(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (17). Тогда

$$\left\langle P(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq p_{\min}(t) \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Поскольку

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \leq \|\mathcal{H}(t)\| \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

то

$$\begin{aligned} \left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t-\tau)}{dy(t-\tau)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t-\tau)}{dy(t-\tau)} \end{pmatrix} \right\rangle \\ \geq \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Используя (10), из (19) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t, y) &\leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad - k(t) \int_{t-\tau}^t \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} \end{pmatrix} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Тогда в силу определения функционала (18) получаем

$$\frac{dV(t, y)}{dt} \leq -\gamma(t)V(t, y),$$

где $\gamma(t) = \min \left\{ \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}, k(t) \right\}$. Отсюда, как при доказательстве теоремы 2, имеем неравенство (13). Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольд Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. Корневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.
4. Избранные труды Н. В. Азбелева. М.; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2012.
5. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1996.
6. Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.
7. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Mathematics and its Applications. V. 463).
8. Michiels W., Niculescu S. I. Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach. Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 2014. (Advances in Design and Control. V. 27).
9. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. N. Y.: Springer Verl., 2012.
10. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013.
11. Gil' M. I. Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (Atlantis Studies in Differential Equations. V. 3).
12. Андреев А. С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
13. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European J. Control. 2014. V. 20. P. 271–283.
14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
15. Матвеева И. И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
16. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
17. Demidenko G. V., Matveeva I. I. Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22.
18. Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

Поступила в редакцию 9 мая 2019 г.

После доработки 9 мая 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Матвеева Инесса Изотовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1
630090 г. Новосибирск
E-mail: matveeva@math.nsc.ru