Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. Lapin, A. Fomina, On the global implicit criterion of a fracture propagation under mixed load, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 33–43

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.404>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 17:06:30

О ГЛОБАЛЬНОМ НЕЯВНОМ КРИТЕРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН ПРИ СМЕШАННОЙ НАГРУЗКЕ

В. Н. Лапин, А. А. Фомина

Проведена валидация ранее предложенного неявного критерия выбора направления распространения трещины, предназначенного для описания распространения трещины при сложном нагружении, характеризующемся наличием всех трех мод коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} . Критерий основан на принципе локальной симметрии, согласно которому трещина распространяется в направлении, обеспечивающем нулевые значения коэффициентов обеих смешанных мод K_{II} , K_{III} . Поскольку в общем случае оба условия не могут быть выполнены одновременно, критерий формулируется в виде задачи минимизации функционала, содержащего сумму значений смешанных мод, проинтегрированную по всему фронту трещины. Формулировка критерия содержит параметр, определяющий влияние каждой из смешанных мод, значение которого должно выбираться с использованием экспериментальных данных. На основе двух экспериментов с распространением трещин при сложном смешанном нагружении проведена валидация критерия и приведены оценки интервала для наилучшего значения весового параметра.

Ключевые слова: критерий распространения трещины, смешанное нагружение.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.404

ВВЕДЕНИЕ

Описание распространения трещины и, в частности, формулировка критерия ее распространения является сложной задачей, имеющей долгую историю. Первые критерии, разработанные в первой половине прошлого века А. Гриффитсом [1] и Дж. Ирвином [2], были сформулированы для определения условия начала распространения. В более поздних работах внимание уделялось не только растягивающим, но и сдвиговым напряжениям, что позволяло дополнительно определять направление движения кончика трещины. В частности, были разработаны критерии растягивающих напряжений [3], плотности энергии деформации [4], скорости высвобождения упругой энергии [5, 6], способные предсказать направление роста трещины при плоской смешанной нагрузке.

Интерес представляет задача распространения трещины при сложном смешанном нагружении, в котором присутствуют сдвиговые напряжения, вызывающие не только поворот (плоский сдвиг), но и кручение трещины (антиплоский сдвиг), как показано на рис. 1. Компоненты тензора напряжений в окрестности кончика трещины в приближении линейной теории упругости стремятся к бесконечности, поэтому для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) материала используются коэффициенты при стремящихся к бесконечности функциях, называемые коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Моды КИН K_I , K_{II} , K_{III} соответствуют напряжениям, вызывающим раскрытие, поворот и кручение трещины соответственно.

Переход от двумерных задач к трехмерным требует учета только одной дополнительной моды КИН, что, однако, существенно усложняет задачу распространения. В трехмерном случае поверхность трещины описывается не

только углом поворота θ , как в плоском случае, но и углом кручения ψ , как показано на рис. 1. Поэтому вместо плоских критериев для описания продвижения фронта трещины необходимо использовать критерии, которые способны: 1) учитывать моду КИН K_{III} и 2) позволяют рассчитывать оба угла θ и ψ . К таким критериям можно отнести, например, критерии Шольмана [7] и Ричарда [8].

Рис. 1. Схема определения углов поворота θ и кручения ψ , задающих направление распространения трещины, и величины приращения трещины L в точках l фронта трещины

Еще одной сложностью при описании распространения трехмерных трещин является зависимость положения различных точек фронта друг от друга. В частности, угол кручения трещины в каждой точке фронта l зависит от направления распространения трещины как в самой точке l , так и в соседней к ней $l + \Delta l$ (рис. 1). В экспериментах [9–12], описывающих распространение трещины при наличии третьей моды, хорошо видна связь между соседними точками: фронт трещины поворачивается целиком или распадается на несколько частей. При этом распространение фронта трещины в каждой его точке зависит от положения и ориентации всего фронта, что делает неприменимыми критерии [3, 7, 8], в которых направление распространения в каждой точке определяется индивидуально. Одной из попыток учесть связь между точками фронта являются неявные критерии, предложенные в [13–15], в которых рассматривается НДС после распространения трещины и фронт трещины описывается как некая кривая, удовлетворяющая заданным свойствам.

Другой подход был использован в [16], где в рамках трехмерной модели гидроразрыва пласта был предложен неявный критерий выбора направления распространения. В основе неявного критерия лежит предположение, что трещина распространяется в направлении, где моды КИН K_{II} и K_{III} равны нулю. Для выполнения обоих условий моды КИН K_{II} и K_{III} с весовым коэффициентом β объединяются в функционал, определяемый через интеграл по всей длине фронта. Угол поворота трещины определяется как угол, при котором полученный функционал достигает минимума. Весовой параметр β однозначно не определен и должен быть выбран на основе экспериментальных данных. Для валидации неявного критерия и определения значения весового параметра β были выбраны два эксперимента, описанные в [9, 10, 15], в которых распространение трещины происходит при трехмерной смешанной нагрузке с большим значением моды K_{III} . В то же время описанные в этих работах задачи достаточно просты для проведения вычислительного эксперимента.

1. КРИТЕРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

1.1. Явные критерии распространения. Критерий максимальных растягивающих напряжений (МРН), предложенный в [3] для плоской трещины, постулирует, что трещина распространяется в направлении максимума растя-

гивающих напряжений. Это условие определяет соотношение для КИН

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (1)$$

и явное выражение для угла поворота трещины

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{\lambda} \right), \quad \lambda = K_{II}/K_I.$$

Обобщение критерия максимальных растягивающих напряжений на случай трехмерной трещины предложено в работе [7]. Согласно этому критерию в рассматриваемой точке фронта трещина распространяется в направлении, при котором достигает максимума специальное главное напряжение σ'_1 . Это напряжение получено из тензора напряжений путем отбрасывания радиальной компоненты и записывается в виде

$$\sigma'_1(\theta) = \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\theta z}^2}, \quad (2)$$

где σ_θ , σ_z , $\tau_{\theta z}$ выражаются через моды КИН как

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_z &= \frac{8\nu}{4\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right], \quad \tau_{\theta z} = K_{III} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Критерий в явном виде не указывает угол ψ , и кручение трещины описывается за счет разницы углов поворота θ в соседних точках фронта. Следует также отметить, что в случае двумерной трещины этот критерий совпадает с критерием МРН, описанном во введении.

Критерий плотности энергии деформации, предложенный в [4], постулирует, что трещина распространяется в направлении минимума плотности энергии деформации S . Распространение происходит при достижении этой величиной критического значения S_c , являющегося параметром материала. Плотность энергии деформации в общем виде для однородного изотропного материала записывается как функция компонент тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} : $S = 0,5\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$. В окрестности кончика плоской трещины тензор напряжений выражается как функция КИН, и плотность энергии деформации в окрестности кончика записывается в явном виде: $S = a_{11}K_I^2 + a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2$, где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/(16E')(3 - 4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta), \quad a_{12} = 1/(16E')2 \sin \theta (\cos \theta - 1 + 2\nu), \\ a_{22} &= 1/(16E')[4(1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)], \quad a_{33} = 1/(4E'). \end{aligned}$$

Критерий скорости высвобождения упругой энергии, предложенный в [1], для случая смешанного нагружения, в котором присутствуют все три моды КИН, формулируется следующим образом (см. [5, 6]): трещина распространяется в направлении θ тогда, когда интенсивность освобождающейся энергии при распространении в этом направлении достигает критической для рассматриваемого материала величины (G -критерий):

$$G(\theta, t + \Delta t) = G_c, \quad (3)$$

и угол поворота трещины θ соответствует направлению, в котором достигается максимум этой величины. Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины равна

$$G(\theta, t + \Delta t) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2(\theta, t + \Delta t) + K_{II}^2(\theta, t + \Delta t)) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2(\theta, t + \Delta t), \quad (4)$$

а критическое значение энергии разрушения выражается через трещиностойкость материала K_{Ic} как $G_c = \frac{1+\nu}{E} K_{Ic}^2$. Здесь t — момент времени до распространения трещины (и изменения ее траектории); Δt — интервал времени, за который фронт трещины проходит от текущего положения к следующему; θ — угол поворота трещины. Формулировка критерия (3) является неявной, так как выражение (4) содержит параметры НДС, которые могут быть получены только после распространения трещины. Это делает величину G сложной для расчета, что затрудняет применение критерия.

1.2. Неявные критерии. В явных критериях направление трещины определяется на основе анализа напряженного состояния, предшествующего началу распространения трещины. Однако направление зародышевой трещины может сильно отличаться от дальнейшего направления распространения, что приводит к излому траектории [17]. В этом случае параметры НДС до и после начала распространения трещины могут существенно различаться. Вследствие этого возникает необходимость анализировать НДС после распространения трещины.

Другим недостатком явных критериев является их локальность, так как угол поворота трещины в каждой точке фронта вычисляется независимо от углов поворота соседних точек. Но в экспериментах, описывающих распространение трещины при наличии третьей моды K_{III} , хорошо видна связь между соседними точками: фронт трещины поворачивается целиком. Следовательно, критерий, описывающий распространение трещины, должен быть глобальным, т. е. рассчитывать углы поворота одновременно для всех точек фронта.

В работе [15] были предложены два глобальных критерия. В первом критерии, названном авторами [15] MVG, постулируется, что после распространения трещины фронт должен быть таким, чтобы рассчитанное по всем его точкам среднее значение скорости высвобождения энергии разрушения (4) было максимально. Во втором критерии (MVK) максимизируется среднее значение первой моды КИН K_I вдоль фронта трещины после первого шага ее распространения. Для нахождения распределения КИН вдоль фронта в [15] вводятся предположения, что фронт является прямой линией, повернутой относительно фронта зародышевой трещины на угол θ_m вокруг оси распространения трещины, и продвижение всех точек фронта одинаково и равно δ_c . Значения КИН, что характеризуют НДС после приращения трещины, вычисляются аналитически как функции от угла поворота трещины θ_m и длины ее приращения δ_c . Угол кручения ψ_m находится из функции от КИН, полученной ранее на основе аппроксимации результатов экспериментов. Эти условия позволяют выписать замкнутую систему нелинейных уравнений для θ_m и δ_c , решение которой дает искомые значения.

В работе [16] были разделены условия распространения трещины и выбора направления ее распространения. Для определения длины приращения трещины за один шаг использовался критерий (3), а для выбора направления были предложены глобальный неявный критерий и алгоритм его реализации. Данный критерий основывается на принципе локальной симметрии из [18], согласно которому в каждой точке фронта трещина распространяется в том направлении, в котором после ее распространения единственной ненулевой модой, характеризующей НДС материала, будет мода K_I :

$$K_{II}(\theta(l)) = 0, \quad K_{III}(\psi(l)) = 0. \quad (5)$$

Условие (5) при записывании его для N_f точек фронта Γ_f содержит $2N_f$ условий для $2N_f$ переменных θ_i и ψ_i , $i = 1, \dots, N_f$. Однако, как видно из рис. 1, углы θ и ψ связаны между собой, и формулу, определяющую эту связь из геометрических соотношений, можно записать в виде

$$\tan \psi = L \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta l}. \quad (6)$$

В предположении о малости значений ψ , θ , $\Delta\theta$ и Δl в (6) находится зависимость угла кручения от производной угла поворота по координате l вдоль фронта $\psi(l) = L \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \approx L \frac{\partial\theta}{\partial l}(\theta(l))$. Таким образом, третья мода КИН может быть записана как функция только угла поворота, а не угла кручения $K_{III}(\psi(l)) = \bar{K}_{III}(\theta(l))$, что позволяет переписать условие (5) только для угла поворота θ :

$$K_{II}(\theta(l)) = 0, \quad \bar{K}_{III}(\theta(l)) = 0. \quad (7)$$

В общем случае невозможно одновременно удовлетворить оба условия (7), так как они порождают $2N_f$ условий для N_f неизвестных, поэтому эти условия необходимо ослабить. Выполнение условий (7) рассматривается в смысле минимизации функционала, объединяющего моды КИН K_{II} и K_{III} с весовым коэффициентом β и определяемого через интеграл по всей длине фронта на новом шаге распространения трещины $t + \Delta t$:

$$F(t + \Delta t, \theta(l)) = \int_{\Gamma} (1 - \beta) K_{II}^2(t + \Delta t, \theta(l)) + \beta \bar{K}_{III}^2(t + \Delta t, \theta(l)) dl. \quad (8)$$

Распределение угла поворота трещины вдоль фронта в критерии распространения при смешанном трехмерном нагружении определяется как распределение $\theta^*(l)$, при котором функционал F , определенный в (8), принимает минимальное значение:

$$F(t + \Delta t, \theta^*(l)) = \min_{\theta(l)} F(t + \Delta t, \theta(l)). \quad (9)$$

Оптимизационная задача минимизации функционала (9) решается итерационно в предположении о линейной связи между КИН K_{II} , K_{III} и углами θ , ψ на каждой итерации:

$$F^{s+1} = \sum_{j \in \Gamma_N} (1 - \beta) \left(K_{IIj}^s + \frac{1}{\kappa_{II}} \Delta^s \theta_j \right)^2 + \beta \left(\bar{K}_{IIIj}^s + \frac{L_j}{\kappa_{III}} \frac{\Delta^s \theta_{j+1} - \Delta^s \theta_j}{l_{j+1} - l_j} \right)^2, \quad (10)$$

где $\Delta^s \theta_j = \theta_j^{s+1} - \theta_j^s$; s — номер итерации; Γ_N — множество индексов точек, принадлежащих фронту.

На каждой итерации $s + 1$ углы θ_j^{s+1} рассчитываются как точки минимума функционала (10) путем решения СЛАУ: $\frac{\partial F^{s+1}}{\partial \theta_j^{s+1}} = 0$, $j \in \Gamma_N$.

Сформулированный функционал содержит численный параметр β , значение которого может быть выбрано на основе сравнения неявного критерия с явными. Так, значение $\beta = 0$ приводит к минимизации функционала, зависящего только от K_{II} , что в случае плоской трещины совпадает с условием критерия максимальных растягивающих напряжений (1). Значение $\beta = 0,5$ позволяет получить критерий плотности энергии деформации (2). Значение $\beta = 1/(1 - \nu)$ соответствует минимизации слагаемых, содержащих сдвиговые моды K_{II} , K_{III} в выражении (4) для критерия высвобождения упругой энергии [5, 6]. Однако для решения практических задач параметр β должен выбираться на основе экспериментальной информации.

2. ВАЛИДАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ НЕЯВНОГО КРИТЕРИЯ И ВЫБОР ВЕСОВОГО ПАРАМЕТРА

Для валидации критерия и выбора значения параметра были выбраны две серии экспериментов, в которых трещина распространяется под действием нагрузки, обеспечивающей значительное влияние третьей моды КИН: распространение наклонной трещины в брус, подверженном трехточечному изгибу [9], и распространение трещины в диске с повернутой относительно линии нагружения диаметральной трещиной [10].

2.1. Задача о наклонной трещине в брус. В работах [9, 15] описан эксперимент по трехточечному изгибу бруса с наклоненной трещиной. Схема эксперимента, расчетная сетка и полученная в результате численного моделирования трещина представлены на рис. 2. В брус из полиметилметакрилата с размерами $L_x \times L_y \times L_z$ под углом $\gamma = 45^\circ$ к плоскости xy сделан начальный пропил глубины L_f . К середине противоположной трещине грани приложена сила $\mathbf{F}$. Противодействующие ей силы $\mathbf{F}/2$ приложены к грани, в которой пропилен трещина на расстоянии L_F от краев образца, как показано на рис. 2. При отсутствии зародышевой трещины конфигурация приложенных сил вызывала бы инициацию и распространение трещины в плоскости, параллельной xz . Так как зародышевая трещина наклонена к этой плоскости, на ее фронте возникают сдвиговые напряжения, характеризующиеся ненулевыми модами КИН K_{II} , K_{III} , которые вызывают искривление трещины и ее переориентацию в плоскость xz .

Рис. 2. Начальный пропил глубины L_f и распространяющаяся из него трещина в образце, подверженном трехточечному изгибу:

1 — траектория трещины, 2 — фронт трещины

Размеры, используемые в эксперименте и численном моделировании, имели следующие значения: $L_x = 0,06$ м, $L_y = 0,26$ м, $L_z = 0,02$ м, $L_f = 0,02$ м, $L_F = 0,01$ м. Модуль Юнга $E = 2,8$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ были заданы равными параметрам полиметилметакрилата, выбранного для проведения эксперимента для возможности наблюдения за процессом распространения трещины. Расчетная сетка на поверхности образца содержала $N = 1695$ узлов. При проведении лабораторного эксперимента использовалось циклическое нагружение с силой $F = 2,4$ кН. При проведении численного моделирования на каждом шаге распространения выполнялось условие хрупкого разрушения, задаваемое критерием высвобождения упругой энергии. Поскольку целью сравнения была валидация критерия выбора направления, который может быть переписан с использованием лишь отношений КИН K_{II}/K_I , K_{III}/K_I в инвариантном относительно абсолютного значения мод виде, то абсолютные значения приложенных к образцу нагрузок не влияют на форму трещины, полученную при численном моделировании, и далее не анализируются.

Так как наиболее заметное изменение направления распространения трещины происходит из-за ее излома на первом шаге, в [19] был проведен анализ распределений углов поворота на этом шаге отдельно от построения всей траектории. Там же было проведено сравнение неявного критерия с критериями, предложенными другими авторами: двумерным критерием максимальных растягивающих напряжений [3], критерием Шольмана [7] и двумя неявными критериями, предложенными в [15]. На основе анализа распределений угла по-

ворота на первом шаге распространения вдоль фронта трещины (см. рис. 2) в [19] было заключено, что предложенный в [16] неявный критерий при всех рассмотренных значениях $\beta \in [0; 0,75]$ дает распределение угла поворота, более близкое к эксперименту среди всех рассмотренных критериев. Там же была исследована зависимость угла поворота трещины от величины приращения трещины L (см. рис. 1). Было показано, что оба параметра модели β и L влияют на угол поворота трещины, а именно, увеличение каждого из них приводит к уменьшению угла поворота. Там же был сделан вывод о линейной зависимости предпочтительного значения весового критерия β от величины приращения трещины L .

Чтобы исследовать зависимость распределения угла поворота трещины от весового параметра β , связанного с величиной приращения трещины зависимостью $\beta = \beta(L)$, на рис. 3 приведены распределения угла поворота, рассчитанные при соответствующих значениях обоих параметров. Для проведения сравнения с углами поворота, полученными в работе [15] по неявным критериям MVG и MVK, указанные распределения, как и в [15], приведены в виде функций безразмерной координаты точек фронта l , изменяющейся от $l = 0$ в середине фронта до $l = 1$ на поверхности бруса. Видно, что глобальный неявный критерий позволяет получить лучшее совпадение распределений угла поворота трещины вдоль фронта, чем неявные критерии, предложенные в [15]. Наиболее близким к наблюдаемому в эксперименте среди всех распределений угла поворота является распределение, полученное при $\beta = 0$, $L = 2$ мм. Следует, однако, отметить, что распределения, полученные по глобальному неявному критерию, практически линейны, тогда как в MVG и MVK критериях функция распределения имеет отрицательную вторую производную.

Рис. 3. Распределения угла поворота трещины на первом шаге распространения: θ — эксперимент; 1 — глобальный неявный критерий [16] при $L = 2$ мм, $\beta = 0$; 2 — при $L = 1,5$ мм, $\beta = 0,25$; 3 — при $L = 1$ мм, $\beta = 0,5$; MVG и MVK есть MVG и MVK критерии [15] соответственно

Для анализа способности глобального неявного критерия предсказывать дальнейшее гладкое распространения трещины на рис. 4 приведены траектории трещины, полученные при двух значениях весового параметра β при различных значениях величины приращения L . В качестве траектории трещины была выбрана кривая пересечения поверхности трещины с поверхностью образца, как показано на рис. 2. Ось x на рис. 4 соответствует основному напра-

влению распространения трещины, а прямолинейный участок — начальному пропилю. Величина погрешности, вносимая дискретным описанием траектории, была оценена путем сравнения траекторий, полученных при различных величинах приращения трещины L от 2 до 0,25 мм. Для всех значений весового параметра β при уменьшении величины приращения трещины L наблюдалась сходимость к одной и той же «идеальной» траектории, приведенной на рис. 4 под номером 4. Траектория трещины, рассчитанная при значении $\beta = 0$ и $L = 1$ мм, визуально уже совпадает с «идеальной», дальнейшего уменьшения величины приращения не требуется, тогда как при $L = 2$ мм отличие сильно заметно. При больших значениях весового параметра, например при $\beta = 0,5$, такое совпадение наблюдается только при $L \leq 0,5$ мм. Так как наиболее быстрая сходимость достигается при величине весового параметра $\beta = 0$ и, как указано выше, при этом же значении получено наилучшее распределение угла поворота вдоль фронта трещины на первом шаге распространения, то в качестве рекомендованного параметра для глобального неявного критерия для рассматриваемой задачи следует выбрать именно $\beta = 0$.

Рис. 4. Траектории трещин, полученные по неявному глобальному критерию [16]:
1 — при $\beta = 0$, $L = 2$ мм; 2 — при $\beta = 0,5$, $L = 2$ мм;
3 — при $\beta = 0,5$, $L = 1$ мм; 4 — при $\beta = 0,5$, $L = 0,5$ мм
(«идеальная» траектория)

2.2. Задача о наклонной трещине в диске. Для оценки зависимости наилучшего значения параметра β от анализируемой геометрической конфигурации задачи был рассмотрен эксперимент по трехточечному изгибу диска P с повернутой относительно линий нагружения диаметральной трещиной, описанный в работе [10]. Схема эксперимента показана на рис. 5, а. Размеры, используемые в эксперименте и численном моделировании, имели следующие значения: радиус диска $R = 0,075$ м, толщина $B = 0,03$ м, расстояние между опорами $2S = 0,138$ м, длина зародышевой трещины $a = 0,015$ м, угол наклона зародышевой трещины $\gamma = 30^\circ$. Модуль Юнга $E = 281$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,302$ были заданы равными параметрам полиуретана соответствующей плотности $\rho = 300 \text{ кг/м}^3$. На рис. 5, б приведены рассчитанные по различным критериям распределения угла поворота трещины θ на первом шаге ее распространения вдоль фронта трещины от его середины $r = 0$ до образующей цилиндра $r = R = 0,075$ мм. Распределения, полученные по двумерному критерию [3] и его обобщению [7], незначительно отличаются от наблюдаемых в эксперименте, однако при этом не монотонны. Распределения, полученные с использованием глобального неявного критерия [16], лишены этого недостатка, что больше соответствует эксперименту. Видно, что на первом шаге распространения значение параметра $\beta = 0,5$ позволяет получить распределение угла поворота трещины, более близкое к наблюдаемому в эксперименте.

Рис. 5. Задача о наклонной трещине в диске:
 (а) — образец с наклонной зародышевой трещиной, подверженный трехточечному изгибу (схема заимствована из работы [10]);
 (б) — распределения угла поворота трещины θ на первом шаге распространения: θ — эксперимент;
 1 — глобальный неявный критерий [16] при $\beta = 0$;
 2 — то же при $\beta = 0,5$; 3 — двумерный критерий [3]; 4 — его обобщение [7]

Формы трещин, полученных в лабораторном [10] и вычислительном экспериментах, получились достаточно близкими, но визуализация их в работе затруднена из-за их сложной трехмерной геометрии, поэтому, как и в п. 2.1, для более аккуратного сравнения рассмотрим в качестве траектории трещины линию ее пересечения с боковой поверхностью диска. На рис. 6 приведены траектории трещины, полученные в лабораторном эксперименте и численно, с помощью неявного глобального критерия при значениях весового параметра $\beta = 0$, $\beta = 0,5$ и различных длинах приращения $L = 3$ и $L = 6$ мм.

Рис. 6. Траектории трещин, полученные в лабораторном и численном экспериментах: θ — эксперимент;
 1 — глобальный неявный критерий при $L = 6$ мм, $\beta = 0,5$ («идеальная» траектория);
 2 — при $L = 3$ мм, $\beta = 0,5$; 3 — при $L = 3$ мм, $\beta = 0$

Ось z на рис. 6 соответствует основному направлению распространения трещины вдоль оси цилиндра. При увеличении величины приращения трещины L наблюдается сходимость всех траекторий к некоторой «идеальной» кривой, приведенной на рис. 6 под номером 1. В этом эксперименте наиболее быстрая сходимость к этой «идеальной» кривой наблюдается при $\beta = 0,5$, совпадение с ней наблюдается уже при $L = 3$ мм. Для сравнения, при $\beta = 0$ такое совпадение наблюдается только при $L \geq 6$ мм. Так как при значении весового параметра $\beta = 0,5$ распределения угла поворота трещины на первом шаге и ее траектория получаются наиболее близкими к наблюдаемым в эксперименте, то в качестве рекомендованного параметра для глобального неявного критерия для рассматриваемой задачи следует выбрать именно $\beta = 0,5$.

Закключение. Была проведена валидация неявного критерия выбора направления распространения, предложенного в работе [16] в рамках трехмерной модели гидроразрыва, и представлено его сравнение с другими критериями. В рассмотренных экспериментах о разрушении прямоугольного блока и круглого диска с зародышевыми трещинами при нагружении, обеспечивающем существенное значение сдвиговой моды K_{III} , показано, что анализируемый неявный критерий предсказывает траекторию трещины и угол поворота на первом шаге точнее других рассмотренных как явных [3, 7], так и неявных [15] критериев. На основе сравнения результатов вычислительного и лабораторного экспериментов можно сделать вывод, что при анализе НДС материала после распространения трещины влияние сдвиговой моды K_{II} , вызывающей поворот трещины, следует учитывать, как минимум, с не меньшим весом, чем влияние сдвиговой моды K_{III} , вызывающей ее кручение.

В мировой научной литературе, посвященной вопросам распространения трещин при сложном нагружении, не предложен универсальный критерий, достоверно описывающий траекторию трещины при всех видах нагружений и применимый для широкого класса материалов [20]. В то же время для каждого эксперимента удается подобрать критерий, который его описывает с достаточной точностью. Этим объясняются и различные значения весового параметра, полученные при валидации предложенного в [16] неявного критерия на двух сериях экспериментов. Как упомянуто выше, критерий распространения [16] при различных значениях весового параметра β сводится к неявной формулировке различных явных критериев, что, хотя и не позволяет рассматривать его как универсальный критерий разрушения, делает его обобщением для широкого класса классических подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1921. V. 221. P. 163–198.
2. Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 361–364.
3. Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. Basic Engrg. 1974. V. 10, N 3. P. 305–321.
4. Sih G. C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // Internat. J. Fracture. 1974. V. 10, N 3. P. 305–321.
5. Nuismer R. J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // Internat. J. Fracture. 1975. V. 11, N 2. P. 245–250.
6. Hussain M. A., Pu S. L., Underwood J. H. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II // Fract. Anal. ASTM STP 560. 1974. V. 560. P. 2–28.
7. Schollmann M., Richard H. A., Kullmer G., Fulland M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures // Internat. J. Fracture. 2002. V. 117, N 2. P. 129–141.
8. Richard H. A., Fulland M., Sander M. Theoretical crack path prediction // Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures. 2005. V. 28, N 1–2. P. 3–12.

9. Buchholz F. G., Chergui A., Richard H. A. Fracture analyses and experimental results of crack growth under general mixed mode loading conditions // Engineering Fracture Mech. 2004. V. 71, N 4. P. 455–468.
10. Aliha M. R. M., Linul E., Bahmani A., Marsavina L. Experimental and theoretical fracture toughness investigation of PUR foams under mixed mode I+III loading // RPolymer Testing. 2018. V. 67. P. 75–83.
11. Safaei S., Ayatollahi M. R., Saboori B. Fracture behavior of GPPS brittle polymer under mixed mode I/III loading // Theor. Appl. Fracture Mech. 2017. V. 91. P. 103–115.
12. Pham K. H., Ravi-Chandar K. On the growth of cracks under mixed-mode I + III loading // Internat. J. Fracture. 2016. V. 199, N 1. P. 105–134.
13. Lazarus V., Leblond J.-B., Mouchrif S. E. Crack front rotation and segmentation in mixed mode I+III or I+II+III. Part I. Calculation of stress intensity factors // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49, N 7. P. 1399–1420.
14. Lazarus V., Leblond J.-B., Mouchrif S. E. Crack front rotation and segmentation in mixed mode I+III or I+II+III. Part II. Comparison with experiments // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49, N 7. P. 1421–1443.
15. Lazarus V., Buchholz F. G., Fulland M., Wiebesiek J. Comparison of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments // Internat. J. Fracture. 2008. V. 153, N 2. P. 141–151.
16. Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P. Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Internat. J. Fracture. 2016. V. 201, N 2. P. 181–211.
17. Алексеев О. П., Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 3. С. 36–59.
18. Goldstein R. V., Salganik R. L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Internat. J. Fracture. 1974. V. 10. P. 507–523.
19. Lapin V. N., Cherny S. G. An implicit criterion of fracture growth direction for 3D simulation of hydraulic fracture propagation // Procedia Structural Integrity. 2018. V. 13. P. 1171–1176.
20. Salimi-Majd D., Shahabi F., Mohammadi B. Effective local stress intensity factor criterion for prediction of crack growth trajectory under mixed mode fracture conditions // Theor. Appl. Fracture Mech. 2016. V. 85. P. 207–216.

Поступила в редакцию 1 июля 2019 г.

После доработки 23 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Лапин Василий Николаевич

Институт вычислительных технологий СО РАН

просп. Акад. Лаврентьева, 6

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

630090 г. Новосибирск

Фомина Анна Александровна

Новосибирский государственный университет

E-mail: lapin@ict.sbras.ru; fomanjut@gmail.com