Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. N. Artyushin, The Duhamel method in the inverse problems for hyperbolic equations. II, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.401>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.81.137.203

April 26, 2023, 08:40:10

МЕТОД ДЮАМЕЛЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. II*)

А. Н. Артюшин

Рассматривается задача определения зависящего от времени источника в волновом уравнении. В качестве краевых условий используются условия Дирихле, а в качестве условия переопределения выступает весовой интеграл от кономальной производной решения по границе пространственной области. С использованием метода Дюамеля задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем и второго рода. Полученные результаты применяются при исследовании нелинейных коэффициентных задач. С помощью принципа сжимающих отображений доказывается существование и единственность локального решения.

Ключевые слова: обратная задача, волновое уравнение, интегральные условия.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.401

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ класса C^3 . В цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$ с боковой поверхностью $S = (0, T) \times \Gamma$ рассматривается обратная задача определения функций $u(t, x)$ и $q(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_{tt}(t, x) - L(t, x, D_x)u(t, x) = q(t)h(t, x) + f(t, x),$$

начальным и краевым условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u|_S = 0,$$

а также условию переопределения

$$\int_{\Gamma} K(t, x) u_{\nu}(t, x) d\Gamma = \psi(t)$$

с некоторой весовой функцией $K(t, x)$. Здесь u_{ν} — кономальная производная. То есть если $n(x)$ — вектор единичной внешней нормали в точке $x \in \Gamma$, то

$$u_{\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial \nu} u(t, x) = \sum_{i,j=1}^n n_i(x) a_{ij}(t, x) u_{x_j}(t, x).$$

Оператор L — равномерно эллиптический оператор второго порядка вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(t, x) u_{x_j}(t, x))$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00620).

с симметричной и положительно определенной матрицей $\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$. Коэффициенты a_{ij} предполагаются достаточно гладкими в $\bar{Q}$.

В настоящей работе мы продолжаем исследование обратных задач для волнового уравнения с условием переопределения на границе области. В [1] рассматривалась смешанная задача с краевыми условиями Неймана. На сей раз мы рассматриваем краевые условия Дирихле. Соответственно изменилось и условие переопределения. Условие такого вида встречается, например, в обратной задаче из работы [2].

Решение поставленной задачи сталкивается с серьезными трудностями. Так, например, типичный подход, связанный с нагруженными уравнениями (см. [3]), в данном случае не применим. Поэтому мы, следуя [4] и [1], сводим обратную задачу к некоторому уравнению Вольтерра первого рода. Обычно после этого с помощью дифференцирования получают уравнение Вольтерра второго рода. Для этого достаточно установить гладкость решений вспомогательной задачи. Однако в нашем случае эти решения гладкими не будут, поскольку не выполняются необходимые условия согласования. Данное обстоятельство потребовало проведения специального исследования гладкости ядра уравнения Вольтерра. Нетривиальным следствием такой ситуации является вид основного условия разрешимости обратной задачи. Как увидим позже, обратная задача сводится к уравнению Вольтерра второго рода, если выполнено неравенство $|H_0(t)| \geq \delta > 0$, где

$$H_0(t) = \int_{\Gamma} K(t, x) h(t, x) \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) n_i(x) n_j(x)} d\Gamma.$$

Отметим, что в отличие от [1] под интегралом появился характерный сомножитель. Как нам кажется, методами работы [3] условия такого вида получить невозможно.

1. Метод Дюамеля. Рассмотрим задачу I:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - L(t, x, D_x)u(t, x) &= F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(0, x) &= u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in S. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи I определяется стандартным образом с помощью интегрального тождества. Хорошо известно [5, с. 210, 213], что если $F \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$, $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, то обобщенное решение задачи I существует, единственно и для него имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \|\nabla u\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} \\ \leq C(\|F\|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для обобщенных решений задачи I с помощью интегрального тождества формально определяется след $u_\nu|_S$. Пусть $\varphi(t, x) \in W_2^1(Q)$, $\varphi(T, x) = 0$. Обозначим $g(t, x) = \varphi(t, x)|_S$. Тогда

$$\int_S g(t, x) u_\nu(t, x) dS = \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_j} \varphi_{x_i} - u_t \varphi_t - f \varphi \right) dQ - \int_\Omega u_1(x) \varphi(0, x) dx.$$

Оказывается, что имеет место включение $u_\nu|_S \in L_2(S)$ и справедлива оценка (см., например, [6, с. 134, 135])

$$\|u_\nu\|_{L_2(S)} \leq C(\|F\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)}). \quad (1.3)$$

Для всякого $\tau \in (0, T)$ в цилиндре $Q_\tau = (\tau, T) \times \Omega$ рассмотрим вспомогательную задачу II:

$$\begin{aligned} v_{tt}(t, x, \tau) - L(t, x, D_x)v(t, x, \tau) &= 0, \quad (t, x) \in Q_\tau, \\ v(\tau, x, \tau) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ v_t(\tau, x, \tau) &= g(\tau, x), \quad x \in \Omega, \\ v(t, x, \tau) &= 0, \quad (t, x) \in (\tau, T) \times \Gamma. \end{aligned}$$

При $t < \tau$ функцию $v(t, x, \tau)$ продолжим нулем. Имеет место следующее представление (формула Дюамеля).

Лемма 1. Если $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$ и $F \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$, то обобщенное решение задачи I представляется в виде

$$u(t, x) = \int_0^t v(t, x, \tau) d\tau = \int_0^T v(t, x, \tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где $v(t, x, \tau)$ — решение задачи II с $g(\tau, x) = F(\tau, x)$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения несложно и практически дословно повторяет доказательство леммы 2.1 из [1]. $\square$

Следствие 1. Для обобщенных решений задачи I имеет место оценка

$$\|u_\nu\|_{L_2(S)} \leq C(\|F\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)}). \quad (1.5)$$

Доказательство. Требуемая оценка легко следует из (1.4) и (1.3). $\square$

2. Линейная обратная задача. Пусть функция $F(t, x)$ имеет вид

$$F(t, x) = q(t)h(t, x) + f(t, x),$$

где $h(t, x)$, $f(t, x)$ заданы, а $q(t)$ неизвестна.

Рассмотрим обратную задачу 1:

$$u_{tt}(t, x) - L(t, x, D_x)u(t, x) = q(t)h(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S, \quad (2.4)$$

$$\int_\Gamma K(t, x)u_\nu(t, x) d\Gamma = \psi(t), \quad t \in (0, T). \quad (2.5)$$

Обобщенным решением обратной задачи 1 будем называть пару функций $u(t, x) \in W_2^1(Q)$, $q(t) \in L_2(0, T)$ таких, что $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.4) и для почти всех $t \in (0, T)$ выполнено условие (2.5). Отметим, что при разумных условиях на f , q , h , u_0 , u_1 имеет место включение $u_\nu \in L_2(S)$, поэтому условие (2.5) имеет смысл.

Обозначим решение задачи I для функции $F(t, x) = f(t, x)$ через $U(t, x)$. Далее, для всякого $\tau \in (0, T)$ через $v(t, x, \tau)$ обозначим решение вспомогательной задачи II с $g(\tau, x) = h(\tau, x)$. Положим по определению

$$H(t, \tau) = \int_\Gamma K(t, x)v_\nu(t, x, \tau) d\Gamma, \quad \Psi(t) = \psi(t) - \int_\Gamma K(t, x)U_\nu(t, x) d\Gamma.$$

Теорема 1. Пусть $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $\psi(t) \in L_1(0, T)$, $f \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$, $h \in L_2(Q)$, $K(t, x) \in L_2(S)$. Тогда обратная задача 1 однозначно разрешима, если и только если уравнение

$$\int_0^t H(t, \tau) q(\tau) d\tau = \Psi(t) \quad \text{для почти всех } t \in (0, T) \quad (2.6)$$

имеет единственное решение $q(t) \in L_2(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q(t) \in L_2(0, T)$, тогда $q(t)h(t, x) \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$. По лемме 1 для решения задачи (2.1)–(2.4) имеет место представление

$$u(t, x) = U(t, x) + \int_0^t q(\tau) v(t, x, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

В силу (1.5) для функций $U(t, x)$, $v(t, x, \tau)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|U_\nu\|_{L_2(S)} &\leq C(\|f\|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)}), \\ \|v_\nu\|_{L_2(S)} &\leq C\|h(\tau, x)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

С учетом этих оценок можно подставить выражение (2.7) в условие (2.5). В результате приходим к уравнению (2.6). $\square$

Как обычно, уравнение (2.6) можно свести к уравнению Вольтерра второго рода, если только ядро $H(t, \tau)$ достаточно гладкое. Для этого достаточно установить гладкость функции $v_\nu(t, x)$. Нетрудно показать, что решение задачи II будет обладать нужной гладкостью, если имеет место включение $g(\tau, x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Но в нашем случае можно гарантировать лишь включение $g(\tau, x) \in W_2^1(\Omega)$. Поэтому требуется специальное исследование.

3. Оценки производных в задаче II. В работе [1] решения вспомогательной задачи оказались достаточно гладкими, что позволило получить нужные оценки непосредственно с помощью метода характеристик. В нашем случае такой подход реализовать не удастся. Для того чтобы решение задачи II имело вторые производные, необходимо выполнение условия согласования $h(t, x)|_S = 0$. Но такое равенство вступает в противоречие с теми условиями, которые мы налагаем на $h(t, x)$. В результате первые производные функции $v(t, x, \tau)$ терпят разрыв на характеристической поверхности. Тем не менее, можно показать, что для достаточно малых t на границе S существует производная $v_{\nu t}(t, x, \tau)$, $t > \tau$. Как и раньше, оценки получаются с помощью выпрямления границы и специальной замены переменных. Основная идея заключается в том, что обобщенное решение можно дифференцировать вдоль характеристической поверхности. Чтобы воспользоваться этим, с помощью разбиения единицы и локальной замены переменных приведем уравнение к такому виду, для которого характеристическая поверхность становится плоской.

Рассмотрим один специальный случай, когда область Ω — полупространство. Пусть $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Для координат точек $x \in \Omega$ введем обозначение $x = (z, y)$, $y = (y_2, y_3, \dots, y_n)$. В цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$ рассмотрим смешанную задачу III:

$$u_{tt}(t, x) = \tilde{L}(t, x, D_x)u(t, x) + L_0 u = F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$u(t, 0, y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (3.4)$$

Здесь $\tilde{L}$ — оператор вида

$$\tilde{L}u = u_{zz} + \sum_{i=2}^n 2b_i(t, x)u_{zy_i} + \sum_{i=2}^n 2c_i(t, x)u_{ty_i} + \sum_{i,j=2}^n (d_{ij}(t, x)u_{y_j}(t, x))_{y_i}$$

с симметричной матрицей $\|d_{ij}\|_{i,j=1,n}$, а L_0 — дифференциальный оператор первого порядка

$$L_0u = A(t, x)u_t + B(t, x)u_z + \sum_{i=2}^n C_i(t, x)u_{y_i} + D(t, x)u.$$

Причем для некоторых $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ и для всех $(t, x) \in \bar{Q}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\gamma_0|\xi|^2 \leq \xi_1^2 + \sum_{i=2}^n 2b_i(t, x)\xi_1\xi_i + \left(\sum_{i=2}^n c_i(t, x)\xi_i \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n d_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leq \gamma_1|\xi|^2. \quad (3.5)$$

Последнее условие означает, что уравнение (3.1) является строго равномерно гиперболическим с временной переменной t [6, с. 66].

Всюду ниже считаем, что начальные данные u_0, u_1 имеют ограниченный носитель. Можно показать, что для данной задачи имеет место конечная скорость распространения возмущений. Поэтому также считаем, что коэффициенты в уравнении (3.1) обращаются в константу при больших значениях аргумента, и носитель решения $u(t, x)$ ограничен.

Как и ранее, $S = (0, T) \times \partial\Omega$. Далее мы намерены показать, что при условиях $F(t, x) \equiv 0$ и $u_0(0, y) \equiv 0$ для решений задачи III имеет место оценка

$$\|u_{zt}\|_{L_2(S)} \leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}). \quad (3.6)$$

Данную оценку сравнительно легко получить при дополнительном условии $u_1(0, y) \equiv 0$. В этом случае выполнены условия согласования и решение будет обладать вторыми производными. После дифференцирования по t с помощью (1.5) получаем (3.6). Но в общем случае ситуация сложнее. Основная идея получения оценки заключается в следующем. Для простоты считаем, что уравнение имеет вид $u_{tt} = u_{zz} + \Delta_y u$. Пусть $w = u_t + u_z$. Тогда

$$w_{tt} = w_{zz} + \Delta_y w. \quad (3.7)$$

При этом $(w_t - w_z)|_S = \Delta_y u|_S = 0$.

После умножения уравнения (3.7) на w_t и интегрирования по частям получаем оценку сначала для $w_t|_S$, а потом и для $u_{zt}|_S$.

Для реализации предложенной схемы можно использовать гладкие приближения. Однако при этом возникает неприятная проблема. Для гладких приближений $u_{1n}(x)$ должно быть выполнено условие согласования $u_{1n}(0, y) \equiv 0$. Но тогда даже слабая сходимости в $W_2^1(\Omega)$ влечет за собой равенство $u_1(0, y) \equiv 0$, что противоречит нашим предположениям. Поэтому приходится применять более сложные рассуждения. Сначала для гладких приближений мы получим оценки с некоторым весом, продолжим эти оценки на негладкие решения, а затем избавимся от веса.

Лемма 2. Пусть коэффициенты оператора L_0 ограничены, а коэффициенты оператора $\tilde{L}$ ограничены и обладают ограниченными первыми производными. Тогда для решения задачи (3.1)–(3.4) справедливы оценки (1.2), (1.5).

Доказательство. Достаточно доказать эту оценку для гладких приближений. Все рассуждения стандартные. Обозначим

$$E(t) = \int_{\Omega} (u_t^2(t, x) + |\nabla u(t, x)|^2) dx.$$

После умножения уравнения (3.1) на $2u_t(t, x)$ и интегрирования его по частям получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(u_t^2(t, x) + u_z^2(t, x) + 2u_z \sum_{i=2}^n b_i(t, x) u_{y_i} + \sum_{i,j=2}^n d_{ij}(t, x) u_{y_j}(t, x) u_{y_i}(t, x) \right) dx \\ \leq C + C \int_0^t (E(\tau) + \|F(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} E^{1/2}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично, после умножения уравнения (3.1) на $-2 \sum_{i=2}^n c_i(t, x) u_{y_i}$, интегрирования его по частям получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} u_t(t, x) \sum_{i=2}^n c_i(t, x) u_{y_i} dx + 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=2}^n c_i(t, x) u_{y_i} \right)^2 dx \\ \leq C + C \int_0^t (E(\tau) + \|F(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} E^{1/2}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Складывая полученные неравенства и используя (3.5), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(u_t(t, x) - \sum_{i=2}^n c_i(t, x) u_{y_i} \right)^2 dx + \gamma_0 \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ \leq C + C \int_0^t (E(\tau) + \|F(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} E^{1/2}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Применяем лемму Гронуолла и получаем (1.2). После этого умножаем уравнение (3.1) на u_z , интегрируем по частям и получаем (1.5). $\square$

Теорема 2. Пусть $F(t, x) \equiv 0$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $u_1(x) \in W_2^1(\Omega)$. Тогда для решения задачи III справедлива оценка (3.6) с константой C , зависящей только от коэффициентов уравнения (3.1) и их первых производных. При этом для $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$u_z(+0, 0, y) = u_{0z}(0, y) + u_1(0, y). \quad (3.8)$$

Доказательство. Всюду ниже коэффициенты уравнения (3.1) а также функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ предполагаются достаточно гладкими. Общий случай доказывается с помощью предельного перехода. Кроме этого, если не оговорено противное, константы C , C_k , $k = \overline{0, 3}$, зависят лишь от коэффициентов уравнения (3.1) и их первых производных.

Сначала рассмотрим случай, когда $u_1(x) \equiv 0$. Прежде всего для решения $u(t, x)$ выполнена оценка (1.2). Для всякого $2 \leq i \leq n$ положим $v_i(t, x) = u_{y_i}(t, x)$. Продифференцируем уравнение (3.1) по y_i :

$$v_{itt}(t, x) = \tilde{L}v_i(t, x) + L_0 v_i(t, x) + \sum_{j=2}^n M_{ij} v_j(t, x) + F_{y_i}(t, x) + L_i u(t, x),$$

где M_{ij} и L_i — некоторые операторы первого порядка. Коэффициенты этих операторов, по сути, являются производными коэффициентов уравнения (3.1). Их явный вид нам не важен. Главное, что по условию теоремы все эти коэффициенты ограничены. С помощью леммы 2 и леммы Гронуолла приходим к оценке

$$\sum_{i=2}^n \|u_{y_i}\|_{W_2^1(Q)} \leq C \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}. \quad (3.9)$$

Теперь положим $v(t, x) = u_t(t, x)$. Как и раньше,

$$v_{tt}(t, x) = \tilde{L}v(t, x) + L_0v(t, x) + F_1(t, x).$$

Причем в силу (1.2) и (3.9) справедливо включение $F_1(t, x) \in L_2(Q)$. Аналогично следствию 4.1 из [1] можно показать, что $u \in C(0, T; W_2^2(\Omega))$, $u_t \in C(0, T; W_2^1(\Omega))$, $u_{tt} \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Тогда из уравнения (3.1) следует включение $v_t(0, x) \in L_2(\Omega)$. По лемме 2 для функции $v(t, x)$ справедлива оценка (1.5), а значит, и (3.5).

Рассмотрим случай $u_0(x) \equiv 0$. Пусть функция $\rho(\xi) \in C^\infty[0, \infty)$ такова, что:

- (1) $\rho(\xi) = 0$ при $\xi \in [0, 1]$;
- (2) $\rho(\xi) = 1$ при $\xi \geq 2$;
- (3) $\rho'(\xi) \geq 0$ при $\xi > 0$.

Для всякого $q > 0$ обозначим $\rho_q(\xi) = \rho(\xi/q)$. Легко видеть, что для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ имеют место неравенства

$$\xi \rho'_q(\xi) \leq C_1, \quad \xi^2 \rho'_q(\xi) \leq C_2 q \quad \text{для всех } \xi \in [0, \infty).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим задачу

$$v_{tt}(t, x) = \tilde{L}(t, x, D_x)v(t, x) + L_0v(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (3.10)$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v_t(0, x) = v_1(x) = \rho_\varepsilon(z)u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(t, 0, y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Для этой задачи выполнены условия согласования, а значит, $v(t, x) \in W_2^3(Q)$ (см. [6, с. 134]). При этом имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla_y v_t\|_{L_\infty(0, T; (L_2(\Omega))^{n-1})} + \|\nabla_y v\|_{L_\infty(0, T; (W_2^1(\Omega))^{n-1})} \\ + \|\nabla_y v_z|_S\|_{(L_2(S))^{n-1}} \leq C \|\nabla_y u_1\|_{(L_2(\Omega))^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Данные оценки получаются с помощью дифференцирования уравнения (3.10) по переменным y_i и леммы 2.

Далее следуют довольно громоздкие выкладки. Поэтому для простоты изложения считаем, что $n = 2$. В этом случае индексы коэффициентов b_i, c_i, d_{ij} и переменной y_2 избыточны, и мы их опускаем.

Обозначим $w = v_t + v_z$. Продифференцируем уравнение (3.10) по направлению $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}$:

$$w_{tt}(t, x) = \tilde{L}(t, x, D_x)w(t, x) + L_0w(t, x) + G(t, x). \quad (3.12)$$

При этом в силу оценки (3.11) получим

$$\|G\|_{L_2(Q)} \leq C(\|v_y\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}) \leq C\|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Для дальнейшего удобно использовать формулы

$$2bw_{zy} + 2cw_{yt} = (b+c)(w_t + w_z)_y + (c-b)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)w_y, \quad (3.13)$$

$$L_0 w = \alpha_1(t, x)(w_t + w_z) + \alpha_2(t, x)(v_{tt} - v_{zz}) + \alpha_3(t, x)w_y + \alpha_4(t, x)w \quad (3.14)$$

с некоторыми коэффициентами $\alpha_1(t, x)$, $\alpha_2(t, x)$, $\alpha_3(t, x)$, $\alpha_4(t, x)$. Отметим, что по условию теоремы эти коэффициенты ограничены вместе со своими первыми производными.

Пусть $\gamma, \delta > 0$. Обозначим $W(t, x) = w_t(t, x) + w_z(t, x)$. Умножим уравнение (3.12) на $\theta(t, x) = 2e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W(t, x)$ и проинтегрируем его по частям. После несложных преобразований получим оценку

$$\begin{aligned} \int_Q \theta(t, x)(w_{tt}(t, x) - w_{zz}(t, x)) dQ &\geq \gamma \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W^2(t, x) dQ \\ &\quad + \int_S e^{-\gamma t}\rho_\delta(t)W^2(t, x) dS - \int_\Omega \rho_\delta(z)W^2(0, x) dx. \end{aligned}$$

Учитывая (3.11), получим

$$\begin{aligned} \int_Q \theta(t, x)w_{yy}(t, x) dQ &= -2 \int_Q e^{-\gamma t}w_y(t, x)\rho_\delta(t+z)(d(t, x)W(t, x))_y dQ \\ &\leq C \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W^2(t, x) dQ + C(\gamma)\|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)} + C \int_Q e^{-\gamma t}\rho'_\delta(t+z)w_y^2(t, x) dQ. \end{aligned}$$

Аналогично этому с помощью (3.13), (3.11) и неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} \int_Q \theta(t, x)(2bw_{zy}(t, x) + 2cw_{yt}(t, x)) dQ \\ \leq C \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W^2(t, x) dQ + C(\gamma)\|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_S e^{-\gamma t}\rho_\delta(t)W^2(t, x) dS \\ - \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)w_y(t, x)(w_{tt}(t, x) - w_{zz}(t, x)) dQ. \end{aligned}$$

В последнем интеграле с помощью уравнения (3.12) выражаем сомножитель $w_{tt}(t, x) - w_{zz}(t, x)$ и интегрируем по частям. В результате приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_Q \theta(t, x)(2bw_{zy}(t, x) + 2cw_{yt}(t, x)) dQ \\ \leq C(\gamma)\|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)}C \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W^2(t, x) dQ + \frac{1}{2} \int_S e^{-\gamma t}\rho_\delta(t)W^2(t, x) dS. \end{aligned}$$

Наконец, с помощью (3.14), (3.10) и (3.11) имеем неравенство

$$\int_Q \theta(t, x)L_0 w(t, x) dQ \leq C \int_Q e^{-\gamma t}\rho_\delta(t+z)W^2(t, x) dQ + C(\gamma)\|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Собирая все эти оценки вместе, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S e^{-\gamma t} \rho_\delta(t) W^2(t, x) dS + (\gamma - C) \int_Q e^{-\gamma t} \rho_\delta(t+z) W^2(t, x) dQ \\ & \leq C(\gamma) \|u_{1y}\|_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega \rho_\delta(z) W^2(0, x) dx + C \int_Q e^{-\gamma t} \rho'_\delta(t+z) w_y^2 dQ. \end{aligned}$$

Пусть $\delta > 2\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \rho_\delta(z) (w_t(0, x) + w_z(0, x))^2 dx \\ & = \int_\Omega \rho_\delta(z) (v_{tt}(0, x) + 2v_{tz}(0, x) + v_{zz}(0, x))^2 dx \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Выбирая γ достаточно большим, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_S \rho_\delta(t) W^2(t, x) dS + \int_Q \rho_\delta(t+z) W^2(t, x) dQ \\ & \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C \int_Q \rho'_\delta(t+z) w_y^2(t, x) dQ. \end{aligned}$$

Для оценки последнего слагаемого в полученном неравенстве продифференцируем уравнение (3.10) по y , умножим на $2z\rho'_\delta(t+z)w_y$ и проинтегрируем по частям. Заметим, что $z\rho'_\delta(t+z) \leq C_1$, $z^2\rho'_\delta(t+z) \leq C_2\delta$. Поэтому с помощью неравенства Коши для $\nu > 0$ нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \rho'_\delta(t+z) w_y^2(t, x) dQ \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \nu \int_Q \rho'_\delta(t+z) w_y^2(t, x) dQ \\ & + C(\nu)\delta (\|v_{yy}\|_{W_2^1(Q)} + \|v_y\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}). \end{aligned}$$

Выбирая ν достаточно малым, с учетом предыдущей оценки приходим к неравенству

$$\int_S \rho_\delta(t) W^2(t, x) dS \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C\delta (\|v_{yy}\|_{W_2^1(Q)} + \|v_y\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}).$$

Теперь можно переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом $v(t, x) \rightarrow u(t, x)$. Отметим, что неравенство $\delta > 2\varepsilon$ остается в силе. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_S \rho_\delta(t) u_{zt}^2(t, x) dS \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C \int_S (u_{yz}^2(t, x) + u_z^2(t, x)) dS \\ & + C\delta (\|u_{yy}\|_{W_2^1(Q)} + \|u_y\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в данном неравенстве имеет смысл в силу предполагаемой гладкости $u_1(x)$. Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получим $\|u_{zt}\|_{L_2(S)}^2 \leq C \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2$.

Осталось доказать равенство (3.8). Для этого заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} - (c+b) \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_t + u_z - (c-b)u_y) = (d+c^2-b^2)u_{yy} + \tilde{L}_0 u,$$

где $\tilde{L}_0$ — некоторый оператор первого порядка. Это равенство можно рассматривать как уравнение первого порядка относительно переменной $u_t + u_z - (c-b)u_y$. После интегрирования вдоль характеристики получаем (3.8). $\square$

Теперь мы готовы к оценке решения задачи I при малых t . Ниже это решение будем обозначать как $V(t, x)$.

Теорема 3. Существует $T_0 > 0$, зависящее только от геометрии области Ω и коэффициентов оператора L , для которого справедливо следующее утверждение. Если $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in W_2^1(\Omega)$, $F(t, x) \equiv 0$, то при $T \leq T_0$ имеют место включение $V_{\nu t}|_S \in L_2(S)$ и оценка

$$\|V_{\nu t}|_S\|_{L_2(S)} \leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}). \quad (3.15)$$

При этом для $x \in \Gamma$ имеет место равенство

$$V_{\nu}(0, x) = u_{0\nu}(x) + u_1(x) \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0, x) n_i(x) n_j(x)}. \quad (3.16)$$

Доказательство. С помощью разбиения единицы задача сводится к случаю, когда носители функций u_0 , u_1 расположены в малой окрестности некоторой точки $x_* \in \Gamma$. Далее, с помощью подходящей замены в окрестности точки x_* можно выпрямить границу и свести задачу к случаю полупространства. Напомним, что граница области Γ из класса C^3 . Поэтому после выпрямления границы коэффициенты уравнения будут из класса $C^1(\bar{Q})$. Теперь мы намерены показать, что с помощью некой специальной замены можно свести уравнение к виду, рассмотренному в теореме 2. После чего уже включение (3.15) легко следует из (3.6). Для этого мы, как и в [1], решаем два уравнения эйконала.

Обозначим $\hat{L}(t, x, \nabla \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_{x_i} \xi_{x_j}$. Ниже для простоты рассматриваем лишь случай $n = 2$, $x = (z, y)$. Тогда имеет место представление

$$\hat{L}(t, z, y, \nabla \xi) = a^2(t, z, y) \xi_z^2 + 2b(t, z, y) \xi_z \xi_y + c^2(t, z, y) \xi_y^2.$$

Считаем, что граница области уже выпрямлена, $x_* = (0, 0)$ и $\Gamma = \{(z, y) \mid z=0\}$. Кроме этого, без потери общности можно считать, что $a(0, z, y) \equiv 1$.

Сначала решим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \eta_t^2 &= \hat{L}(t, z, y, \nabla \eta), \\ \eta(0, z, y) &= z, \quad \eta_t(0, z, y) > 0. \end{aligned}$$

В силу гладкости коэффициентов оператора L гладкое решение этой задачи действительно существует для малых $|y|$ и $t, z > 0$. Для классического волнового уравнения решение этой задачи имеет вид $\eta(t, z, y) = t + z$. После этого решаем задачу

$$\begin{aligned} \xi_t^2 &= \hat{L}(t, z, y, \nabla \xi), \\ \xi(0, z, y) &= -\eta(0, z, y), \quad \xi(t, 0, y) = \eta(t, 0, y), \quad \xi_t(0, z, y) > 0, \quad \xi_z(t, 0, y) < 0. \end{aligned}$$

Для классического волнового уравнения решение этой задачи имеет вид $\xi(t, z, y) = t - z$. Далее, как и в [1], полагаем $t_1 = (\eta + \xi)/2$, $z_1 = (\eta - \xi)/2$. Легко проверить, что относительно переменных t_1 , z_1 , y в малой окрестности точки $(0, 0, 0)$ уравнение примет нужный вид.

Отметим, что $\xi(t, z, y)$ получается путем склейки гладких решений двух задач Коши с данными на полуплоскостях $\{t \geq 0, z = 0\}$ и $\{t = 0, z \geq 0\}$. Чтобы применить теорему 2, надо обеспечить ограниченность первых производных у коэффициентов возникающего уравнения. А эти коэффициенты, в свою очередь, зависят от вторых производных функций $\eta(t, z, y)$ и $\xi(t, z, y)$. Ясно, что

проблемы могут возникнуть только на поверхности склейки двух гладких компонент функции $\xi(t, z, y)$. Сами компоненты и их первые производные, очевидно, непрерывно склеиваются. Поэтому для наших целей достаточно обеспечить склейку вторых производных. А для этого достаточно, чтобы вторые производные компонент совпадали на линии $\{t = 0, z = 0\}$.

Уравнение эйконала для η выглядит следующим образом:

$$\eta_t^2 = a^2 \eta_z^2 + 2b \eta_z \eta_y + c^2 \eta_y^2. \quad (3.17)$$

Напомним, что $a(0, z, y) \equiv 1$. Отсюда легко получаем $\eta_t(0, z, y) = \eta_z(0, z, y) \equiv 1$. Значит,

$$\eta_{tz}(0, 0, y) = \eta_{ty}(0, 0, y) = \eta_{zz}(0, 0, y) = \eta_{zy}(0, 0, y) = \eta_{yy}(0, 0, y) \equiv 0.$$

Дифференцируя уравнение (3.17) по t , легко получаем $\eta_{tt}(0, 0, y) = a_t(0, 0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Аналогично этому для ξ имеем

$$\xi_t^2 = a^2(t, z, y) \xi_z^2 + 2b(t, z, y) \xi_z \xi_y + c^2(t, z, y) \xi_y^2. \quad (3.18)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \xi_z(0, z, y) &\equiv -1, \quad \xi_t(0, z, y) \equiv 1, \\ \xi_{tz}(0, +0, y) &= \xi_{ty}(0, +0, y) = \xi_{zz}(0, +0, y) = \xi_{zy}(0, +0, y) = \xi_{yy}(0, +0, y) \equiv 0, \\ \xi_{tt}(0, +0, y) &= a_t(0, 0, y), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При $z = 0$ касательные производные легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \xi_{ty}(+0, 0, y) &= \xi_{zy}(+0, 0, y) = \xi_{yy}(+0, 0, y) \equiv 0, \\ \xi_{tt}(+0, 0, y) &= \eta_{tt}(+0, 0, y) = a_t(0, 0, y). \end{aligned}$$

Отсюда, дифференцируя (3.18) по t , получаем $\xi_{zt}(+0, 0, y) \equiv 0$. А после дифференцирования (3.18) по z получим $\xi_{zz}(+0, 0, y) \equiv 0$. Таким образом, вторые производные функции $\xi(t, z, y)$ непрерывно склеиваются на линии $\{t = 0, z = 0\}$. Для завершения доказательства теоремы осталось доказать равенство (3.8). После замены переменных, которая приводит к выпрямлению границы, уравнение принимает вид $u_{tt} = Au_{zz} + \dots$, где

$$A(0, x_*) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0, x_*) n_i(x_*) n_j(x_*).$$

Следовательно, в точке $(0, x_*)$ имеем $\frac{\partial}{\partial \nu} = A(0, x_*) \frac{\partial}{\partial z}$. После специальной замены в точке $(0, x_*)$ получим $\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{A(0, x_*)} \frac{\partial}{\partial \tau}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s}$. Отсюда и из (3.16) следует (3.8). $\square$

В качестве одного из следствий получаем следующую теорему, имеющую и некоторый самостоятельный интерес.

Теорема 4. Пусть $F(t, x) \in L_1(0, T; W_2^1(\Omega))$, $F|_S \in L_2(S)$, $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Тогда для решения задачи I имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|u_{tt}\|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} \\ &\leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)} + \|F|_S\|_{L_2(S)} + \|F\|_{L_1(0, T; W_2^1(\Omega))}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_0 — величина из теоремы 3, $T \leq T_0$, $\gamma > 0$. Формально умножим уравнение (1.1) на $e^{-\gamma t} L u_t$ и проинтегрируем по частям. Выбирая $\gamma > 0$ достаточно большим, для любого $0 < T_1 < T_0$ легко получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(0,T_1;W_2^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L_\infty(0,T_1;W_2^1(\Omega))}^2 &\leq \int_0^{T_1} \|F(s,x)\|_{W_2^1(\Omega)} \|u_t(s,x)\|_{W_2^1(\Omega)} ds \\ &+ C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|F|s\|_{L_2(S)}^2) + \|u_{\nu t}|s\|_{L_2(S)}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Строгое обоснование данного неравенства будет дано позже. Из (3.20) и уравнения (1.1) следует оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}^2 + \|u_{tt}\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))}^2 &\leq \|u_{\nu t}|s\|_{L_2(S)}^2 \\ &+ C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|F|s\|_{L_2(S)}^2 + \|F\|_{L_1(0,T;W_2^1(\Omega))}^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Далее, из доказательства леммы 1 имеем равенство

$$u_\nu(t,x) = U_\nu(t,x) + \int_0^t v_\nu(t,x,\tau) d\tau.$$

Дифференцируя по t , получим

$$u_{\nu t}(t,x) = U_{\nu t}(t,x) + v_\nu(t+0,x,t) + \int_0^t v_{\nu t}(t,x,\tau) d\tau.$$

По теореме 3 имеем

$$v_\nu(t+0,x,t) = F(t,x) \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) n_i(x) n_j(x)},$$

поэтому в силу той же теоремы $u_{\nu t} \in L_2(S)$. При этом

$$\|u_{\nu t}|s\|_{L_2(S)}^2 \leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|F|s\|_{L_2(S)}^2 + \|F\|_{L_1(0,T;W_2^1(\Omega))}^2).$$

Подставляя это неравенство в (3.21), получаем, что оценка (3.19) имеет место при $T \in [0, T_0]$. Но тогда при $t = T_0$ вновь выполнены условия теоремы 4, и все наши рассуждения можно повторить на интервале $[T_0, T_1]$, затем на интервале $[T_1, T_2]$ и т. д. Пусть $T^* > 0$. Из соображений компактности следует, что найдется такое $\delta(T^*) > 0$, что $T_{k+1} - T_k \geq \delta(T^*)$, если $T_k \leq T^*$. Отсюда получаем, что оценка (3.19) справедлива для любого $T \leq T^*$.

Таким образом, нам осталось лишь обосновать (3.20). Как и раньше, воспользуемся гладкими приближениями. Предположим, что $F(t,x), F_t(t,x) \in W_2^1(Q)$. Пусть $\gamma > 0$. Тогда для решения задачи I для $0 < t < T$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \int_\Omega (u_{tt}^2(t,x) + |\nabla u_t|^2(t,x)) dx + (\gamma - C) \int_Q e^{-\gamma \tau} (u_{\tau\tau}^2(t,x) + |\nabla u_\tau|^2) dQ \\ \leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)}^2) + 2 \int_Q e^{-\gamma \tau} f_\tau(\tau,x) u_{\tau\tau}(\tau,x) dQ. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Доказательство проводится методом Галеркина со специальным базисом аналогично доказательству леммы 4.1 из работы [1]. С помощью гладких приближений, как и в [1], можно показать, что $u \in C(0, T; W_2^2(\Omega))$, $u_t \in C(0, T; W_2^1(\Omega))$, $u_{tt} \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Из уравнения (1.1) имеем $u_{tt} = F + Lu$. Подставляем это выражение в неравенство (3.22), интегрируем по частям и выбираем γ достаточно большим. В результате получаем (3.20). $\square$

Замечание 1. Данный результат о гладкости решения давно известен, но лишь при дополнительном предположении $f|_S \equiv 0$. Как видно, это условие можно существенно ослабить.

4. Достаточные условия разрешимости обратной задачи 1. Теоремы о гладкости решений задачи I позволяют указать некоторые достаточные условия разрешимости обратной задачи 1. Важную роль в дальнейшем играет величина

$$H_0(t) = \int_{\Gamma} K(t, x) h(t, x) \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) n_i(x) n_j(x)} d\Gamma.$$

Теорема 5. Пусть $f(t, x) \in L_1(0, T; W_2^1(\Omega))$, $f|_S \in L_2(S)$, $h(t, x) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $K(t, x) \in L_2(S)$, $K_t(t, x) \in L_2(S)$, $\psi(t) \in W_2^1(0, T)$. Предположим также, что

$$\psi(0) = \int_{\Gamma} K(0, x) u_{0\nu}(x) d\Gamma.$$

Предположим, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство $|H_0(t)| \geq \delta$ для почти всех $t \in [0, T]$. Тогда обратная задача 1 однозначно разрешима при $t < T_0$. Величина $T_0 > 0$ определенным образом зависит от геометрии области Ω и коэффициентов оператора L и не зависит от входных данных задачи. Если же дополнительно к условиям теоремы имеет место включение $h|_S \in L_\infty(0, T; L_2(\Gamma))$, то решение обратной задачи существует и единственно на всем интервале $(0, T)$. Причем для такого решения справедливо неравенство (3.19).

Доказательство. Сначала докажем локальную разрешимость. В силу теоремы 1 достаточно доказать однозначную разрешимость уравнения (2.6). Дифференцируя это уравнение по t , приходим к уравнению

$$H(t, t)q(t) + \int_0^t H_t(t, \tau)q(\tau) d\tau = \Psi'(t). \quad (4.1)$$

Пусть $v(t, x, \tau)$ — решение вспомогательной задачи II с $g(\tau, x) = h(\tau, x)$. По теореме 2 при малых T имеет место равенство

$$H(t, t) = \int_{\Gamma} K(t, x) v_\nu(t, x, t) d\Gamma = H_0(t)$$

и $H_t(t, \tau) \in L_2(D_T)$. Следовательно, уравнение (4.1) однозначно разрешимо и $q(t) \in L_2(0, T)$. Теперь рассмотрим $V(t, x)$ — решение задачи I с $F(t, x) = f(t, x)$. Как и в теореме 4, функцию $V(t, x)$ можно представить в виде интеграла Дюамеля. Применяя теорему 3, легко получаем

$$\int_{\Gamma} K(0, x) V_\nu(0, x) d\Gamma = \int_{\Gamma} K(0, x) u_{0\nu}(x) d\Gamma.$$

Следовательно, $\Psi(0) = 0$. Значит, $q(t)$ — единственное решение уравнения (2.6). По теореме 1 обратная задача 1 однозначно разрешима при $t < T_0$.

Таким образом, мы доказали существование локального обобщенного решения.

Пусть выполнено условие $h|_S \in L_\infty(0, T; L_2(\Gamma))$, тогда для функции $F(t, x) = q(t)h(t, x) + f(t, x)$ при $t < T_0$ выполнены условия теоремы 4. А значит, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{L_\infty(0, T_0; W_2^1(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0, T_0; W_2^2(\Omega))} \\ & \leq C(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_1\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f|_S\|_{L_2(S)} + \|f\|_{L_1(0, T_0; W_2^1(\Omega))} + \|\psi\|_{W_2^1(0, T)}). \end{aligned}$$

Но тогда условия теоремы выполняются и при $t = T_0$. Отсюда, как и раньше, следует, что решение можно продолжить на весь интервал $(0, T)$. $\square$

5. Коэффициентная обратная задача. В этом разделе будет установлена локальная разрешимость некоторых коэффициентных обратных задач. Как и в [1], рассмотрим лишь типичный пример.

Пусть для $i = 1, 2$ заданы линейные операторы l_i вида

$$l_i u = \alpha_i(t, x)u_t(t, x) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t, x)u_{x_j}(t, x) + \gamma_i(t, x)u(t, x).$$

Коэффициенты операторов l_1, l_2 предполагаются гладкими. Для некоторых заданных функций $h_1(t, x), h_2(t, x)$ положим

$$F(t, x, u) = q_1(t)(h_1(t, x) + l_1 u(t, x)) + q_2(t)(h_2(t, x) + l_2 u(t, x)).$$

Рассмотрим обратную задачу 2:

$$u_{tt}(t, x) - L(t, x, D_x)u(t, x) = F(t, x, u), \quad (t, x) \in Q, \quad (5.1)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.2)$$

$$u_t(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.3)$$

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S, \quad (5.4)$$

$$\int_{\Gamma} K_1(t, x)u_\nu(t, x) d\Gamma = \psi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (5.5)$$

$$\int_{\Gamma} K_2(t, x)u_\nu(t, x) d\Gamma = \psi_2(t), \quad t \in (0, T). \quad (5.6)$$

Обобщенным решением обратной задачи 2 будем называть функцию $u(t, x) \in W_2^1(Q)$ и пару функций $q_1(t), q_2(t) \in L_2(0, T)$ таких, что $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи (5.1)–(5.4) и для почти всех $t \in (0, T)$ выполнены условия (5.5), (5.6).

В свете теоремы 5 естественным образом возникает матрица

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{pmatrix}$$

с коэффициентами

$$H_{ij}(t) = \int_{\Gamma} K_i(t, x)h_j(t, x) \sqrt{\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(t, x)n_k(x)n_l(x)} d\Gamma, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Обозначим

$$B_H = \{h(t, x) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \mid h(t, x)|_S \in L_\infty(0, T; L_2(\Gamma))\}.$$

Теорема 6. Пусть $h_1(t, x), h_2(t, x) \in B_H$, $K_1(t, x), K_{1t}(t, x) \in L_2(S)$, $K_2(t, x), K_{2t}(t, x) \in L_2(S)$, $\psi_1(t), \psi_2(t) \in W_2^1(0, T)$ и $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$. Предположим, что для некоторого $t_0 > 0$ и почти всех $0 < t < t_0$ существует матрица $\mathbf{H}^{-1}(t)$ и ее коэффициенты ограничены некоторой константой M . Тогда для некоторого $t_1 > 0$ на интервале $(0, t_1)$ существует решение обратной задачи 2, для которого справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(0, t_1; W_2^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L_\infty(0, t_1; W_2^1(\Omega))} + \|u_{tt}\|_{L_1(0, t_1; L_2(\Omega))} \\ \leq C(\|\psi_1\|_{W_2^1(0, t_1)} + \|\psi_2\|_{W_2^1(0, t_1)}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Такое решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < t_1 < t_0$ и $R > 0$ — некоторые величины, которые мы определим позже. Обозначим через V пространство функций $v(x, t)$ таких, что

$$v \in L_\infty(0, t_1; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)), \quad v_t \in L_\infty(0, t_1; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \quad v_{tt} \in L_1(0, t_1; L_2(\Omega)).$$

Пусть B_R — шар радиуса R в V . Для $v \in B_R$ определим тройку функций $u(t, x)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ как решение линейной обратной задачи (5.1)–(5.6) с правой частью

$$F(t, x) = q_1(t)(h_1(t, x) + l_1 v(t, x)) + q_2(t)(h_2(t, x) + l_2 v(t, x)).$$

После этого формально определим отображение A по формуле $Av = u$. Далее мы покажем, что для выбранных надлежащим образом величин t_1 и R отображение A корректно определено и является сжимающим. Действительно, как и ранее, обратная задача сводится к системе уравнений Вольтерра второго рода

$$\mathbf{N}(t, t)q(t) + \int_0^t \mathbf{N}_t(t, \tau)q(\tau) d\tau = \Psi'(t),$$

где $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ и $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$. Для разрешимости этой системы достаточно, чтобы матрица $\mathbf{N}(t, t)$ обладала ограниченной обратной на интервале $(0, t_1)$. Заметим, что элементы этой матрицы имеют вид

$$N_{ij}(t) = H_{ij}(t) + \int_\Gamma K_i(t, x) l_j v(t, x) \sqrt{\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(t, x) n_k(x) n_l(x)} d\Gamma, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

В силу включения $v \in B_R$ для некоторой константы C_0 справедливы неравенства

$$|N_{ij}(t) - H_{ij}(t)| \leq C_0 \|v\|_V \leq C_0 R, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Значит, при $R < R_0 = 1/(4MC_0)$ для почти всех $0 < t < t_0$ существует матрица $\mathbf{N}^{-1}(t, t)$, и ее коэффициенты ограничены константой $2M$. Действуя, как и в теореме 5, легко получаем, что при $0 < t_1 < T_0 \leq t_0$ решение соответствующей линейной обратной задачи (5.1)–(5.6) существует и для него справедлива оценка

$$\|q_1(t)\|_{L_2(0, t_1)} + \|q_2(t)\|_{L_2(0, t_1)} + \|u\|_V \leq C_1(t_0, M, R_0) \|\Psi\|_{W_2^1(0, t_1)} = C^*.$$

Выбираем t_1 так, чтобы $C^* \leq R$. Тогда $\|u\|_V \leq R$ и отображение A действует из шара B_R в шар B_R . Теперь покажем, что это отображение сжимающее. Пусть $v_1, v_2 \in B_R$. Обозначим через $u^{(1)}$, $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$ и $u^{(2)}$, $q_1^{(2)}$, $q_2^{(2)}$ решения

соответствующих обратных задач. Пусть $v = v_1 - v_2$, $w = u^{(1)} - u^{(2)}$, $d_1 = q_1^{(1)} - q_1^{(2)}$ и $d_2 = q_2^{(1)} - q_2^{(2)}$. Тогда

$$w_{tt}(t, x) - L(t, x, D_x)w(t, x) = F_1(t, x) + F_2(t, x),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(t, x) &= d_1(t)(h_1(t, x) + l_1 v_1(t, x)) + d_2(t)(h_2(t, x) + l_2 v_1(t, x)), \\ F_2(t, x) &= q_1^{(2)}(t)l_1 v(t, x) + q_2^{(2)}(t)l_2 v(t, x). \end{aligned}$$

Решая эту систему, как и ранее, получаем

$$\|w\|_V \leq C_2(t_0, M, R_0)\|F_2\|_{L_1(0, t_1; W_2^1(\Omega))} \leq C^* C_3(t_0, M, R_0)\|v\|_V. \quad (5.8)$$

Теперь уже выбираем t_1 так, чтобы $C^* C_3(t_0, M, R_0) < 1$. При таком выборе отображение A сжимающее, а значит, имеет неподвижную точку. Следовательно, обратная задача 2 разрешима. Для доказательства единственности рассматриваем разность двух предполагаемых решений и получаем для нее оценку, аналогичную (5.8). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Артюшин А. Н. Метод Дюамеля в обратных задачах для волнового уравнения. I // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 2. С. 30–46.
2. Egger H., Kugler T., Strogies N. Parameter identification in a semilinear hyperbolic system // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 5. 055022.
3. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений // Мат. заметки Якутск. гос. ун-та. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 64–78.
4. Прилепко А. И., Орловский Д. Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. III // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1343–1353.
5. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Поступила в редакцию 6 июня 2019 г.

После доработки 28 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Артюшин Александр Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
630090 г. Новосибирск
E-mail: alexsp3@yandex.ru