Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

U. D. Durdiev, An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 26–32

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.403>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.81.55.215

April 26, 2023, 16:11:39

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

У. Д. Дурдиев

Рассматривается задача восстановления функции памяти вязкоупругой среды из системы уравнений вязкоупругости для однородной анизотропной среды. В качестве дополнительной информации задан образ Фурье по пространственным переменным вектора смещения для значений параметра преобразования $\nu_0 \neq 0$. Показано, что если данные задачи удовлетворяют некоторым условиям согласования и гладкости, то решение поставленной задачи однозначно определяется в классе непрерывных функций и непрерывно зависит от заданных функций.

Ключевые слова: обратная задача, вязкоупругость, существование, единственность, устойчивость.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.403

1. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, с начальными условиями

$$u_i|_{t < 0} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь $u_i(x, t)$ являются компонентами вектор-функции смещения $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))^T$; $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))^T$ — внешняя сила; $\rho > 0$ — плотность среды, T — знак транспонирования. Через T_{ij} обозначен тензор напряжений, связанный с вязкоупругой средой:

$$T_{ij}(x, t) = \sum_{k,l=1}^3 \left\{ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x, t) + \int_0^t K_i(\tau) c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x, t - \tau) d\tau \right\}. \quad (3)$$

Здесь c_{ijkl} — модули упругости среды, $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ — функция релаксации среды. Модули упругости удобно описывать в терминах матрицы размерности 6×6 в соответствии со следующими соглашениями, касающимися пары (i, j) индексов $i, j = 1, 2, 3$, приводя их к одному индексу $\alpha = 1, 2, \dots, 6$: $(11) \rightarrow 1$, $(22) \rightarrow 2$, $(33) \rightarrow 3$, $(23) = (32) \rightarrow 4$, $(13) = (31) \rightarrow 5$, $(12) = (21) \rightarrow 6$. Это соответствие возможно благодаря свойствам симметрии $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$. Дополнительное свойство симметрии $c_{ijkl} = c_{klij}$ подразумевает, что матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{6 \times 6}$ симметрична: здесь $\alpha = (ij)$, $\beta = (kl)$. Известно, что $\rho > 0$ и матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{6 \times 6}$ положительно определена.

Среди исследований, наиболее близких к настоящей работе, отметим [1–6]. В работе [1] исследована глобальная разрешимость и устойчивость решения обратной задачи для определения ядра из системы интегродифференциальных уравнений Максвелла для однородной анизотропной среды. В [2] изучена обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным членом типа свертки относительно одномерной функции памяти среды и решения прямой задачи. Методом Фурье эта задача сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода, к которым применяется принцип сжатых отображений Банаха. В работах [3, 4, см. также литературу в них] исследуются задачи определения многомерного ядра в уравнении вязкоупругости для неоднородной изотропной среды. В [5, 6] исследованы задачи восстановления одномерных ядер из уравнения вязкоупругости в ограниченной и неограниченной областях. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций с весовыми нормами. Основная особенность, присущая [1, 2, 4–6] и данной работе, заключается в использовании сосредоточенных источников на границе или в фиксированной точке. С численными методами решения таких задач можно ознакомиться в [7]. Работы [8–11] посвящены задачам определения ядра из интегродифференциальных уравнений с интегралом типа свертки с распределенным на всю рассматриваемую область источником. Данная статья по методу исследования близка к [1], но в отличие от перечисленных работ здесь изучается задача определения диагональной матричной функции из системы уравнений вязкоупругости.

Мы рассмотрим задачу (1), (2) для случая, когда источник возмущения сосредоточен в фиксированной точке пространства, но распределен по времени, т. е. функция $f(x, t)$ имеет вид

$$f(x, t) = \vec{e}\delta(x)\theta(t)f_0(t), \quad (4)$$

где $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ — заданный единичный вектор, который определяет направление силы; $\theta(t)$ — функция Хевисайда; $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке пространства $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; $f_0(t)$ — заданная гладкая скалярная функция.

Задача, в которой вектор $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)(x, t)$ должен быть определен из (1)–(4) для заданных матриц $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $C = (c_{\alpha\beta})_{(6 \times 6)}$, где $\rho > 0$, будет называться прямой задачей.

Пусть $U(\nu, t) = (U_1, U_2, U_3)^T(\nu, t)$ — образ Фурье функции $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)^T(x, t)$ по $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, т. е.

$$U_j(\nu, t) = \int_{\mathbb{R}^3} u_j(x, t) e^{i\langle x, \nu \rangle} dx, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \langle x, \nu \rangle = \sum_{j=1}^3 x_j \nu_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

где ν — параметр преобразования.

Поставим следующую обратную задачу: найти матричную функцию $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$, $t \geq 0$, входящую в равенства (1), если относительно образа Фурье решения прямой задачи (1)–(4) для $\nu = \nu_0$, $t > 0$ известна дополнительная информация

$$U(\nu_0, t) = g(t), \quad g(t) = (g_1, g_2, g_3)^T(t). \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи является матричная функция $K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t)$ такая, что соответствующее ей решение задачи (1)–(4) удовлетворяет условию (5).

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Фиксируем произвольное $T > 0$. Предположим, что $g(t) \in C^5[0, T]$, $f_0(t) \in C^2[0, T]$ и выполнены следующие соотношения:

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad f_0(0) \neq 0, \quad g''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f_0(0), \quad g'''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f_0'(0),$$

$$g^{(4)}(0) = \frac{Q(\nu_0)\vec{e}}{\rho^2} f_0(0) + \frac{\vec{e}}{\rho} f_0''(0), \quad e_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0)\vec{e}_j =: q_i(c_{kl}, \nu_0, e_k) \neq 0, \quad \nu_0 \neq 0,$$

где

$$Q(\nu) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $Q_{ij}(\nu)$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, являются однородными многочленами второго порядка по ν :

$$Q_{11}(\nu) = c_{11}\nu_1^2 + 2c_{16}\nu_1\nu_2 + c_{66}\nu_2^2 + 2c_{15}\nu_1\nu_3 + 2c_{56}\nu_2\nu_3 + c_{55}\nu_3^2;$$

$$Q_{12}(\nu) = c_{16}\nu_1^2 + (c_{12} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{62}\nu_2^2 + (c_{14} + c_{56})\nu_1\nu_3 + (c_{52} + c_{64})\nu_2\nu_3 + c_{54}\nu_3^2;$$

$$Q_{13}(\nu) = c_{15}\nu_1^2 + (c_{14} + c_{65})\nu_1\nu_2 + c_{64}\nu_2^2 + (c_{13} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{63} + c_{54})\nu_2\nu_3 + c_{53}\nu_3^2;$$

$$Q_{21}(\nu) = c_{61}\nu_1^2 + (c_{21} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{26}\nu_2^2 + (c_{41} + c_{65})\nu_1\nu_3 + (c_{25} + c_{46})\nu_2\nu_3 + c_{45}\nu_3^2;$$

$$Q_{22}(\nu) = c_{66}\nu_1^2 + 2c_{26}\nu_1\nu_2 + c_{22}\nu_2^2 + 2c_{64}\nu_1\nu_3 + 2c_{24}\nu_2\nu_3 + c_{44}\nu_3^2;$$

$$Q_{23}(\nu) = c_{65}\nu_1^2 + (c_{64} + c_{25})\nu_1\nu_2 + c_{24}\nu_2^2 + (c_{45} + c_{63})\nu_1\nu_3 + (c_{23} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{43}\nu_3^2;$$

$$Q_{31}(\nu) = c_{51}\nu_1^2 + (c_{41} + c_{56})\nu_1\nu_2 + c_{46}\nu_2^2 + (c_{31} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{36} + c_{45})\nu_2\nu_3 + c_{35}\nu_3^2;$$

$$Q_{32}(\nu) = c_{56}\nu_1^2 + (c_{46} + c_{52})\nu_1\nu_2 + c_{42}\nu_2^2 + (c_{54} + c_{36})\nu_1\nu_3 + (c_{32} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{34}\nu_3^2;$$

$$Q_{33}(\nu) = c_{55}\nu_1^2 + 2c_{45}\nu_1\nu_2 + c_{44}\nu_2^2 + 2c_{35}\nu_1\nu_3 + 2c_{34}\nu_2\nu_3 + c_{33}\nu_3^2.$$

Тогда обратная задача (1)–(5) имеет единственное решение

$$K(t) = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)(t) \in C[0, T].$$

Через $G(\gamma)$ обозначим множество функций $g(t)$, $f_0(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 и условию

$$\max\left\{\max_{1 \leq i \leq 3} \|g_i(t)\|_{C^5[0, T]}, \|f_0(t)\|_{C^2[0, T]}\right\} \leq \gamma < \infty,$$

здесь γ — заданное число.

Теорема 2. Пусть $K^m(t) = \text{diag}(K_1^m(t), K_2^m(t), K_3^m(t))$ является решением обратной задачи (1)–(5) при $(g^m(t), f_0^m) \in G(\gamma)$, $m = 1, 2$. Тогда существует положительная постоянная C_0 , зависящая от чисел T , ρ , γ и элементов матрицы $Q(\nu_0)$, такая, что справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\sum_{i=1}^3 \|K_i^1 - K_i^2\|_{C[0,T]} \leq C_0 \left[\sum_{i=1}^3 \|g_i^1 - g_i^2\|_{C^5[0,T]} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{C^3[0,T]} \right]. \quad (7)$$

Все условия согласования в теореме 1, кроме условия $f_0(0) \neq 0$, записаны в векторной форме.

2. Основные уравнения для образа Фурье. Введем обозначение

$$\bar{T}_{ij} := \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}(x, t). \quad (8)$$

Тогда (3) можно переписать следующим образом:

$$T_{ij}(x, t) = \bar{T}_{ij}(x, t) + \int_0^t K_i(\tau) \bar{T}_{ij}(x, t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

С учетом свойств симметрии модулей упругости и принятого выше правила перенумерации индексов соотношение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_\alpha = c_{\alpha 1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + c_{\alpha 6} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + c_{\alpha 5} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + c_{\alpha 6} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + c_{\alpha 2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ + c_{\alpha 4} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + c_{\alpha 5} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + c_{\alpha 4} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + c_{\alpha 3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому для каждого $i = 1, 2, 3$ суммы в правой части (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}_{1j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{T}_6}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{T}_5}{\partial x_3}, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}_{2j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \bar{T}_6}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{T}_4}{\partial x_3}, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{T}_{3j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \bar{T}_5}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{T}_4}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) будут использоваться для вычисления образа Фурье правых частей в (1) по переменной x .

Мы применим к обеим частям равенств (1)–(4) преобразование Фурье. Преобразование Фурье $U(\nu, t)$ вектор-функции $u(x, t)$ существует при любом конечном t , поскольку решение $u(x, t)$ прямой задачи (1)–(4) является суммой некоторой сингулярной обобщенной вектор-функции и регулярной вектор-функции, причем носитель вектор-функции $u(x, t)$ конечен [12, гл. 4]. Вектор-функция $U(\nu, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений при $\nu \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\rho I \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = Q(\nu) U(\nu, t) + \int_0^t K(t - \tau) Q(\nu) U(\nu, \tau) d\tau + \bar{e}\theta(t) f_0(t) \quad (11)$$

с начальным условием

$$U|_{t<0} \equiv 0. \quad (12)$$

Здесь I — единичная матрица третьего порядка, матрица $Q(\nu)$ определена формулой (6), $U(\nu, t) = (U_1, U_2, U_3)^T(\nu, t)$.

Таким образом, обратная задача (1)–(4) свелась к задаче определения ядра $K(t)$ в интегродифференциальном уравнении (11), решение которого удовлетворяет начальному условию (12), и для этого решения известна дополнительная информация (5).

3. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Принимая во внимание, что функция $t\theta(t)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, решение прямой задачи (11), (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} U(\nu, t) &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}} (t - \tau) \theta(t - \tau) \left(Q(\nu) U(\nu, t) + \int_0^{\tau} K(\alpha) Q(\nu) U(\nu, \tau - \alpha) d\alpha \right) d\tau \\ &\quad + \frac{\vec{e}}{\rho} \int_{\mathbb{R}} (t - \tau) \theta(t - \tau) \theta(\tau) f_0(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) \left[Q(\nu) U(\nu, \tau) + \int_0^{\tau} K(\alpha) Q(\nu) U(\nu, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\tau \\ &\quad + \frac{\vec{e}}{\rho} \int_0^t (t - \tau) f_0(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Положим $\nu = \nu_0$, тогда в силу (5) получим

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) \left[Q(\nu_0) g(\tau) + \int_0^{\tau} K(\alpha) Q(\nu_0) g(t - \alpha) d\alpha \right] d\tau \\ &\quad + \frac{\vec{e}}{\rho} \int_0^t (t - \tau) f_0(\tau) d\tau. \quad (13) \end{aligned}$$

Последовательно дифференцируя уравнение (13) четыре раза по переменной t , получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{\rho} \left[\int_0^t Q(\nu_0) g(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau} K(\alpha) Q(\nu_0) g(\tau - \alpha) d\alpha d\tau \right] + \frac{\vec{e}}{\rho} \int_0^t f_0(\tau) d\tau, \\ g''(t) &= \frac{Q(\nu_0)}{\rho} g(t) + \frac{1}{\rho} \int_0^t K(\alpha) Q(\nu_0) g(t - \alpha) d\alpha + \frac{\vec{e}}{\rho} f_0(t), \\ g'''(t) &= \frac{Q(\nu_0)}{\rho} g'(t) + \frac{1}{\rho} \int_0^t K(\alpha) Q(\nu_0) g'(t - \alpha) d\alpha + \frac{\vec{e}}{\rho} f_0'(t), \\ g^{(4)}(t) &= \frac{Q(\nu_0)}{\rho} g''(t) + \frac{1}{\rho} \int_0^t K(\alpha) Q(\nu_0) g''(t - \alpha) d\alpha + \frac{\vec{e}}{\rho} f_0''(t). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее векторное уравнение допускает покомпонентную запись:

$$g_i^{(4)}(t) = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0) g_j''(t) + \frac{1}{\rho} \int_0^t K_i(\alpha) \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0) g_j''(t-\alpha) d\alpha + \frac{e_i}{\rho} f_0''(t),$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Чтобы получить интегральное уравнение для $K(t)$, снова дифференцируем последнее соотношение по t . Если

$$\sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0) e_j =: q_i(c_{kl}, \nu_0, e_k) \neq 0,$$

то после несложных выкладок получим линейные интегральные уравнения второго порядка относительно неизвестных функций $K_i(t)$:

$$K_i(t) = \frac{\rho^2 g_i^{(5)}(t)}{f_0(0) q_i} - \frac{\rho f_0''(t) e_i}{f_0(0) q_i} - \frac{\rho}{f_0(0) q_i} \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0) g_j''(t) - \frac{\rho}{f_0(0) q_i} \int_0^t K_i(\alpha) \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(\nu_0) g_j'''(t-\alpha) d\alpha, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Известно [13, гл. 1], что эти уравнения имеют единственные решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Решения интегрального уравнения (14), соответствующие условиям (4), (5) при $g^m(t)$, $f_0^m(t)$, $m = 1, 2$, обозначим через $K_i^m(t)$. Оценим разность $K_i^1(t) - K_i^2(t)$:

$$|K_i^1(t) - K_i^2(t)| \leq C_1 (\|g_i^1 - g_i^2\|_{C^5[0,T]} + \|f_0^1(t) - f_0^2(t)\|_{C^3[0,T]}) + C_2 \int_0^t |K_i^1(\tau) - K_i^2(\tau)| d\tau, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Отсюда с учетом неравенства Гронуолла имеем

$$|K_i^1(t) - K_i^2(t)| \leq C_3 \|g_i^1 - g_i^2\|_{C^5[0,T]} + \|f_0^1(t) - f_0^2(t)\|_{C^3[0,T]}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Постоянные C_j , $j = 1, 2, 3$, зависят от чисел T , ρ , γ и элементов матрицы $Q(\nu_0)$. Последние неравенства приводят к оценке (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурдиев Д. К., Дурдиев У. Д. Устойчивость решения обратной задачи для интегродифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде // Узбек. мат. журн. 2014. Т. 2. С. 25–34.
2. Janno J, Von Welfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
3. Романов В. Г., Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
4. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.

5. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867.
6. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 72–82.
7. Карчевский А. Л., Фатьянов А. Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4, № 3. С. 259–268.
8. Jaan J, Von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Problems. 2001. V. 17, N 1. P. 13–24.
9. Colombo F., Guidetti D. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integro-differential parabolic inverse problem in Sobolev spaces // Math. Methods Appl. Sci. 2007. V. 17. P. 1–29.
10. Colombo F., Guidetti D. Some results on the Identification of memory kernels // Oper. Theory Adv. Appl. 2011. V. 216. P. 121–138.
11. Favaron A. Identification of Memory Kernels Depending on Time and on an Angular Variable // Zeitschrift Anal. Anwendungen. 2005. V. 24, N 4. P. 735–762.
12. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
13. Васильева А. В., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.

Поступила в редакцию 29 мая 2019 г.

После доработки 3 июня 2019 г.

Принята к публикации 13 июня 2019 г.

*Дурдиев Умиджон Дурдимуратович
Бухарский государственный университет
ул. М. Икбола, 11
200114 г. Бухара
E-mail: umidjan93@mail.ru*