Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Mikhailov, I. K. Marchevskii, K. S. Kuzmina, Iterative approach to solving boundary integral equations in the two-dimensional vortex methods of computational hydrodynamics, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 54–67

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.406>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.93.64.190

April 26, 2023, 16:54:00

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ*)

Е. А. Михайлов, И. К. Марчевский, К. С. Кузьмина

Рассматриваются вопросы, связанные с численным решением граничного интегрального уравнения, описывающего процесс генерации завихренности на обтекаемых профилях в бессеточных вихревых методах. Традиционный подход, основанный на использовании метода квадратур, приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей. В случае, когда рассматривается система профилей, движущихся относительно друг друга, данную процедуру необходимо выполнять на каждом шаге расчета по времени, и ее вычислительная сложность существенно снижает эффективность вихревых методов. Переход от традиционного подхода, выраженного интегральным уравнением первого рода, к подходу с интегральным уравнением второго рода позволяет применять метод простой итерации для численного решения граничного интегрального уравнения. На примерах решения модельных задач показано, что итерационный подход позволяет снизить вычислительную сложность задачи в десятки или сотни раз при обеспечении приемлемой точности приближенного решения.

Ключевые слова: вихревой метод, несжимаемая среда, вихревой слой, граничное интегральное уравнение, сингулярный интеграл, метод простой итерации.

DOI 10.33048/sivjim.2019.22.406

Введение. Вихревые методы вычислительной гидродинамики являются, по-видимому, одними из первых численных методов, которые еще в конце 50-х годов с появлением ЭВМ первых поколений стали применяться для решения актуальных инженерных задач, главным образом для определения аэро- или гидродинамических нагрузок, действующих на профиль, находящийся в потоке несжимаемой среды. К настоящему времени существует множество модификаций вихревых методов как чисто лагранжевых, так и гибридных, эйлерово-лагранжевых, адаптированных для решения различных типов задач, в двумерной и трехмерной постановках. Однако в целом область применимости вихревых методов остается сравнительно узкой, она ограничена моделированием течений среды с малыми дозвуковыми скоростями, когда влиянием сжимаемости можно пренебречь. Однако при решении таких задач вихревые методы могут быть чрезвычайно эффективными, существенно превосходя хорошо известные «традиционные» сеточные методы, в основном по времени выполнения вычислений. Преимущества вихревых методов, главным из которых является их бессеточный характер (сетка вводится только на обтекаемой поверхности, а не в области течения), наиболее ярко проявляются в задачах расчета нестационарного внешнего обтекания и в особенности в сопряженных задачах, когда

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-31-20051).

обтекаемая поверхность меняет свое положение в пространстве, в том числе за счет действия сил со стороны потока среды.

Основной характерной чертой вихревых методов является рассмотрение завихренности как первичной расчетной величины, зная распределение которой в несжимаемой среде, можно восстановить остальные параметры течения: поле скоростей при помощи обобщенного разложения Гельмгольца [1, 2], представляющего собой обобщение известного закона Био — Савара, и поле давления, используя аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа [3].

На сегодняшний день наибольшее развитие получили методы решения двумерных задач, из которых выделим особо метод вязких вихревых доменов, который представляется особенно эффективным. Данный метод является чисто лагранжевым бессеточным методом моделирования плоского обтекания профилей, в том числе подвижных, потоком вязкой несжимаемой среды и в настоящее время реализован в свободно доступном комплексе vflow [4] и программной платформе с открытым исходным кодом VM2D [5].

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с реализацией процедуры численного решения граничных интегральных уравнений, описывающих процесс генерации завихренности на обтекаемом профиле или системе профилей. Традиционно для решения этой задачи используется подход, предполагающий переход к дискретному аналогу интегрального уравнения — системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и ее решение методом Гаусса (матрица системы является полностью заполненной, не обладает свойствами симметрии и положительной определенности). Предлагаемый подход основан на итерационном решении исходного интегрального уравнения и не требует прямого решения СЛАУ, размерность которой может быть достаточно большой. Это становится особенно актуальным при решении задач, связанных с моделированием обтекания систем, состоящих из большого количества профилей, в частности при моделировании обтекания пучков труб теплообменников энергетических установок при их поперечном обтекании теплоносителем.

1. Краткое описание вихревых методов. Рассмотрим двумерную задачу моделирования обтекания системы подвижных профилей K_i , $i = 1, \dots, n$, потоком вязкой несжимаемой среды, движение которой описывается уравнениями неразрывности и Навье — Стокса:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{V}, \quad \vec{r} \in S,$$

где $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ — поле скоростей среды; $p = p(\vec{r}, t)$ — поле давления; $\rho = \text{const}$ — постоянная плотность среды; ν — коэффициент ее кинематической вязкости; S — область течения.

Граничные условия представляют собой условия затухания возмущений на бесконечности

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_\infty, \quad p(\vec{r}, t) = p_\infty, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty,$$

и условия прилипания на границах обтекаемых профилей

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_{K_i}(t), \quad \vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Согласно обобщенному разложению Гельмгольца, поле скоростей среды в произвольной точке области течения можно представить как сумму (здесь и далее зависимости всех величин от времени опущены, но подразумеваются):

$$\alpha(\vec{r}) \vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_\infty + \int_S \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \Omega(\vec{\xi}) dS_\xi + \sum_{i=1}^n \left(\oint_{K_i} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2} q_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) dl_\xi + \oint_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) dl_\xi \right), \quad (1)$$

где $\alpha(\vec{r})$ — коэффициент, равный единице во внутренних точках области течения, $1/2$ — на гладких участках границ обтекаемых профилей, $\beta/2\pi$ — в угловых точках границ (β — внешний угол между касательными к профилю в угловых точках) и формально равный нулю внутри обтекаемых профилей; $\vec{k}$ — орт нормали к плоскости течения; $\Omega(\vec{\xi})$ — распределение завихренности в области течения. Под скалярной величиной завихренности здесь и далее понимается проекция единственной отличной от нуля компоненты вектора завихренности, перпендикулярной области течения, на соответствующую ось системы координат. Величины

$$q_i^{\text{att}}(\vec{r}) = \vec{V}_{K_i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}), \quad \gamma_i^{\text{att}}(\vec{r}) = \vec{V}_{K_i}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in K_i,$$

выражают собой проекции скорости движения границы профиля на орты внешней нормали и касательной к этой границе профиля; орт касательной выбирается таким образом, что $\vec{n}(\vec{r}) \times \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{k}$.

При $\vec{r} \in K_i$ соответствующие интегралы в правой части (1) становятся сингулярными, их следует понимать в смысле главного значения по Коши. Интеграл по области течения при любом значении $\vec{r}$ понимается в обычном смысле или как несобственный.

Таким образом, вихревые методы основаны на интегральном представлении скорости среды, при этом интегрирование ведется по области с отличной от нуля завихренностью и по границам обтекаемых профилей.

Далее ограничимся рассмотрением задач, в которых скорости движения границ профилей известны. В сопряженных задачах, решаемых в гидроупругой постановке, данный подход можно принять, если рассматривать тяжелые профили, массы которых превышают массу вытесняемой ими среды. В этом случае в расчетах можно применить схему расщепления и рассматривать на каждом шаге расчета по времени две подзадачи: моделировать течение при известных скоростях границ профилей и моделировать движение обтекаемых профилей при известных гидродинамических нагрузках [6].

Уравнение, описывающее эволюцию завихренности в области течения, получается из уравнений Навье — Стокса путем применения операции взятия ротора к обеим частям:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = \nu \Delta \vec{\Omega}.$$

При рассмотрении двумерных течений его можно записать в виде

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times ((\vec{V} + \vec{W}) \times \vec{\Omega}) = \vec{0}, \quad (2)$$

где $\vec{W} = -\nu \nabla (\ln |\Omega|) = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$ — так называемая диффузионная скорость [7, 8].

Уравнение (2) означает, что внутри области течения происходит перенос имеющейся завихренности вдоль векторных линий поля $\vec{V} + \vec{W}$ без изменения ее интенсивности. Это позволяет ввести понятие вихревого элемента — маркера завихренности, характеризуемого радиус-вектором положения в пространстве $\vec{r}_i$ и суммарной циркуляцией Γ_i — и перейти к представлению завихренности в области течения как совокупности вихревых элементов, полагая

$$\Omega(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

где $\delta(\vec{r})$ — двумерная дельта-функция Дирака. В данном случае интеграл по области течения в (1) представляется суммой по всем вихревым элементам:

$$\int_S \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \Gamma_i.$$

При вычислении этого интеграла в области течения (при $\vec{r} \in S$) обычно производят сглаживание особенности, в простейшем случае заменяя $|\vec{r} - \vec{r}_i|^2$ на $\max\{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2, \varepsilon^2\}$, где ε — малая положительная величина, имеющая смысл радиуса вихревого элемента; на границах профилей (при $\vec{r} \in K_i$) все слагаемые суммы принимают конечные значения, поскольку вихревые элементы расположены внутри области течения S , и сглаживание выполнять не следует.

Процедура вычисления диффузионных скоростей по заданному расположению вихревых элементов и границ области течения подробно описана в [7, 8].

Выполнение граничного условия прилипания на границе обтекаемого профиля обеспечивается потоком завихренности со всех точек этой границы в область течения, непосредственный расчет которого с высокой точностью затруднителен. Однако данную проблему при проведении практических расчетов обычно решают следующим образом: выполняют шаг расчета по времени, производя перемещение имеющихся на текущий момент вихревых элементов по полю $\vec{V} + \vec{W}$ и принимая, что вновь генерируемая за этот шаг завихренность образует совокупность тонких вихревых слоев (по одному на каждом профиле) заранее неизвестной интенсивности $\gamma_i(\vec{r})$, $\vec{r} \in K_i$. С учетом их влияния выражение для поля скоростей среды (1) имеет теперь вид

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{r})\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_\infty &+ \int_S \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \Omega(\vec{\xi}) dS_\xi + \sum_{i=1}^n \left(\oint_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_i(\vec{\xi}) d\ell_\xi - \alpha(\vec{r})\gamma_i(\vec{r})\vec{\tau}(\vec{r}) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\oint_{K_i} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} q_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \oint_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right). \quad (3) \end{aligned}$$

При рассмотрении соотношения (3) на границе профиля K_i вычисляется предельное значение скорости, индуцируемой вихревым слоем на i -м профиле. Этот факт учитывается внеинтегральным слагаемым, тогда как сам интеграл, как и ранее, понимается в смысле главного значения по Коши. Для вычисленного таким образом значения $\vec{V}(\vec{r})$ выполняется условие прилипания: $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_{K_i}(\vec{r})$ при $\vec{r} \in K_i$, где $\vec{V}_{K_i}(\vec{r})$ — известная функция. В результате получаем, что на границе i -го контура справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \oint_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_i(\vec{\xi}) d\ell_\xi - \alpha(\vec{r})\gamma_i(\vec{r})\vec{\tau}(\vec{r}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_j(\vec{\xi}) d\ell_\xi \\ = \alpha(\vec{r})\vec{V}_{K_i}(\vec{r}) - \vec{V}_\infty - \int_S \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \Omega(\vec{\xi}) dS_\xi \\ - \sum_{i=1}^n \left(\oint_{K_i} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} q_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \oint_{K_i} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \gamma_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right), \quad (4) \\ \vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

в котором правая часть — известная функция. Отметим, что интеграл от имеющегося в области течения распределения завихренности $\Omega(\vec{r})$ обычно представляется суммой влияний отдельных вихревых элементов.

Таким образом, (4) представляет собой систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\gamma_j(\vec{\xi})$, $j = 1, \dots, n$. После ее решения завихренность, сгенерированная на обтекаемых контурах, как правило, «стягивается» в точечные вихревые элементы, которые пополняют вихревой след и, как было показано выше, далее перемещаются по векторным линиям поля $\vec{V} + \vec{W}$.

2. Численное решение системы интегральных уравнений. Традиционно в вихревых методах вычислительной гидродинамики от решения системы интегральных уравнений (4), которую далее будем записывать в более кратком виде

$$\oint_{K_i} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i(\vec{\xi}) d\vec{\xi} - \alpha(\vec{r}) \gamma_i(\vec{r}) \vec{\tau}(\vec{r}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \vec{f}(\vec{r}), \quad (5)$$

$$\vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) = \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2}$ — векторное ядро интегрального уравнения, переходят к рассмотрению эквивалентной ей системы, уравнения которой представляют собой проекции уравнений (5) на направления нормалей $\vec{n}_i(\vec{r})$, $\vec{r} \in K_i$, к границам обтекаемых профилей. Умножая скалярно левую и правую части каждого из уравнений системы (5) на соответствующий вектор нормали $\vec{n}_i(\vec{r})$, получаем систему интегральных уравнений 1-го рода вида

$$\oint_{K_i} Q_i^n(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i(\vec{\xi}) d\vec{\xi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} Q_i^n(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = f_i^n(\vec{r}), \quad \vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$Q_i^n(\vec{r}, \vec{\xi}) = \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \cdot \vec{n}_i(\vec{r}) = -\frac{\vec{\tau}_i(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2}, \quad f_i^n(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_i(\vec{r}).$$

Отметим, что система (6), как и система (5), имеет бесконечное множество решений; для выделения единственного решения накладывают дополнительные условия вида

$$\oint_{K_i} \gamma_i(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

которые с механической точки зрения означают заданную величину циркуляции поля скоростей вдоль каждого из обтекаемых профилей [9].

Как правило, для численного решения системы (6), (7) рассматривают ее дискретный аналог, представляющий собой систему линейных алгебраических уравнений. Особенностью такого подхода является необходимость приближенного численного определения главных значений сингулярных интегралов — первых слагаемых и, в общем случае, элементов правой части в (6), что достигается использованием так называемой квадратурной формулы типа дискретных вихрей (ее название, собственно, и следует из обсуждаемого метода), представляющей по сути квадратурную формулу центральных прямоугольников. Хотя такой метод является в достаточной мере обоснованным [10] и широко распространенным, он не всегда обеспечивает высокую точность и, кроме того, требует близкой к равномерной дискретизации границ обтекаемых профилей.

Более эффективным представляется подход, упомянутый в [11]. Он заключается в переходе от системы уравнений (5) к эквивалентной системе интегральных уравнений 2-го рода, получаемой из нее путем проецирования на направления касательных к границам обтекаемых профилей:

$$\oint_{K_i} Q_i^\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i(\vec{\xi}) d\vec{\xi} - \alpha(\vec{r}) \gamma_i(\vec{r}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} Q_i^\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = f_i^\tau(\vec{r}), \quad (8)$$

$$\vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) = \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{n}_i(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi|\vec{r} - \vec{\xi}|^2}, \quad f_i^T(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}).$$

Существенной особенностью данного подхода является то, что ядро $Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi})$ оказывается ограниченным для гладких профилей и

$$\lim_{|\vec{r} - \vec{\xi}| \rightarrow 0} |Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi})| = \frac{\kappa_i(\vec{r})}{4\pi},$$

где $\kappa_i(\vec{r})$ — кривизна границы i -го профиля в соответствующей точке, или абсолютно интегрируемым для профилей, имеющих угловые точки.

В [11] при рассмотрении задачи моделирования обтекания одиночного профиля указано, что в постановке дополнительного условия типа (7) при рассмотрении интегрального уравнения (8) вместо (6) нет необходимости, поскольку его выполнение обеспечивается автоматически и уравнение (8) имеет единственное решение. Данное утверждение верно отчасти, оно справедливо лишь при рассмотрении внутренних течений, как это сделано в [11], и неверно при моделировании внешнего обтекания профилей, поэтому, как и ранее, в дополнение к (8) следует рассматривать набор дополнительных условий (7).

В работах [12–14] рассматриваемый подход получил значительное развитие: предложены различные по точности и сложности схемы построения системы линейных уравнений — дискретного аналога рассматриваемых интегральных уравнений, использование которых позволило значительно повысить точность вихревых методов в целом.

3. Оценка вычислительной сложности алгоритма вихревых методов. Хотя вихревые методы, как было отмечено во введении, могут иметь преимущество перед сеточными в плане вычислительной сложности, оно проявляется лишь при правильном выборе параметров алгоритма вихревых методов. Приведенные в [15] оценки вычислительной сложности отдельных операций вихревых методов показывают, что наиболее трудоемкой является, как правило, операция вычисления скоростей движения вихревых элементов, число N которых может достигать десятков или сотен тысяч. Данная задача аналогична задаче N тел и при «прямом» алгоритме решения имеет вычислительную сложность порядка $O(N^2)$. (Предполагается, что число вихревых элементов значительно превышает общее число точек дискретизации на всех профилях.) Данная проблема может быть в определенной мере решена двумя способами: за счет использования параллельных вычислительных технологий, в том числе за счет переноса основного объема вычислительной работы на графические ускорители [16], а также за счет использования приближенных быстрых методов, имеющих вычислительную сложность порядка $O(N \log N)$ [17, 18]. Это позволяет сократить время, требуемое на расчет скоростей вихревых элементов, в сотни и даже тысячи раз.

Иначе обстоит дело в традиционных реализациях вихревых методов с решением граничных интегральных уравнений (6) или (8) с дополнительными условиями (7) на профилях. Число точек дискретизации каждого профиля m , как правило, составляет несколько сотен или порядка тысячи. Дискретный аналог уравнений (6) или (8) — система линейных алгебраических уравнений — имеет размерность порядка $(nm \times nm)$ с полностью заполненной матрицей. Для вычисления ее правой части требуется $O(Nnm)$ либо $O(nm \log N)$ операций при прямом расчете и с использованием быстрого метода соответственно.

При решении СЛАУ методом Гаусса число операций близко к $\frac{1}{3}(nm)^3$. Ниже в таблице приведена вычислительная сложность основных операций алгоритма вихревых методов при решении нескольких модельных задач. Рассмотрены случаи обтекания одиночного профиля с числом точек дискретизации

$m = 250$, а также системы из 2, 5, 10 и 20 профилей. Принято, что число вихрей за одиночным профилем $N = 50000$ и оно увеличивается на 30 % при добавлении каждого следующего профиля; прямой метод вычисления вихревого влияния имеет сложность $5N^2$, приближенный быстрый метод — около $100N \log_2 N$.

Число профилей n	Сложность операции вычисления вихревого влияния, млрд. операций		Сложность операции вычисления правой части, млрд. операций		Сложность решения СЛАУ, млрд. операций	
	прямой метод	быстрый метод	прямой метод	быстрый метод	методом Гаусса	умножением на обратную матрицу
1	12,5	0,08	0,06	0,0004	0,005	0,00006
2	21,1	0,10	0,16	0,0008	0,042	0,00025
5	60,5	0,18	0,69	0,0021	0,65	0,0016
10	171	0,32	2,3	0,0044	5,2	0,0063
20	561	0,61	8,4	0,0092	42	0,025

Из таблицы ясно, что при использовании быстрых методов расчета вихревого влияния трудоемкость процедуры решения СЛАУ составляет около 6 % при моделировании обтекания одного профиля, 28 % при моделировании двух профилей, более 75 % для пяти профилей и около 95 % от общей трудоемкости расчета при рассмотрении системы из десяти профилей. Отметим, что помимо указанных в алгоритме вихревых методов имеются и другие операции [15], однако в целом данное соотношение и тенденции сохраняются.

Указанная проблема легко преодолевается, если рассматривается система неподвижных профилей либо когда вся система движется как жесткое целое, без изменения относительных положений профилей в системе. В этом случае матрица системы линейных уравнений остается неизменной на протяжении всего расчета и она может быть однократно обращена. Тогда решение задачи на каждом шаге расчета (число которых может составлять десятки или даже сотни тысяч) сводится к умножению обратной матрицы на вектор правой части, вычислительная сложность которого составляет $(nm)^2$ операций. В этом случае даже при рассмотрении десяти профилей трудоемкость данной операции составляет, как следует из таблицы, менее 2 %.

Однако, как было указано во введении, эффективность вихревых методов в большей степени проявляется при моделировании обтекания подвижных профилей. В этом случае матрица СЛАУ изменяется на каждом шаге расчета (процедура ее формирования имеет сложность $O(n^2 m^2)$, которая весьма мала и соизмерима с умножением матрицы на вектор правой части), ее однократное обращение невозможно, а процедура решения системы методом Гаусса, как следует из приведенных выше оценок, может нивелировать все преимущества вихревых методов.

4. Итерационный метод решения интегральных уравнений. Для решения обозначенной проблемы разработана методика итерационного решения системы граничных интегральных уравнений относительно интенсивности вихревых слоев на границах обтекаемых профилей, не прибегая к явному построению ее дискретного аналога. Такой метод оказывается невозможным в рамках традиционного подхода, сводящегося к интегральным уравнениям 1-го рода вида (6), но вполне применим для решения уравнений 2-го рода вида (8).

Итерационный процесс решения уравнений (8) по методу простой итерации организуется следующим образом:

$$\gamma_i^{(k+1)}(\vec{r}) = \frac{1}{\alpha(\vec{r})} \left(\oint_{K_i} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{(k)}(\vec{\xi}) d\vec{\xi} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi - f_i^T(\vec{r}) \Big), \quad \vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Здесь $\gamma_i^{(k)}(\vec{r})$ — k -е приближение к решению на границе i -го обтекаемого профиля.

Чтобы обеспечить выполнение интегральных соотношений (7), вычислим интеграл от величины $\gamma_i^{(k+1)}(\vec{r})$ по границе i -го профиля. Заметим, что при рассмотрении кусочно-гладких профилей величина $\alpha(\vec{r})$ равна $1/2$ почти всюду на обтекаемых контурах, поэтому

$$\oint_{K_i} \gamma_i^{(k+1)}(\vec{r}) d\ell_r = 2 \oint_{K_i} d\ell_r \left(\oint_{K_i} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi - f_i^T(\vec{r}) \right).$$

Первое и второе слагаемые в правой части, по существу, представляют собой интегралы вдоль контура K_i от касательной компоненты скорости, индуцируемой соответствующим вихревым слоем, поэтому их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \oint_{K_i} d\ell_r \left(\oint_{K_i} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right) \\ = \oint_{K_i} \left(\oint_{K_i} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \oint_{K_j} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) d\ell_r, \end{aligned}$$

т. е. как циркуляцию поля скоростей, индуцируемого соответствующими вихревыми слоями. Получаем

$$\oint_{K_i} \left(\oint_{K_i} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) d\ell_r = \frac{1}{2} \oint_{K_i} \gamma_i^{(k)}(\vec{r}) d\ell_r,$$

а при $j \neq i$ имеем

$$\oint_{K_i} \left(\oint_{K_j} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{(k)}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) d\ell_r = 0,$$

поскольку циркуляция поля скоростей по контуру равна суммарному количеству завихренности, находящейся внутри данного контура, плюс половине от суммарного количества завихренности в вихревом слое, расположенном на границе контура.

Рассматривая интеграл $\oint_{K_i} f_i^T(\vec{r}) d\ell_r$ и повторяя те же рассуждения, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{K_i} f_i^T(\vec{r}) d\ell_r = \oint_{K_i} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) d\ell_r = \oint_{K_i} \left(\frac{1}{2} \vec{V}_{K_i}(\vec{r}) - \vec{V}_\infty - \int_S \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \Omega(\vec{\xi}) dS_\xi \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^n \left(\oint_{K_j} (\vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \times \vec{k}) q_j^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi + \oint_{K_j} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_j^{\text{att}}(\vec{\xi}) d\ell_\xi \right) \right) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) d\ell_r. \end{aligned}$$

Циркуляция постоянного поля скоростей $\vec{V}_\infty$ по контуру K_i равна нулю, то же касается скоростей, индуцируемых завихренностью в области течения $\Omega(\vec{\xi})$ и присоединенными вихревыми слоями на всех контурах, кроме i -го, а также полей скоростей, индуцируемых слоями источников. Поэтому имеем

$$\oint_{K_i} f_i^T(\vec{r}) dl_r = \frac{1}{2} \oint_{K_i} \vec{V}_{K_i}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) dl_r - \oint_{K_i} \left(\oint_{K_i} \vec{Q}(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma_i^{\text{att}}(\vec{\xi}) dl_\xi \right) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) dl_r.$$

Вспоминая определение интенсивности присоединенного вихревого слоя как касательной компоненты скорости границы соответствующего профиля, окончательно получаем

$$\oint_{K_i} f_i^T(\vec{r}) dl_r = \frac{1}{2} \oint_{K_i} \vec{V}_{K_i}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r}) dl_r - \frac{1}{2} \oint_{K_i} (\vec{V}_{K_i}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}_i(\vec{r})) dl_r = 0.$$

Таким образом, заданное формулой (9) правило перехода к следующему итерационному приближению обеспечивает сохранение интеграла от приближенного решения вдоль каждого из обтекаемых контуров, поэтому для выполнения условий (7) для всех итерационных приближений достаточно потребовать выполнения условий $\oint_{K_i} \gamma_i^{(0)}(\vec{r}) dl_r = \Gamma_i$, что обеспечивается, например, заданием

$\gamma_i^{(0)}(\vec{r}) = \Gamma_i / L_i$, где L_i — длина границы i -го профиля.

Ограниченность ядра $Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi})$, входящего в интегралы в (9), позволяет производить приближенное вычисление соответствующих интегралов с использованием любых квадратурных формул (КФ). В качестве узлов КФ на границах профилей выбираются точки дискретизации $\vec{r}_{i,p}$, $p = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, n$, в которых ищется приближенное решение $\gamma_{i,p}$; величины весов $\omega_{i,p}$ зависят от используемой КФ, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{i,p}^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha_{i,p}} & \left(\sum_{q=1}^{m_i} Q_i^T(\vec{r}_{i,p}, \vec{r}_{i,q}) \gamma_{i,q}^{(k)} \omega_{i,q} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{q=1}^{m_j} Q_i^T(\vec{r}_{i,p}, \vec{r}_{j,q}) \gamma_{j,q}^{(k)} \omega_{j,q} - f_i^T(\vec{r}_{i,p}) \right), \quad p = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Значения коэффициентов $Q_i^T(\vec{r}_{i,p}, \vec{r}_{j,q})$ и правых частей $f_i^T(\vec{r}_{i,p})$ на данном шаге расчета остаются постоянными для всех приближений, для их вычисления требуется порядка $O(\sum m_i)^2$ операций, поэтому вычисление очередного приближения к решению имеет сложность порядка $O(n^2 m^2)$.

В ходе вычисления квадратур по формуле (10) возникает погрешность, вызванная приближенным характером используемой КФ, что может приводить к нарушению дискретных аналогов условий (7):

$$\Gamma_i^{(k+1)} = \sum_{q=1}^{m_i} \tilde{\gamma}_{i,q}^{(k+1)} \omega_{i,q} \neq \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому на каждой итерации или раз в несколько итераций, в зависимости от величины ошибки, следует производить коррекцию очередного приближения, которую возможно осуществить, если известны собственные функции $\delta_i(\vec{r})$

соответствующих интегральных операторов, которые представляют собой не тривиальные решения следующих однородных интегральных уравнений:

$$\oint_{K_i} Q_i^T(\vec{r}, \vec{\xi}) \delta_i(\vec{\xi}) dl_{\xi} - \alpha(\vec{r}) \delta_i(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in K_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что функции $\delta_i(\vec{r})$ зависят только от формы i -го профиля и могут быть вычислены однократно, если профили не деформируются в процессе расчета. Для их приближенного определения может быть использована процедура, аналогичная (10):

$$\tilde{\delta}_{i,p}^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha_{i,p}} \sum_{q=1}^{m_i} Q_i^T(\vec{r}_{i,p}, \vec{r}_{i,q}) \delta_{i,q}^{(k)} \omega_{i,q}, \quad p = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

в которой в качестве начального приближения можно выбрать константу $\delta_{i,p}^{(0)} = \Delta/L_i$, где Δ — произвольная величина, отличная от нуля. Каждое найденное приближение $\tilde{\delta}_{i,p}^{(k+1)}$ следует нормировать, домножая на величину $\mu_i^{(k+1)} = \left(\sum_{p=1}^{m_i} \tilde{\delta}_i^{(k+1)} \omega_{i,p} \right)^{-1} \Delta$, тогда для любого приближения $\delta_{i,p}^{(k+1)} = \mu_i^{(k+1)} \tilde{\delta}_{i,p}^{(k+1)}$ будет справедливо соотношение $\sum_{p=1}^{m_i} \delta_i^{(k+1)} \omega_{i,p} = \Delta$.

В результате коррекция итерационных приближений при решении исходной задачи выполняется по правилу

$$\gamma_{i,p}^{(k+1)} = \tilde{\gamma}_{i,p}^{(k+1)} - \left(\sum_{q=1}^{m_i} \tilde{\gamma}_{i,q}^{(k+1)} \omega_{i,q} - \Gamma_i \right) \frac{\delta_{i,p}}{\Delta}.$$

5. Примеры решения задач. Рассмотрим процедуру итерационного решения интегрального уравнения (8) с дополнительным условием (7) на тестовой задаче о моделировании обтекания одного неподвижного эллиптического профиля K набегающим потоком со скоростью $\vec{V}_{\infty}$ в отсутствие завихренности в области течения.

Параметризуя границу эллипса простейшим образом, $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, можно считать, что искомое распределение интенсивности вихревого слоя является функцией от параметра $\gamma = \gamma(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Для данной задачи известно точное решение $\gamma^*(\varphi)$ [12], позволяющее оценить точность получаемых результатов.

Для эллиптического профиля с соотношением полуосей $a : b = 4$, установленного под углом атаки $\beta = \pi/6$ при нулевой суммарной циркуляции $\Gamma = 0$, результаты показаны на рис. 1 для некоторых итерационных приближений k .

Для количественной оценки скорости сходимости можно вычислить абсолютную величину наибольшего отклонения приближенного решения от точного $\Delta_0 = \max_{\varphi} |\gamma(\varphi) - \gamma^*(\varphi)|$ или величину среднеквадратичного отклонения

$$\Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} (\gamma(\varphi) - \gamma^*(\varphi))^2 dl \right)^{1/2}.$$

Зависимость данных величин от номера итерации показана на рис. 2. Выполнение 10–15 итераций обеспечивает погрешность порядка 0,1 %, в большинстве случаев достаточную для решения прикладных задач. При этом трудоемкость их выполнения оказывается на порядок меньше, чем при использовании

Рис. 1. Приближенные решения для различных номеров итераций для эллиптического профиля ($a : b = 4$)

Рис. 2. Уменьшение ошибки с номером итерации для эллиптического профиля ($a : b = 4$);
▲ — ошибка Δ_0 ; ○ — ошибка Δ_2

классического подхода с аппроксимацией интегрального уравнения системой линейных уравнений (по сути — метода квадратур).

Отметим, что для сильно вытянутых профилей (которые, однако, редко встречаются в практических задачах, решаемых вихревыми методами) наблюдается более медленная сходимость (рис. 3), однако выполнение порядка сотни итераций позволяет обеспечить приемлемую точность.

Сделанные оценки сложности операций алгоритма вихревых методов показывают, что итерационное решение является намного более актуальным при моделировании обтекания систем профилей.

Рассмотрим две модельные задачи. Сначала рассмотрим систему из трех неподвижных круговых профилей, образующих правильный треугольник, в котором зазор между профилями сравнительно мал и составляет 40 % от радиуса. Зависимость погрешности решения для данного случая от номера итерации показана на рис. 4. Видно, что для обеспечения высокой точности достаточно выполнения не более 10 итераций.

При увеличении количества профилей в системе скорость убывания погрешности несколько снижается. Пример расчета обтекания системы, состоящей из 12 профилей, расположенных в «шахматном порядке» с таким же зазором между профилями, как и ранее, показан на рис. 5.

Тем не менее, и в этом случае точности, получаемой после выполнения 10 итераций, оказывается достаточно для большинства практических задач. Аналогичная скорость убывания погрешностей наблюдается и для системы эллиптических профилей с соотношением полуосей $a : b = 2$ (рис. 6).

Рис. 3. Уменьшение ошибки с номером итерации для сильно вытянутого эллиптического профиля ($a : b = 50$);
▲ — ошибка Δ_0 ; ○ — ошибка Δ_2

Рис. 4. Уменьшение ошибки с номером итерации для трех круговых профилей;
▲ — ошибка Δ_0 ; ○ — ошибка Δ_2

Рис. 5. Уменьшение ошибки с номером итерации для системы из 12 круговых профилей;
▲ — ошибка Δ_0 ; ○ — ошибка Δ_2

Таким образом (см. таблицу), в данном случае сложность выполнения 10 итераций, а значит, и время приближенного решения системы интегральных уравнений (8) оказывается приблизительно в 100 раз меньшим, чем при решении СЛАУ методом Гаусса.

Рис. 6. Уменьшение ошибки с номером итерации для системы из 10 эллиптических профилей; ▲ — ошибка Δ_0 ; ○ — ошибка Δ_2

Заключение. Процедура сведения задачи об определении интенсивности вихревого слоя на границах обтекаемых профилей к решению системы интегральных уравнений второго рода с ограниченным (для гладких профилей) ядром в вихревых методах вычислительной гидродинамики позволила использовать для приближенного решения задачи метод простой итерации вместо метода квадратур, применение которого требует решения системы линейных алгебраических уравнений большой размерности.

Именно решение системы уравнений оказывается наиболее трудоемкой операцией, когда количество обтекаемых профилей становится достаточно большим. Приведенные примеры решения модельных задач показали, что использование итерационных методов позволяет уменьшить вычислительную сложность данной операции в десятки или сотни раз при обеспечении приемлемой точности приближенного решения. Использование данного алгоритма существенно расширяет возможности вихревых методов применительно к решению сопряженных задач в гидроупругой постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morino L. Helmholtz decomposition revisited: vorticity generation and trailing edge condition // Comput. Mech. 1986. V. 1, N 1. P. 65–90.
2. Wu J. C., Thompson J. F. Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier—Stokes equations using an integro-differential formulation // Computers & Fluids. 1973. V. 1. P. 197–215.
3. Дынникова Г. Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 31–41.
4. Vvflow CFD Suite (stable). URL: <https://packagecloud.io/vvflow/stable>
5. VM2D: Vortex method for 2D flow simulation. URL: <https://github.com/vortexmethods/VM2D>
6. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Numerical simulation in 2D strongly coupled FSI problems for incompressible flows by using vortex method // AIP Conf. Proceedings. 2018. V. 2027. Art. 040045; URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5065319>
7. Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
8. Дынникова Г. Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2011. 269 с.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
10. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: Янус, 1995.

11. Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H., Ingber M. S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA report. SAND96-0583, UC-700, 1996.
12. Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Морева В. С. Определение интенсивности вихревого слоя при моделировании вихревыми методами обтекания профиля потоком несжимаемой среды // Мат. моделирование. 2017. Т. 29, № 10. С. 20–34.
13. Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Морева В. С., Рятин Е. П. Расчетная схема вихревых методов второго порядка точности для моделирования обтекания профилей несжимаемым потоком // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 3. С. 73–80.
14. Кузьмина К. С., Марчевский И. К. О влиянии вихревого слоя и точечных вихрей при приближенном решении граничного интегрального уравнения в двумерных вихревых методах вычислительной гидродинамики // Прикл. математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 471–485.
15. Кузьмина К. С., Марчевский И. К. Об оценках вычислительной сложности и погрешности быстрого алгоритма в методе вихревых элементов // Тр. Ин-та системного программирования РАН. 2016. Т. 28, № 1. С. 259–274.
16. Rossinelli D., Koumoutsakos P. Vortex methods for incompressible flow simulations on the GPU // The Visual Computer. 2008. V. 24, N 7–9. P. 699–708.
17. Дыникова Г. Я. Использование быстрого метода решения «задачи N тел» при вихревом моделировании течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1465.
18. Morgenthal G., Walther J. H. An immersed interface method for the Vortex-In-Cell algorithm // Computers and Structures. 2007. V. 85. P. 712–726.

Поступила в редакцию 9 мая 2019 г.

После доработки 21 июня 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Михайлов Евгений Александрович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ленинские горы, 1

119991 г. Москва

Марчевский Илья Константинович

Кузьмина Ксения Сергеевна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

ул. 2-я Бауманская, 5

105005 г. Москва

Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН

ул. А. Солженицына, 25

109004 г. Москва

E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru; iliamarchevsky@mail.ru; kuz-ksen-serg@yandex.ru