Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. Yskak, On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 3, 118–127

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.311>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 04:29:22

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*)

Т. Ыскак

Рассматривается класс систем линейных неавтономных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. Получены достаточные условия для экспоненциальной устойчивости нулевого решения и условия на возмущения коэффициентов, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения. С использованием функционала Ляпунова — Красовского специального вида устанавливаются оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений исходной системы на бесконечности.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, распределенное запаздывание, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.311

Введение. Существует большое число работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–9]). В работе рассматривается система нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d}{dt}(D(t)y(t - \tau)) = A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)y(s) ds, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\tau > 0$ — константа; $A(t), D(t)$ — квадратные матрицы порядка n с непрерывными T -периодическими элементами; $B(t, \xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T -периодическими по первой переменной, т. е. $B(t, \xi) \equiv B(t + T, \xi)$.

Цель работы заключается в получении достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получении оценки решений системы, которая характеризует скорость убывания при $t \rightarrow \infty$. При исследовании устойчивости нулевого решения будем использовать следующий функционал Ляпунова — Красовского, введенный в [10], который является модификацией функционала из [11–14]:

$$V(t, y) = \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t - \tau)), (y(t) + D(t)y(t - \tau)) \rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds d\eta + \int_{t-\tau}^t \langle M(t-s)y(s), y(s) \rangle ds. \quad (2)$$

Используя этот функционал, мы исследуем также робастную устойчивость.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).

В работах [11–17] исследован случай дифференциального уравнения нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием. В [18] рассмотрена система (1) в случае $D(t) \equiv 0$.

В разд. 1 получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и оценки на решения (1), в разд. 2 указаны условия на матрицы возмущений, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость.

1. Экспоненциальная устойчивость. Для системы (1) рассмотрим следующую начальную задачу при $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(D(t)y(t-\tau)) &= A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)y(s) ds, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C^1[-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим через $q(t)$ минимальное собственное число матрицы

$$\begin{aligned} Q(t) &= H^{-1/2}(t) \\ &\times \left(Q_{11}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int_{t-\tau}^t Q_{13}(t, s)Q_{33}^{-1}(t, s)Q_{13}^*(t, s) ds \right) H^{-1/2}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= -\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0) + \tau K(0) \right), \\ Q_{12}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\tau}}(H(t)A(t) + M(0))D(t) + \sqrt{\tau}K(0)D(t), \\ Q_{13}(t, s) &= -H(t)B(t, t-s), \\ Q_{22}(t) &= \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D(t)^*M(0)D(t)) - D(t)^*K(0)D(t), \\ Q_{33}(t, s) &= K(t-s). \end{aligned}$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + kM(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Теорема 1. Пусть существуют гладкая T -периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ такая, что $H(t) > 0$, и матрицы $K(s) = K^*(s)$, $M(s) = M^*(s) \in C^1[0, \tau]$ такие, что

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Тогда если

$$Q_{22}(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

то для решения задачи (3) верна оценка

$$\begin{aligned} V(t, y) &\leq \exp \left(- \int_0^t \gamma(s) ds \right) \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)) \rangle \\ &+ \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle ds d\eta + \int_{-\tau}^0 \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle ds \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\gamma(t) = \min\{q(t), k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства данной теоремы аналогична доказательству теоремы 1 из [10].

Отметим, что из условия (4) и условий на матрицы $K(s)$, $M(s)$ следует, что спектр матрицы $D(t)$ при всех t лежит внутри единичного круга $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Действительно, поскольку $\frac{d}{ds}M(s) < 0$, то $M(0) > M(\tau)$. Следовательно, $M(0) - D^*(t)M(0)D(t) > 0$. В силу критерия Ляпунова асимптотической устойчивости решений разностных уравнений получаем требуемое.

Обозначим через $\alpha > 0$ такое число, что

$$M(0) - D^*(t)M(0)D(t) \geq \alpha I \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (6)$$

В дальнейшем нам пригодится следующая

Лемма 1. Пусть $\{t_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, — неотрицательная последовательность и выполнено условие (6). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|D(t_n) \dots D(t_1)\| = \left\| \prod_{i=1}^n D(t_i) \right\| \leq \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{n/2}, \quad (7)$$

где $M(0)$ — положительно определенная эрмитова матрица из теоремы 1, $\nu(M(0)) = \|M(0)\| \|M^{-1}(0)\|$ — число обусловленности матрицы $M(0)$. Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующее разностное уравнение:

$$z_i = D(t_i)z_{i-1}, \quad i = 1, \dots$$

Рассмотрим функцию $\langle M(0)z_i, z_i \rangle$. Очевидно, что

$$\langle M(0)z_i, z_i \rangle = \langle D^*(t_i)M(0)D(t_i)z_{i-1}, z_{i-1} \rangle.$$

Следовательно, из (6) получим

$$\langle M(0)z_i, z_i \rangle \leq \langle M(0)z_{i-1}, z_{i-1} \rangle - \alpha \langle z_{i-1}, z_{i-1} \rangle.$$

Мы неоднократно будем пользоваться следующими неравенствами:

$$\|M^{-1}(0)\|^{-1} \langle z, z \rangle \leq \langle M(0)z, z \rangle \leq \|M(0)\| \langle z, z \rangle.$$

Применяя данные неравенства, имеем

$$\langle M(0)z_i, z_i \rangle \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right) \langle M(0)z_{i-1}, z_{i-1} \rangle.$$

Повторим данную процедуру несколько раз. В итоге имеем

$$\langle M(0)z_i, z_i \rangle \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^i \langle M(0)z_0, z_0 \rangle.$$

Из данного неравенства вытекает оценка

$$\|z_i\| \leq \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{i/2} \|z_0\|.$$

С другой стороны, $z_i = D(t_i) \dots D(t_1)z_0$, и в силу определения матричной нормы получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Заметим, что $\gamma(t)$ — T -периодическая функция. Нам пригодится следующая лемма из [18].

Лемма 2. Пусть $x(t)$ — T -периодическая функция, тогда

$$\int_0^t x(s) ds \geq St/T + q, \quad t > 0,$$

где

$$S = \int_0^T x(s) ds, \quad q = \min_{\xi \in [0, T]} \left(\int_0^\xi x(s) ds - \frac{\xi}{T} \int_0^T x(s) ds \right).$$

Введем обозначения

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\hat{\kappa} = \max_{s \in [0, T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2} \times \left(2\|H(0)\|(1 + \|D(0)\|^2) + \int_0^\tau \|K(s)\| ds + \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \|M(s)\| ds d\eta \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$c = \exp \left(\max_{\xi \in [0, T]} \left(\frac{\xi}{T} \int_0^T \frac{\gamma(s)}{2} ds - \int_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) \right).$$

В следующей теореме мы установим оценки решения начальной задачи (3), являющиеся аналогами оценок из [10–15].

Теорема 2. Пусть:

- 1) выполнены условия теоремы 1;
- 2) выполнено неравенство $\Delta = \int_0^T \frac{\gamma(s)}{2} ds > 0$.

Тогда:

а) если $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2} \exp(\Delta\tau) < 1$, то для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) \hat{\kappa} c \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{1/2} \exp(\Delta\tau) \right)^{-1};$$

б) если $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2} \exp(\Delta\tau) = 1$, то для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) \left(\frac{\hat{\kappa} c}{\tau} t + \hat{\kappa} c + 1 \right).$$

в) если $(1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2} \exp(\Delta\tau) > 1$, то для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} (1 - \alpha/\|M(0)\|)^{t/2\tau} \times \left(\hat{\kappa} c \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{-1/2} \exp(-\Delta\tau) \right)^{-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{1/2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно заметить справедливость следующего неравенства:

$$V(0, \varphi) \leq \Phi^2 \left(2\|H(0)\|(1 + \|D(0)\|^2) + \int_0^\tau \|K(s)\| ds + \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \|M(s)\| ds d\eta \right).$$

Из (5) и (8) для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\langle H(t)(y(t) + D(t)y(t - \tau)), (y(t) + D(t)y(t - \tau)) \rangle \leq \exp \left(- \int_0^t \gamma(s) ds \right) \Phi^2 \frac{\hat{\kappa}^2}{\|H^{-1}(t)\|}.$$

Поскольку $H(t)$ — эрмитовая положительно определенная матрица, то

$$\|y(t) + D(t)y(t - \tau)\| \leq \Phi \hat{\kappa} \exp \left(- \int_0^t \frac{\gamma(s)}{2} ds \right).$$

Учитывая неравенство

$$\|y(t)\| \leq \|y(t) + D(t)y(t - \tau)\| + \|D(t)y(t - \tau)\|,$$

получаем

$$\|y(t)\| \leq \Phi \hat{\kappa} \exp \left(- \int_0^t \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) + \|D(t)y(t - \tau)\|.$$

Пусть $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, как и выше, имеем

$$\|D(t)y(t - \tau)\| \leq \|D(t)y(t - \tau) + D(t)D(t - \tau)y(t - 2\tau)\| + \|D(t)D(t - \tau)y(t - 2\tau)\|.$$

Отсюда

$$\|D(t)y(t - \tau)\| \leq \|D(t)\| \Phi \hat{\kappa} \exp \left(- \int_0^{t-\tau} \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) + \|D(t)D(t - \tau)y(t - 2\tau)\|$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi \hat{\kappa} \exp \left(- \int_0^t \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) \\ &\quad + \|D(t)\| \Phi \hat{\kappa} \exp \left(- \int_0^{t-\tau} \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) + \|D(t)D(t - \tau)y(t - 2\tau)\|. \end{aligned}$$

Введем матричную последовательность

$$\mathcal{D}_0(t) = I,$$

$$\mathcal{D}_k(t) = \prod_{i=1}^k D(t - (i-1)\tau) = D(t) \dots D(t - (k-1)\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Повторяя вышесказанные рассуждения, получим

$$\|y(t)\| \leq \Phi \hat{\kappa} \sum_{j=0}^k \mathcal{D}_j(t) \exp \left(- \int_0^{t-j\tau} \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) + \|\mathcal{D}_{k+1}(t)y(t - (k+1)\tau)\|.$$

Используя определение матричной нормы и оценку (7), легко показать справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \\ &\times \left(\hat{\kappa} \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{j/2} \exp \left(- \int_0^{t-j\tau} \frac{\gamma(s)}{2} ds \right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{(k+1)/2} \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 2, обозначения для Δ из условий теоремы 2 и (8) получим

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \\ &\times \left(\hat{\kappa} \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{j/2} \exp(-\Delta(t-j\tau)) + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{(k+1)/2} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ 1. Пусть $e^{-\Delta\tau} > (1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) \\ &\times \left(\hat{\kappa} \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{j/2} \exp(\Delta j\tau) + \exp(t\Delta) \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{(k+1)/2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\hat{\kappa}c > 1$, имеем

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) \hat{\kappa}c \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{1/2} \exp(\Delta\tau) \right)^j.$$

Откуда получаем требуемое.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $e^{-\Delta\tau} = (1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) \left(\hat{\kappa}c(k+1) + \exp((t-k\tau)\Delta) \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{1/2} \right).$$

Учитывая, что $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \exp(-t\Delta) (\hat{\kappa}c(t/\tau + 1) + 1).$$

Что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $e^{-\Delta\tau} < (1 - \alpha/\|M(0)\|)^{1/2}$. Перепишем оценку (9):

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{k/2} \\ &\times \left(\hat{\kappa}c \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{(j-k)/2} \exp(-\Delta(t-j\tau)) + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{t/(2\tau)} \times \left(\hat{\kappa} c \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{(j-k)/2} \exp(-\Delta(k-j)\tau) + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2} \right).$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \Phi \sqrt{\nu(M(0))} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{t/(2\tau)} \times \left(\hat{\kappa} c \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{-j/2} \exp(-\Delta j\tau) + \left(1 - \frac{\alpha}{\|M(0)\|}\right)^{1/2} \right).$$

Откуда вытекает требуемая оценка.

Отметим, что условия 1 и 2 теоремы 2 являются достаточными для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

2. Робастная устойчивость. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) + \frac{d}{dt}((D(t) + D_1(t))y(t - \tau)) \\ = (A(t) + A_1(t))y(t) + \int_{t-\tau}^t (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s) ds, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $A_1(t)$, $D_1(t)$ — квадратные матрицы порядка n с непрерывными T -периодическими элементами, $B_1(t, \xi)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами, T -периодическими по первой переменной, т. е. $B_1(t, \xi) \equiv B_1(t + T, \xi)$. Поскольку при доказательстве следующей теоремы мы будем использовать теоремы 1 и 2 и рассматривать функционал (2) вдоль решения возмущенной системы (10), то введем следующие обозначения:

$$\hat{\gamma}(t) = \min\{\hat{q}_1(t), k\}, \quad (11)$$

число k из формулировки теоремы 1 для системы (1), $\hat{q}_1(t)$ — минимальное собственное значение матрицы

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t) = H^{-1/2}(t) \\ \times \left(\hat{Q}_{11}(t) - \hat{Q}_{12}(t)\hat{Q}_{22}^{-1}(t)\hat{Q}_{12}^*(t) - \int_{t-\tau}^t \hat{Q}_{13}(t, s)\hat{Q}_{33}^{-1}(t, s)\hat{Q}_{13}^*(t, s) ds \right) H^{-1/2}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{11}(t) \\ = -\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)(A(t) + A_1(t)) + (A^*(t) + A_1^*(t))H(t) + M(0) + \tau K(0) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{12}(t) \\ = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(H(t)(A(t) + A_1(t)) + M(0))(D(t) + D_1(t)) + \sqrt{\tau}K(0)(D(t) + D_1(t)),\end{aligned}$$

$$\widehat{Q}_{13}(t, s) = -H(t)(B(t, t-s) + B_1(t, t-s)),$$

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{22}(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - (D^*(t) + D_1^*(t))M(0)(D(t) + D_1(t))) \\ - (D^*(t) + D_1^*(t))K(0)(D(t) + D_1(t)),\end{aligned}$$

$$\widehat{Q}_{33}(t, s) = Q_{33}(t, s) = K(t-s).$$

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполнены условия теоремы 2 и следующие неравенства:

$$\|D_1(t)\| < \left(\|D(t)\|^2 + \frac{\|(M(\tau) - D^*(t)M(0)D(t) - \tau D^*(t)K(0)D(t))^{-1}\|^{-1}}{\|M(0)\| + \tau\|K(0)\|} \right)^{1/2} - \|D(t)\|, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$\int_0^T \gamma(s) ds > \int_0^T \|\widehat{Q}(s) - Q(s)\| ds. \quad (13)$$

Тогда нулевое решение системы (10) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Поскольку для системы (1) выполнены условия теорем 1 и 2, то определены функционал (2) и матрицы $H(t)$, $M(s)$, $K(s)$. Рассмотрев данный функционал на решении возмущенной системы (10), можно прийти к следующему выводу: чтобы доказать, что нулевое решение системы (10) экспоненциально устойчиво, достаточно показать, что для системы выполнены условия теорем 1 и 2. То есть требуется доказать, что выполнены следующие условия (аналог условий (4) и п. 2 теоремы 2):

$$\widehat{Q}_{22}(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$\int_0^T \widehat{\gamma}(s) ds > 0. \quad (15)$$

Докажем условие (14). Учитывая, что $\|N^{-1}\|^{-1}$ — минимальное собственное значение эрмитовой положительно определенной матрицы N , оценим матрицу $\widehat{Q}_{22}(t)$:

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{22}(t) \geq (\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2\|D_1(t)\|\|D(t)\| \\ \times (\|M(0)\|/\tau + \|K(0)\|)I - \|D_1(t)\|^2(\|M(0)\|/\tau + \|K(0)\|))I.\end{aligned}$$

В силу данной оценки и условия (12) имеем $\widehat{Q}_{22}(t) > 0$. Откуда следует, что (14) выполнено.

Нетрудно увидеть, что в силу неравенства

$$Q(t) + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|I \geq \widehat{Q}(t) \geq Q(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|I$$

справедливо неравенство

$$q_1(t) + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\| \geq \widehat{q}_1(t) \geq q_1(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|,$$

где $q_1(t)$ и $\widehat{q}_1(t)$ — минимальные собственные значения матриц $Q(t)$ и $\widehat{Q}(t)$ соответственно. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|\widehat{q}_1(t) - k| \leq |q_1(t) - k| + |\widehat{q}_1(t) - q_1(t)| \leq |q_1(t) - k| + \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) = \min\{\widehat{q}_1(t), k\} &= (\widehat{q}_1(t) + k - |\widehat{q}_1(t) - k|)/2 \\ &\geq (q_1(t) + k - |q_1(t) - k|)/2 - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|, \end{aligned}$$

что эквивалентно $\hat{\gamma}(t) \geq \gamma(t) - \|\widehat{Q}(t) - Q(t)\|$. Из (13) вытекает (15). Теорема 3 доказана.

Заключение. С использованием функционала Ляпунова — Красовского (2) доказаны достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

Получены оценки на решения системы (1). Параметры в полученных оценках конструктивны. Также указаны условия на матрицы в (10), при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость.

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Демиденко, И. И. Матвеевой, М. А. Скворцовой за внимание и ценные советы. Автор также выражает благодарность рецензенту за высказанные замечания и рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. Корневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
4. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
5. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1996.
6. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl. V. 463).
7. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems // Boston: Birkhauser, 2003. (Control Engng.).
8. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. N. Y.: Springer Verl., 2012.
9. Gil' M. I. Stability of neutral functional differential equations // Atlantis Stud. Differ. Equ. Paris: Atlantis Press, 2014. V. 3.
10. Ыскак Т. К. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Известия ИГУ. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 159–169.
11. Demidenko G. V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
12. Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 17–29.
13. Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А. Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014, Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
15. Ыскак Т. К. Достаточные условия асимптотической устойчивости решений одного класса линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Динамические системы. 2015. Т. 5(33), № 3–4. С. 177–191.
16. Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
17. Матвеева И. И. О робастной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 86–95.
18. Yskak T. K. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. V. 25, N 1–2. P. 97–108.

Поступила в редакцию 7 мая 2019 г.

После доработки 31 мая 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

Ыскак Тимур

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

630090 г. Новосибирск

E-mail: istima92@mail.ru