Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, New three-dimensional plastic flows corresponding to a homogeneous stress state, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 114–117

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.310>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.97.219

April 26, 2023, 15:57:15

НОВЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОДНОРОДНОМУ НАПРЯЖЕННОМУ СОСТОЯНИЮ

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

Рассмотрены трехмерные уравнения пластичности среды Мизеса. Для этих уравнений исследованы поля скоростей, соответствующие трехмерному однородному пластическому напряженному состоянию. Для однородного напряженного состояния найдены новые поля скоростей, имеющие функциональный произвол.

Ключевые слова: трехмерные пластические течения, однородное напряженное состояние.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.310

Работы, в которых рассматриваются трехмерные пластические течения, весьма немногочисленны. Это работы Р. Хилла [1], Д. Д. Ивлева [2], М. А. Задояна [3] и одного из авторов данной статьи [2, 4]. Особняком на этом фоне выглядит работа В. Прагера [5]. В ней подробно рассмотрено однородное пластическое состояние и построены поля скоростей, ему соответствующие. В. Прагером [5], в частности, показано, что такому состоянию могут соответствовать только поля скоростей в виде полиномов второй степени. Фундаментальность исследования и авторитет автора, казалось, гарантируют, что ошибок в работе нет. Тем не менее, в исследование вкралась неточность и оказалось, что существуют решения, соответствующие однородному напряженному состоянию, отличные от решений в [5]. Такие решения построены в данной работе.

1. Постановка задачи. Состояние трехмерного пластического течения может быть описано с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ S_{ij} &= \lambda e_{ij}, \quad S_{ij}S_{ij} = 2k_s^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - p, \quad 3p = \sigma_{ii}, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} , S_{ij} — компоненты тензора и девиатора тензора напряжений; λ — неотрицательная функция; k_s — предел текучести при чистом сдвиге; $2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ — компоненты тензора скоростей деформации; u_i — компоненты вектора скорости. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Система уравнений (1) — это система из десяти уравнений на шесть компонент тензора напряжений σ_{ij} , три компоненты вектора скорости u_i и коэффициент λ .

Рассмотрим поле скоростей и предположим, что p постоянно:

$$\begin{aligned} u_1 &= a \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad u_2 = b \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \\ u_3 &= c \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad p = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — постоянные.

Вычислим для этого поля компоненты девиатора тензора напряжений. Получаем

$$\begin{aligned} S_{11} &= \alpha a \mu, & S_{22} &= \beta b \mu, & S_{33} &= \gamma c \mu, & S_{12} &= (\alpha b + \beta a) \mu, \\ S_{13} &= (\alpha c + \gamma a) \mu, & S_{23} &= (\beta c + \gamma b) \mu, \\ \mu^{-2} &= 2k_s^2((\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2 + (\alpha b + \beta a)^2 + (\alpha c + \gamma a)^2 + (\beta c + \gamma b)^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует, что все компоненты тензора напряжений постоянны, поле скоростей (2) не совпадает с полем скоростей, построенным в [5]. Поэтому необходимо более тщательно исследовать поля скоростей, которые соответствуют однородному напряженному состоянию.

2. Решение задачи. Пусть все σ_{ij} и соответствующие им компоненты девиатора тензора напряжений S_{ij} постоянны. Тогда для определения компонент тензора скоростей деформации, кроме уравнений

$$S_{ij} = \lambda e_{ij}, \quad (4)$$

мы должны рассмотреть систему из шести уравнений совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Остальные четыре уравнения получаются из (5) круговой перестановкой индексов. Без ограничений общности будем считать, что $S_{12} \neq 0$. Из (4) имеем

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{12}} e_{12}. \quad (6)$$

Подставляем (6) в (5) и, учитывая, что S_{ij} постоянные, получаем

$$\begin{aligned} S_{11} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2^2} + S_{22} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1^2} &= 2 S_{12} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ S_{11} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-S_{23} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1} + S_{12} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + S_{13} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Остальные четыре уравнения получаем из (7) круговой перестановкой индексов.

Система уравнений (7) есть система шести однородных уравнений относительно шести неизвестных $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j}$, эта система имеет постоянные коэффициенты. Система (7) имеет определитель, равный нулю, поскольку у нее есть нетривиальное решение, соответствующее полю скоростей (2). Будем считать переменную $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ известной и решим систему из пяти уравнений с пятью неизвестными методом Крамера. В результате получим

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j} = c_{ij} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (8)$$

где c_{ij} — постоянные, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{1}{c} \left(-2S_{11}^2 S_{22} S_{33} S_{12} + 2S_{11}^2 S_{12} S_{23}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2S_{11} S_{22} S_{12} S_{13}^2 + 2S_{11} S_{33} S_{12}^3 - 4S_{11} S_{12}^2 S_{13} S_{23} \right), \\
c_{22} &= \frac{1}{c} \left(-2S_{11} S_{22}^2 S_{33} S_{12} + 2S_{11} S_{22} S_{12} S_{23}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2S_{22}^2 S_{12} S_{13}^2 + 2S_{22} S_{33} S_{12}^3 - 4S_{22} S_{12}^2 S_{13} S_{23} \right), \\
c_{33} &= \frac{1}{c} \left(2S_{11} S_{22} S_{33}^2 S_{12} - 4S_{11} S_{22} S_{33} S_{13} S_{23} \right. \\
&\quad \left. - 2S_{11} S_{33} S_{12} S_{23}^2 + 4S_{11} S_{13} S_{23}^3 - 2S_{22} S_{33} S_{12} S_{13}^2 \right. \\
&\quad \left. + 4S_{22} S_{13}^3 S_{23} - 2S_{33}^2 S_{12}^3 + 8S_{33} S_{12}^2 S_{13} S_{23} - 8S_{12} S_{13}^2 S_{23}^2 \right), \\
c_{13} &= \frac{1}{c} \left(-2S_{11}^2 S_{22} S_{33} S_{23} + 2S_{11}^2 S_{23}^3 \right. \\
&\quad \left. + 2S_{11} S_{22} S_{13}^2 S_{23} + 2S_{11} S_{33} S_{12}^2 S_{23} - 4S_{11} S_{12} S_{13} S_{23}^2 \right), \\
c_{23} &= \frac{1}{c} \left(-2S_{11} S_{22}^2 S_{33} S_{13} + 2S_{11} S_{22} S_{13} S_{23}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2S_{22}^2 S_{13}^3 + 2S_{22} S_{33} S_{12}^2 S_{13} - 4S_{22} S_{12} S_{13}^2 S_{23} \right), \\
c &= 2S_{11}^2 S_{22}^2 S_{33}^2 - 4S_{11}^2 S_{22} S_{33} S_{23}^2 + 2S_{11}^2 S_{23}^4 - 4S_{11} S_{22}^2 S_{33} S_{13}^2 \\
&\quad - 4S_{11} S_{22} S_{33}^2 S_{12}^2 + 8S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{13} S_{23} + 4S_{11} S_{22} S_{12}^2 S_{23}^2 \\
&\quad + 4S_{11} S_{33} S_{12}^2 S_{23}^2 - 8S_{11} S_{12} S_{13} S_{23}^2 + 2S_{22}^2 S_{13}^4 + 4S_{22} S_{33} S_{12}^2 S_{13} \\
&\quad - 8S_{22} S_{12} S_{13}^3 S_{23} + 2S_{33}^2 S_{12}^4 - 8S_{33} S_{12}^2 S_{13} S_{23} + 8S_{12}^2 S_{13}^2 S_{23}^2.
\end{aligned}$$

Решая последовательно уравнение (8), после несложных вычислений получаем

$$e_{12} = f(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3),$$

где α, β, γ — произвольные постоянные, которые можно выразить через S_{ij} ; f — произвольная гладкая функция. Остальные компоненты тензора скоростей деформации без труда определяются из уравнений (6). Окончательно поле скоростей для однородного напряженного состояния принимает вид

$$\begin{aligned}
u_1 &= Ag(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta), \\
u_2 &= Bg(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta), \\
u_3 &= Cg(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta).
\end{aligned}$$

Здесь постоянные $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ без труда определяются через S_{ij} ; g — произвольная гладкая функция, которая определяется по функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай, рассмотренный В. Прагером [5], соответствует тривиальному решению системы (7). Это означает, что $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. Тогда $e_{12} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta$. В результате поле скоростей имеет квадратичный вид, что и было отмечено в [5].

В результате проведенного исследования показано, что однородному напряженному состоянию соответствует поле скоростей, имеющее функциональный произвол, а не одно поле, как это было приведено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1954.
2. Ивлев Д. Д., Максимова Л. М., Непершин Р. И. и др. Предельное состояние деформируемых тел и конструкций. М.: Физматлит, 2008.
3. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
4. Аннин Б. Д., Бытов В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
5. Прагер В. Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии // Механика. 1958. № 3. С. 23–27.

Поступила в редакцию 13 февраля 2019 г.

После доработки 13 февраля 2019 г.

Принята к публикации 14 марта 2019 г.

Сенашов Сергей Иванович

Савостьянова Ирина Леонидовна

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева

просп. Красноярский рабочий, 31

660037 г. Красноярск

E-mail: sen@sibsau.ru; ruppa@inbox.ru