Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, Structure of the phase portrait of a piecewise-linear dynamical system, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 19–25

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.402>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 14:32:45

СТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ОДНОЙ КУСОЧНО–ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ*)

Н. Б. Аюпова, В. П. Голубятников

Рассматривается кусочно-линейная динамическая система размерности 4, моделирующая генную сеть, которая регулируется одной отрицательной и тремя положительными обратными связями. Для такой модели Л. Гласс и Дж. Пастернак установили условия существования устойчивого цикла. В фазовом портрете указанной системы вне области притяжения этого устойчивого цикла мы строим кусочно-линейную инвариантную поверхность, имеющую нетривиальное зацепление с циклом Гласса — Пастернака.

Ключевые слова: блочно-линейные динамические системы, фазовые портреты, инвариантные поверхности, циклы, отображение Пуанкаре, модели генных сетей, зацепление Хопфа.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.402

Мы продолжаем начатое в [1–3] изучение кусочно-линейных динамических систем биохимической кинетики, моделирующих организацию и функционирование генных сетей (см. также [4]). Одна из основных задач всех этих публикаций состояла в описании условий существования периодических траекторий (циклов) названных систем уравнений биохимической кинетики. В некоторых из указанных работ рассматривались также вопросы единственности циклов и их устойчивости. Мотивировавшая наши исследования биологическая интерпретация таких динамических систем подробно излагается в [5–8]. В частности, в работе [6] были построены кусочно-линейные динамические системы вида

$$\frac{dy_1}{dt} = A_1(1 - H(y_n)) - y_1, \quad \frac{dy_i}{dt} = A_i H(y_{i-1}) - y_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (1)$$

где H — булева функция, $H(1) = 1$, $H(0) = 0$, а переменные y_i обозначают концентрации веществ, участвующих в реакциях моделируемой генной сети.

Также в [6] была дана интерпретация всех переменных и общей структуры этой системы: вычитаемые в ее уравнениях обозначают процессы деградации биологических компонент, неотрицательное слагаемое $A_1(1 - H(y_n))$ в первом уравнении описывает зависимость скорости синтеза «первого» вещества, концентрация которого равна y_1 , от концентрации y_n «предыдущего» вещества в генной сети. Аналогичные процессы моделируются остальными уравнениями системы, и для нее были получены условия существования устойчивого цикла.

Следуя [2, 6, 9], с целью упрощения вычислений совершим замену переменных $x_i = y_i - 1$ и будем рассматривать случай $n = 4$. Фазовые портреты таких

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00057) и Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5 (проект 0314-2018-0011).

систем при $n > 4$ имеют более сложное строение. После замены исследуемая система принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= L_1(x_4) - x_1, & \frac{dx_2}{dt} &= \Gamma_2(x_1) - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \Gamma_3(x_2) - x_3, & \frac{dx_4}{dt} &= \Gamma_4(x_3) - x_4, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции Γ_i представляют собой простейшие монотонно возрастающие ступеньки:

$$\Gamma_i(x_{i-1}) = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } x_{i-1} > 0, \ i = 2, 3, 4; \\ -1 & \text{при } -1 \leq x_i \leq 0, \ i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

График функции L_1 — монотонно убывающая ступенька:

$$L_1(x_4) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } -1 < x_4 \leq 0, \\ -1 & \text{при } x_4 > 0. \end{cases}$$

Во всех уравнениях системы (2) неотрицательные величины $x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, x_4 + 1$ обозначают концентрации четырех веществ, участвующих в реакциях, происходящих в моделируемой генной сети. Параметры α_i характеризуют скорости реакций синтеза компонент генной сети и в дальнейшем предполагаются положительными. Монотонно убывающая функция L_1 описывает отрицательную обратную связь в генной сети, а монотонно возрастающие функции Γ_i соответствуют положительным обратным связям.

1. Комбинаторная структура фазового портрета системы (2).

Рассмотрим параллелепипед $Q = [-1, \alpha_1] \times [-1, \alpha_2] \times [-1, \alpha_3] \times [-1, \alpha_4]$ и точку $O = (0, 0, 0, 0)$ в его внутренности. В этой точке правые части всех уравнений системы (2) имеют разрывы первого рода.

В работах [3, 9, 10] было установлено, что для динамических систем вида (1), (2) область Q положительно инвариантна и с течением времени все траектории таких систем, независимо от начальных данных, попадают в эту область и в дальнейшем из нее не выходят. Поэтому у всех рассматриваемых траекторий этой системы начальные данные выбираются в области Q . Мы будем рассматривать только такие траектории точек внутренности Q , которые не проходят через пересечения двух и более плоскостей $x_i = 0$.

Описание фазового портрета симметричной динамической системы вида (2), т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, проводилось в работах [3, 4, 9]. В настоящей работе рассматривается несимметричный случай, в котором все коэффициенты α_i , вообще говоря, различны.

Разобьем область Q координатными плоскостями $x_i = 0$ на 16 более мелких параллелепипедов, которые будем называть блоками и нумеровать бинарными мультииндексами $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\}$, где $\varepsilon_i = 0$, если $x_i < 0$, и $\varepsilon_i = 1$, если $x_i > 0$ (как у вершин 4-мерного куба). Здесь и далее $i = 1, 2, 3, 4$.

Как было установлено в работах [3, 6, 9], для произвольных размерностей у кусочно-линейных систем вида (1), (2) траектории кусочно-линейны. В этих же работах для таких «бильярдообразных» систем были описаны переходы траекторий через гиперплоскости $x_i = 0$.

Лемма 1. Для любых двух смежных блоков B_1, B_2 разбиения области Q траектории всех точек внутренности их общей трехмерной грани $F = B_1 \cap B_2$ проходят через эту грань только в одну сторону: либо из B_1 в B_2 , либо из B_2 в B_1 .

Будем обозначать эти переходы следующим образом: $B_1 \rightarrow B_2$ и соответственно $B_2 \rightarrow B_1$. В случае $B_1 \rightarrow B_2$ когда траектория системы (2) попадает из

блока B_1 на грань $F = B_1 \cap B_2$ во внутреннюю точку $P^{(0)}$ этой грани, то в смежный блок B_2 она продолжается как решение системы (2) в B_2 с начальными данными $P^{(0)}$ (как это делается в теории бильярдов; см., например, [11]).

Для доказательства леммы рассмотрим пару смежных блоков, например $\{1101\}$ и $\{0101\}$, которые имеют общую грань F на плоскости $x_1 = 0$. Внутри каждого из них система (2) принимает вид:

для блока $\{1101\}$

$$\frac{dx_1}{dt} = -1 - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 - x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = -1 - x_4; \quad (3)$$

для блока $\{0101\}$

$$\frac{dx_1}{dt} = -1 - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = -1 - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 - x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = -1 - x_4 \quad (4)$$

и несложным образом решается явно. Например, в блоке $\{0101\}$ имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1 + e^{-t}; & x_2(t) &= \alpha_2 + (x_2^0 - \alpha_2)e^{-t}; \\ x_3(t) &= \alpha_3 + (x_3^0 - \alpha_3)e^{-t}; & x_4(t) &= -1 + (x_4^0 + 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

где $0 < x_2^0 < \alpha_2$, $-1 < x_3^0 < 0$, $0 < x_4^0 < \alpha_4$ — координаты лежащей в грани F начальной точки ($t = 0$) описываемого участка траектории, лежащего в блоке $\{0101\}$. Подобным же образом эта траектория описывается в блоке $\{1101\}$, и из полученных уравнений видно, что на грани F и в ее окрестности координатная функция $x_1(t)$ убывает вдоль всех траекторий, проходящих через F , поэтому все такие траектории переходят из блока $\{1101\}$ в блок $\{0101\}$. Теми же рассуждениями утверждение леммы проверяется для любой пары смежных блоков и для любых систем вида (1), (2).

Пусть G — ориентированный граф с вершинами $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\}$; это четырехмерный куб, ребра которого ориентированы в соответствии с леммой 1.

В работе [6] были установлены условия, при которых система (2) имеет устойчивый цикл C_1 , проходящий по блокам диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \{1111\} & \longrightarrow & \{0111\} & \longrightarrow & \{0011\} & \longrightarrow & \{0001\} \\ & \uparrow & & & & & \downarrow \\ \{1110\} & \longleftarrow & \{1100\} & \longleftarrow & \{1000\} & \longleftarrow & \{0000\} \end{array} \quad (5)$$

Необходимым и достаточным условием существования этого цикла являются неравенства $\alpha_i > 0$, которые в наших рассмотрениях предполагаются выполненными.

Обозначим через W_1 объединение блоков, перечисленных в диаграмме, стрелки которой показывают направление перехода траектории системы (2) из блока в блок. В терминах работ [4, 12] все эти блоки имеют валентность, равную единице: траектории могут переходить только в один соседний блок по направлению стрелки диаграммы (5). Следовательно, область W_1 является положительно инвариантной для системы (2), из нее траектории системы не выходят. В этих же работах для систем вида (1), (2), имеющих произвольную размерность n , валентность блока B была определена как количество смежных с ним блоков, в которые траектории точек внутренности B могут переходить через их общие $(n - 1)$ -мерные грани, как в лемме 1.

Пусть W_3 — объединение оставшихся блоков системы (2), которые имеют валентность три; их можно объединить в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \{1101\} & \longrightarrow & \{0101\} & \longrightarrow & \{0100\} & \longrightarrow & \{0110\} \\ & \uparrow & & & & & \downarrow \\ \{1001\} & \longleftarrow & \{1011\} & \longleftarrow & \{1010\} & \longleftarrow & \{0010\} \end{array} \quad (6)$$

Здесь стрелки также показывают возможные переходы из блока в блок, но в отличие от диаграммы (5) из каждого блока диаграммы (6) траектории могут переходить в три соседних блока, например, из блока $\{1101\}$ траектории динамической системы (2) могут переходить в блок в $\{0101\}$, что показано в диаграмме (6), а также в блоки валентности один: в $\{1111\}$ и в $\{1100\}$. В терминах ориентированного графа G валентность блока B равна количеству ребер графа, выходящих из его вершины, которая соответствует этому блоку.

2. Построение инвариантной поверхности в области W_3 . Для общих граней пар соседних блоков, составляющих область W_3 , введем обозначения

$$\begin{aligned} F_0 &= \{1101\} \cap \{0101\}, \quad \text{где } x_1 = 0; & F_1 &= \{0101\} \cap \{0100\}, \quad \text{где } x_4 = 0; \\ F_2 &= \{0100\} \cap \{0110\}, \quad \text{где } x_3 = 0; & F_3 &= \{0110\} \cap \{0010\}, \quad \text{где } x_2 = 0; \\ F_4 &= \{0010\} \cap \{1010\}, \quad \text{где } x_1 = 0; & F_5 &= \{1010\} \cap \{1011\}, \quad \text{где } x_4 = 0; \\ F_6 &= \{1011\} \cap \{1001\}, \quad \text{где } x_3 = 0; & F_7 &= \{1001\} \cap \{1101\}, \quad \text{где } x_2 = 0. \end{aligned}$$

Для точек всех этих граней их сдвиги вдоль траекторий системы (2) внутри каждого из перечисленных в диаграмме (6) восьми блоков будем обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0: F_0 \rightarrow F_1, \quad \varphi_1: F_1 \rightarrow F_2, \quad \varphi_2: F_2 \rightarrow F_3, \quad \varphi_3: F_3 \rightarrow F_4, \\ \varphi_4: F_4 \rightarrow F_5, \quad \varphi_5: F_5 \rightarrow F_6, \quad \varphi_6: F_6 \rightarrow F_7, \quad \varphi_7: F_7 \rightarrow F_8 = F_0, \end{aligned}$$

и пусть $\Phi: F_0 \rightarrow F_0$ — композиция этих сдвигов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду того, что блоки диаграммы (4) имеют валентность три, траектории многих точек, лежащих в гранях F_j (здесь и далее $j = 0, 1, \dots, 7$), попадают на грани блоков, перечисленных в диаграмме (5), и дальше будут проходить по блокам валентности один, как это наблюдалось для других аналогичных динамических систем (см. [3, 9]). Поэтому при всех j отображение $\varphi_j: F_j \rightarrow F_{j+1}$ определено не на всей грани F_j , а только для тех ее точек, траектории которых попадают на грань F_{j+1} .

Для каждого блока разбиения решения системы (2) находятся явным образом (см., например, (3), (4)). Для каждой грани F_j зададим систему координат $OX_1^{(j)}X_2^{(j)}X_3^{(j)}$, у которой положительный октант такой системы содержит в себе эту грань. Нумерацию координатных осей на этих гранях зададим следующим образом: если грань F_j лежит на гиперплоскости $x_k = 0$, то $X_1^{(j)} = \pm x_{k+1}$, $X_2^{(j)} = \pm x_{k+2}$, $X_3^{(j)} = \pm x_{k+3}$. Знаки выбираются так, чтобы все координаты $X_i^{(j)}$ на каждой грани F_j были положительными, а нижние индексы у переменных возрастали по циклу: $2, 3, 4, 1, 2, 3, \dots$.

Построим траекторию $\mathcal{T}$ системы (2), проходящую через все блоки диаграммы (6) согласно стрелкам. В качестве начальной точки выберем на грани F_0 (где $x_1 = 0$) произвольную внутреннюю точку $P^{(0)}$ с координатами $X_1^{(0)} = x_2$, $X_2^{(0)} = -x_3$, $X_3^{(0)} = x_4$.

Вычисления, подобные приведенным в [3, 10, 12], показывают, что пересечения траектории $\mathcal{T}$ с гранями F_j диаграммы (6) $P^{(j)} = \mathcal{T} \cap F_j = (X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)})$ определяются формулами

$$P^{(1)} = \frac{M_0 P^{(0)}}{1 + X_3^{(0)}}; \quad P^{(2)} = \frac{M_1 P^{(1)}}{\alpha_3 + X_3^{(1)}}; \quad P^{(3)} = \frac{M_2 P^{(2)}}{1 + X_3^{(2)}};$$

$$\begin{aligned} P^{(4)} &= \frac{M_3 P^{(3)}}{\alpha_1 + X_3^{(3)}}; & P^{(5)} &= \frac{M_4 P^{(4)}}{\alpha_4 + X_3^{(4)}}; & P^{(6)} &= \frac{M_5 P^{(5)}}{1 + X_3^{(5)}}; \\ P^{(7)} &= \frac{M_6 P^{(6)}}{\alpha_2 + X_3^{(6)}}; & P^{(8)} &= \frac{M_7 P^{(7)}}{1 + X_3^{(7)}} \in F_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь M_j — матрицы размера 3×3 , задаваемые уравнениями

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, & M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_3 & -1 \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 1 & 0 & -\alpha_4 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_4 \end{pmatrix}, & M_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_4 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & \alpha_4 & -1 \end{pmatrix}, & M_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \\ M_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha_2 & -1 \end{pmatrix}, & M_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а точки $P^{(j)}$ отождествляются со своими радиус-векторами $OP^{(j)}$ (вектор-столбцами). Формулы (7) описывают проективные преобразования $F_j \rightarrow F_{j+1}$, заданные, как было сказано выше, на части граней F_j . При этих преобразованиях лежащие в этих грани лучи, проходящие через точку O , переходят на следующие грани в лучи, также проходящие через O .

Обозначим $M_* = M_7 M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 M_1 M_0$, тогда композиция $\Phi : F_0 \rightarrow F_0$ задается уравнением

$$\Phi(P^{(0)}) = \frac{M_* P^{(0)}}{\mathcal{L}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)})}, \quad (8)$$

где $\mathcal{L}$ — неоднородная линейная функция координат точки $P^{(0)}$, принимающая на F_0 строго положительные значения.

Можно проверить, что для каждой матрицы M_j обратная к ней матрица M_j^{-1} имеет неотрицательные элементы, а у матрицы M_*^{-1} все элементы положительны. В частности,

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_3} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = \frac{1}{\alpha_3} \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и т. д.

Согласно теореме Фробениуса — Перрона у матрицы M_* есть собственный вектор e_1 с положительными координатами, соответствующий положительно-му собственному числу λ_1 этой матрицы, поэтому если $M_*^{-1}e_1 = (\lambda_1)^{-1}e_1$, то $M_*e_1 = \lambda_1 e_1$ (см., например, [13]).

Следовательно, если выбрать точку $P^{(0)}$ на луче l , сонаправленном с e_1 , то ее траектория после обхода диаграммы (6) возвращается на этот луч, и траектории всех точек, лежащих на луче l , образуют инвариантную восьмигранную кусочно-линейную поверхность $S_3 \subset W_3$ с вершиной в точке O и восемью гранями, каждая из которых лежит в соответствующем блоке диаграммы (6). Наличие положительного знаменателя в формуле (8) построению такой инвариантной поверхности не мешает.

Схема наших построений в целом следовала приведенному в [6] выводу условий существования цикла C_1 в инвариантной области W_1 , в которой так же может быть построена инвариантная восьмигранная поверхность S_1 с вершиной в точке O . Эта поверхность содержит цикл C_1 , если выполнены условия его существования.

3. Взаимное расположение цикла $\mathcal{C}_1$ и поверхности S_3 . Введем на луче l положительную координату ζ и запишем преобразование Φ на этом инвариантном луче:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\lambda_1 \zeta}{\beta + K\zeta}, \quad \text{где } K > 0. \quad (9)$$

Здесь и далее для упрощения формул введены обозначения: $\beta := \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ и I_2 — «второй» инвариант матрицы M_* , который является довольно громоздким неоднородным многочленом степени 12 с целыми коэффициентами от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Характеристический многочлен матрицы M_* имеет вид $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\beta\lambda^2 + I_2\lambda - \beta^3$. Имеем

$$P(\beta) = \beta(I_2 - 3\beta^2); \quad P'(\beta) = I_2 - 3\beta^2; \quad P''(\beta) = 0;$$

$$P'(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 3I_2}}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определитель матрицы M_* равен β^3 , а ее след равен 3β , т. е. среднее геометрическое собственных чисел этой матрицы равно их среднему арифметическому, и, значит, если эти собственные числа вещественны, то все они совпадают.

Можно (но нелегко) проверить, что при всех положительных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ выполняется неравенство $I_2 - 3\beta^2 > 0$, поэтому функция $P(\lambda)$ монотонно растет с ростом λ , а уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет единственный вещественный корень λ_1 , который лежит в интервале $(0, \beta)$. В таком случае уравнение $\zeta = \Phi(\zeta)$ не имеет положительных решений, следовательно, траектории всех точек, лежащих на поверхности S_3 , незамкнуты, и с ростом t стягиваются к точке O вдоль поверхности S_3 , обходя «по спирали» все блоки диаграммы (6).

Из рассмотрения итераций отображения Φ и вида матриц M_*^{-k} , $k = 1, 2, \dots$, вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Траектории всех точек области $Q \setminus S_3$ притягиваются циклом $\mathcal{C}_1$.

Кроме того, имеет место

Теорема 2. Цикл $\mathcal{C}_1 \subset W_1$ имеет нетривиальное зацепление с поверхностью $S_3 \subset W_3$.

Это зацепление сводится к зацеплению Хопфа (см. [14]), что вытекает из рассмотрения на ориентированном графе G описанных диаграмм (5) и (6) его циклических подграфов; их индекс зацепления на границе четырехмерного куба вычисляется несложно. В частном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 > 0$ теорема 2 была установлена в [9].

Отметим, что в фазовых портретах динамических систем вида (1), у которых в правых частях уравнений присутствуют немонотонные функции, могут содержаться области с хаотическим поведением траекторий (см., например, [7, 12]).

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Г. Бардакову, М. В. Нецадиму и В. А. Чуркину за полезные обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акиншин А. А., Голубятников В. П., Голубятников И. В. О некоторых многомерных моделях функционирования генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 3–9.
2. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. О единственности цикла в трехмерной модели молекулярного репрессилатора // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–7.

3. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. О двух классах нелинейных динамических систем. Четырехмерный случай // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 282–289.
4. Казанцев М. В. О некоторых свойствах графов доменов динамических систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 4. С. 42–49.
5. Banks H. T., Mahaffy J. M. Stability of cyclic gene models for systems involving repression // J. Theor. Biol. 1978. V. 74. P. 323–334.
6. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biol. 1978. V. 6. P. 207–223.
7. Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Kogai V. V., Khlebodarova T. M. Alternative splicing can lead to chaos // J. Bioinform. Comput. Biol. 2015. V. 13, N 1. P. 1540003-1–1540003-25.
8. Hastings S. P., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems // J. Differential Equations. 1977. V. 25. P. 39–64.
9. Голубятников В. П., Каленых А. Э. О строении фазовых портретов некоторых нелинейных динамических систем // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2015. Т. 15, № 1. С. 45–53.
10. Голубятников В. П., Иванов В. В. Единственность и устойчивость цикла в трехмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 4. С. 19–28.
11. Табачников С. Геометрия и бильярд. Москва; Ижевск: изд. Ижевск. ин-та компьют. исследований, 2011.
12. Голубятников В. П., Казанцев М. В. Об одной кусочно-линейной динамической системе, моделирующей генную сеть с переменной обратной связью // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 4. С. 28–37.
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. Turaev V. G. Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds. Walter de Gruyter, 2010. (De Gruyter Studies in Mathematics. V. 18).

Поступила в редакцию 5 июля 2019 г.

После доработки 5 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Аюпова Наталья Борисовна
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
 просп. Акад. Коптюга, 4
 Новосибирский государственный университет
 ул. Пирогова, 1
 630090 г. Новосибирск
 Голубятников Владимир Петрович
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
 Новосибирский военный институт им. И. К. Яковлева
 ул. Ключ-Камышенское плато, 6/2
 630114 г. Новосибирск
 E-mail: ayupova@math.nsc.ru; glbtn@math.nsc.ru