Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Nikolaeva, On equilibrium of the elastic bodies with cracks crossing thin inclusions, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 68–80

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.407>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.130.99

April 26, 2023, 03:23:42

О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ, ПЕРЕСЕКАЮЩИМИ ТОНКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ*)

Н. А. Николаева

Исследуется задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение в некоторой точке. На трещине и в точке пересечения трещины с жестким включением заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенств. Рассмотрена также задача о равновесии упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое упругое включение. Доказана однозначная разрешимость задач, получены полные системы краевых условий. Исследована эквивалентность двух постановок: вариационной и дифференциальной. Установлено, что предельный переход по параметру жесткости в задачах о равновесии упругого тела с упругим включением приводит к задаче о равновесии упругого тела с жестким включением.

Ключевые слова: трещина, тонкое жесткое включение, тонкое упругое включение, вариационная задача, условие непроникания.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.407

Введение. Актуальность исследования краевых задач равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения и трещины, обусловлена широким применением композиционных материалов в технике. Термин «тонкое включение» используется в случаях, когда размерность включения меньше, чем размерность тела. Трещины также могут быть рассмотрены как тонкие включения нулевой жесткости. Известно, что классический подход к описанию трещин в деформируемых телах характеризуется линейными краевыми условиями на берегах трещины [1, 2]. Однако с физической точки зрения эти линейные модели обладают недостатком: противоположные берега трещины могут проникать друг в друга. Систематическое исследование краевых задач о равновесии упругих тел с трещинами при краевых условиях взаимного непроникания берегов было начато в 1992 г. В настоящее время имеется широкий круг работ, где математическая постановка данного класса задач получила свое развитие; подробный обзор и ссылки на эти работы можно найти в монографиях [3, 4].

Исходным толчком для исследования задач теории упругости о равновесии упругих тел с тонкими жесткими включениями и с тонкими жесткими включениями с возможным отслоением стала работа [5], где рассмотрены различные случаи расположения включений и трещин, при этом на берегах трещины задаются нелинейные краевые условия. Также с помощью методов вариационного исчисления исследованы различные задачи, моделирующие поведение тел с тонкими жесткими включениями и трещинами [6–11]. Математические модели тонких упругих включений Бернулли — Эйлера в упругом теле исследовались в работах [12–16]. В случае моделей тонких упругих включений Тимошенко можно обратиться к работам [17–23]. В монографии [4] представлены самые разные задачи о равновесии упругих тел с объемными жесткими включениями.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Республики Саха (Якутия) (проект 18-41-140003).

Отметим также работы [24–28], в которых изучались контактные задачи для упругих пластин, содержащих объемные жесткие включения.

Целью данной работы является исследование задач о равновесии двумерных упругих тел с трещиной, которая пересекает тонкое включение. При этом рассмотрены два вида тонких включений: жесткое и упругое Бернулли — Эйлера. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, описывающее взаимное непроникание берегов трещины. В настоящей работе с учетом условия непроникания в точке пересечения трещины и тонкого включения получен полный набор краевых условий, выполняющихся на трещине, а также на части границ включения. Прямым вариационным методом минимизации функционалов энергии доказаны существование и единственность решений рассматриваемых задач. Для вариационных формулировок задач найдены эквивалентные дифференциальные постановки. Исследован предельный переход по параметру жесткости тонкого упругого включения. Показано, что при стремлении параметра жесткости к бесконечности предельные задачи в точности описывают задачу о равновесии упругого тела с жестким включением.

1. Жесткое включение. Рассмотрим двумерное упругое тело с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ ; вектор $u = (u_1, u_2)$ задает перемещения точек этого тела.

Введем соотношения для компонент тензоров малых деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ по формулам

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где $A = \{a_{ijkl}\}$ — тензор модулей упругости, который обладает свойствами симметрии и положительной определенности

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \\ a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь и далее будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам. Все величины с двумя нижними индексами будут предполагаться симметричными по этим индексам, например $\varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_{ji}(u)$, $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ji}(u)$. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующим координатам: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Пусть $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\Gamma}_c \subset \Omega$ — гладкие кривые без самопересечений, которые пересекаются в точке P : $\bar{\gamma} \cap \bar{\Gamma}_c = \{P\} = \{(0, 0)\}$. Для упрощения записи нормали к Γ_c и γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ (см. рисунок).

Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ , пересекающие границу Γ и разбивающие область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i , причем $\text{meas}(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Обозначим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{\Gamma}_c)$. В наших рассуждениях Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ — тонкому жесткому включению, Γ_c — трещине. Заметим, что трещина разбивает тонкое жесткое включение на две части так, что $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{P\}$. Это означает, что перемещения точек γ_i суть элементы пространств инфинитезимальных жестких перемещений $R(\gamma_i)$, которые определяются следующим образом:

$$R(\gamma_i) = \{\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}) \mid \rho_i(x_1, x_2) = b_i(-x_2, x_1) + (c_{i1}, c_{i2}), \\ b_i, c_{i1}, c_{i2} = \text{const}, (x_1, x_2) \in \gamma_i, i = 1, 2\}, \quad i = 1, 2.$$

Ниже, с целью упрощения записи, мы будем использовать следующие обозначения для функций: $\rho|_{\gamma_1} = \rho_1$ и $\rho|_{\gamma_2} = \rho_2$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$.

Область Ω с трещиной Γ_c , пересекающей тонкое включение γ

Постановка задачи о равновесии двумерного упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1, γ_2 состоит в следующем. Найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma^c, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (2)$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2} = \rho_2^0, \quad \langle \rho^0(P) \rangle \nu_p \geq 0, \quad (3)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (4)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2 \leq 0 \quad \text{для всех } \rho_i \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad \langle \rho(P) \rangle \nu_p \geq 0, \quad (5)$$

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2^0 = 0. \quad (6)$$

Здесь и ниже $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на Γ_c , где значения $v^\pm = v|_{\Gamma_c^\pm}$ соответствуют следам функции v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c по отношению к нормали ν . Скобки $\langle \rho \rangle = \rho^+ - \rho^-$ означают скачок вектора ρ в точке P , где $\rho^\pm$ — следы функций ρ на кривых γ_1 и γ_2 в точке P относительно нормали ν_p ; ν_p — нормаль в точке P , которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c . Тогда $\langle \rho^0(P) \rangle \nu_p = (\rho_2^0(P) - \rho_1^0(P)) \nu_p \geq 0$, $\langle \rho(P) \rangle \nu_p = (\rho_2(P) - \rho_1(P)) \nu_p \geq 0$; $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданные внешние силы;

$$\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad \sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i, \quad \sigma_\nu = (\sigma_{1j} \nu_j, \sigma_{2j} \nu_j), \quad i, j = 1, 2, \\ (\tau_1, \tau_2) = (\nu_2, -\nu_1), \quad \sigma_\tau = \sigma_\nu \cdot \tau, \quad u_\nu = u \cdot \nu.$$

Для удобства записи всюду в тексте в интегралах будем опускать дифференциал от переменной интегрирования. Добавим, что первое условие (1) суть уравнения равновесия, второе условие (1) — уравнения состояния (закон Гука); краевое условие (2) задает закрепление тела на границе Γ ; соотношения (3) указывают на характер перемещений на γ_1 и γ_2 ; выражения (4) являются условиями взаимного непроникания берегов трещины Γ_c с нулевым трением. Заметим, что условие непроникания $[u_\nu] \geq 0$ выполняется почти всюду на Γ_c , и в этом смысле оно может не выполняться в точке P . Таким образом, третье условие (3) обеспечивает непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 друг в друга в точке P . Условия разрешимости (5) и (6) представляют собой реализацию принципа виртуальных перемещений.

Сформулируем задачу (1)–(6) как вариационную. Для этого введем функциональное пространство

$$H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma^c) \mid v = 0 \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

где $H^1(\Omega_\gamma^c)$ — пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с первыми производными в Ω_γ^c . Определим выпуклое замкнутое в $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$ множество допустимых перемещений:

$$K = \{v = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \mid u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), i = 1, 2, [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \langle \rho(P) \rangle \nu_p \geq 0\}.$$

Рассмотрим задачу минимизации потенциальной энергии

$$\Pi(u) \xrightarrow{u \in K} \inf, \quad (7)$$

где

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u.$$

Здесь для простоты мы используем обозначения $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $f u = f_i u_i$. Задача (7) имеет решение, поскольку функционал Π обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу. Решение этой задачи удовлетворяет следующему вариационному неравенству:

$$u \in K, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \text{для всех } \bar{u} \in K. \quad (8)$$

Теорема 1. Формулировки (1)–(6) и (8) эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что из вариационного неравенства (8), выбирая подходящие пробные функции, можно получить краевую задачу (1)–(6).

Выбирая $\bar{u} = u \pm \theta$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$, из вариационного неравенства (8) получим уравнения равновесия (1), выполненные в смысле обобщенных функций. Краевые условия (2), (3) вытекают из определения множества K .

Для получения краевых условий (4)–(6) нам потребуется формула Грина, справедливая для гладких функций $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$, определенных в области Ω_γ^c :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(v) &= - \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot v - \int_{\Gamma_c} [\sigma_\nu \cdot v] - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot v] - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot v] \\ &= - \int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot v - \int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot v_\nu] + [\sigma_\tau \cdot v_\tau]) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot v] - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot v], \end{aligned} \quad (9)$$

где $v_\tau = v \cdot \tau$. С учетом данной формулы, а также уравнения равновесия (1) вариационное неравенство (8) можем переписать в виде

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot (\bar{u}_\nu - u_\nu)] + [\sigma_\tau \cdot (\bar{u}_\tau - u_\tau)]) + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot (\bar{u} - u)] \leq 0. \quad (10)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$ такую, что $[\tilde{u}] = 0$ на Γ_c ; $\tilde{u} = 0$ на γ_1 и на γ_2 . Подставляя $\tilde{u} = u \pm \tilde{u} \in K$ в (10) в качестве тестовых функций, найдем

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu] \cdot \tilde{u}_\nu + [\sigma_\tau] \cdot \tilde{u}_\tau) = 0.$$

Независимость между $\tilde{u}_\nu$ и $\tilde{u}_\tau$ влечет

$$[\sigma_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \quad (11)$$

Таким образом, из (10) получим

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma_\nu \cdot [\tilde{u}_\nu - u_\nu] + \sigma_\tau \cdot [\tilde{u}_\tau - u_\tau]) + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot (\tilde{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot (\tilde{u} - u)] \leq 0.$$

Возьмем в последнем неравенстве пробную функцию вида $\tilde{u} = u + \tilde{u}$, причем $\tilde{u} \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$ — достаточно гладкая функция, $[\tilde{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c , $\tilde{u} = 0$ на γ_1 и γ_2 . Если сделать предположение, что $\tilde{u} = 0$ на Γ_c^+ , будем иметь $-\int_{\Gamma_c^-} (\sigma_\nu \tilde{u}_\nu + \sigma_\tau \tilde{u}_\tau) \leq 0$. В силу отсутствия ограничений на $\tilde{u}_\tau$ получаем $\sigma_\tau = 0$ на Γ_c^- . Так как $[\tilde{u}_\nu] \geq 0$, то $\tilde{u}_\nu \leq 0$ на Γ_c^- , отсюда имеем $\sigma_\nu \leq 0$ на Γ_c^- . Следовательно, в силу (11) получим $\sigma_\tau = 0$, $\sigma_\nu \leq 0$ на Γ_c .

Теперь покажем выполнение условия $\sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0$ на Γ_c . Докажем справедливость этого равенства локально. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Gamma_c$ и предположим, что в некоторой окрестности $\bar{B}_{x_0} = \bar{B}_{x_0} \cap \Gamma_c$ этой точки выполняется неравенство $[u_\nu] > 0$. Тогда в качестве пробных элементов можно взять функции $\tilde{u} = u \pm \lambda \eta$, где η — произвольная функция такая, что $\text{supp } \eta \subseteq \bar{B}_{x_0}$. В таком случае, при малых $\lambda > 0$ справедливо включение $\tilde{u} \in K$ и условие $[(u \pm \lambda \eta)_\nu] \geq 0$ в $\bar{B}_{x_0}$. Подставляя эти функции в (8), а также применяя формулу (9) и полученные краевые условия, приходим к соотношению $-\int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\eta_\nu] = 0$.

Отсюда, в силу произвольности функции η_ν получим $\sigma_\nu = 0$ в окрестности точки x_0 . В то же время, если в $\bar{B}_{x_0}$ выполняется неравенство $\sigma_\nu < 0$, то $[u_\nu] = 0$ в $\bar{B}_{x_0}$, так как иначе, следуя предыдущим рассуждениям, придем к противоречию. Следовательно, $\sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0$ на $\Gamma_c \cap \bar{B}_{x_0}$. Итак, последнее условие (4) получено.

Остается проверить выполнение неравенства (5) и равенства (6). Подставляя в (10) тестовую функцию $\tilde{u} = u + \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c , $\tilde{u}|_{\gamma_i} = \rho_i$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, $\langle \rho(P) \rangle \nu_P \geq 0$, с учетом (4) находим

$$\int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \rho_2 \leq 0,$$

т. е. условие (5).

Проверим справедливость равенства (6). Последовательно выбрав $\tilde{u} = 0$ и $\tilde{u} = 2u$ в (10) в роли пробных элементов, будем иметь

$$\int_{\Gamma_c} ([\sigma_\nu \cdot u_\nu] + [\sigma_\tau \cdot u_\tau]) + \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu \cdot u] + \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu \cdot u] = 0.$$

Отсюда, используя полученные краевые условия (4), выводим (6). Таким образом, любое гладкое решение вариационного неравенства (8) удовлетворяет уравнениям равновесия и уравнениям состояния (1) и краевым условиям (4)–(6).

Докажем обратное. Покажем, что любое гладкое решение краевой задачи (1)–(6) является решением вариационного неравенства (8). Пусть u — гладкое решение задачи (1)–(6). Умножим уравнения равновесия (1) на функцию $\bar{u} - u$, где $\bar{u} \in K$ — гладкая функция, $\bar{u}|_{\gamma_i} = \rho_i$, $i = 1, 2$, и проинтегрируем по области Ω_γ^c . Получим

$$-\int_{\Omega_\gamma^c} \operatorname{div} \sigma \cdot (\bar{u} - u) = \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

Преобразуем последнее равенство с помощью формулы Грина (9). Будем иметь

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) + \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] = \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u).$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) &= - \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] + \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot u] \\ &\quad - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1 + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1^0 - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2^0. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Учитывая соотношение (6) и третье, четвертое, пятое условия (4), получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) = - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu \cdot [\bar{u}_\nu] - \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \cdot \rho_1 - \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \cdot \rho_2. \quad (12)$$

Так как функция $\bar{u}$ из K , то для нее справедливо соотношение $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ на Γ_c . Принимая во внимание условие $\sigma_\nu \leq 0$, а также учитывая (5), получим, что правая часть (12) неотрицательна. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дополнение к (1)–(6) можно выписать еще одну дифференциальную формулировку задачи (8). Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что:

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A \varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma^c, \quad (13)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (14)$$

$$u|_{\gamma_1} = \rho_1^0, \quad u|_{\gamma_2} = \rho_2^0, \quad \langle \rho^0(P) \rangle \nu_p \geq 0, \quad (15)$$

$$[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (16)$$

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2 \leq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in K, \quad \bar{u}|_{\gamma_i} = \rho_i, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$\int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot u] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] \rho_1^0 + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] \rho_2^0 = 0. \quad (18)$$

Можно проверить, что краевая задача (13)–(18) эквивалентна (8). Следовательно, формулировки (8), (1)–(6) и (13)–(18) эквивалентны.

2. Упругое включение. Рассмотрим случай, при котором $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ соответствует тонкому упругому включению, где $\gamma_1 = (0, 1) \times \{0\}$ и $\gamma_2 = (-1, 0) \times \{0\}$ (см. рисунок). Кривая Γ_c , как и ранее, соответствует трещине. Сформулируем задачу равновесия в этом случае: найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжения $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, и перемещения тонких включений v^i , w^i , определенные в Ω_γ^c , Ω_γ^c , γ_i , $i = 1, 2$, соответственно такие, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma^c, \quad (19)$$

$$v_{xxxx}^i = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

$$-w_{xx}^i = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (22)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (23)$$

$$\langle (w(0), v(0)) \rangle \nu_p \geq 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (24)$$

$$v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

$$v_{xx}^1 = v_{xxx}^1 = w_x^1 = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad v_{xx}^2 = v_{xxx}^2 = w_x^2 = 0 \quad \text{при } x = -1, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & (v_{xxx}^1 \psi^1)(0) - (v_{xx}^1 \psi_x^1)(0) - (w_x^1 \theta^1)(0) - (v_{xxx}^2 \psi^2)(0) \\ & + (v_{xx}^2 \psi_x^2)(0) + (w_x^2 \theta^2)(0) \geq 0 \quad \text{для всех } (\psi^i, \theta^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \\ & i = 1, 2, \quad \langle (\theta(0), \psi(0)) \rangle \nu_p \geq 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & (v_{xxx}^1 v^1)(0) - (v_{xx}^1 v_x^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) \\ & - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (v_{xx}^2 v_x^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь функции, определенные на γ , мы отождествляем с функциями переменной x_1 ; $v_x = \frac{dv}{dx}$, $x = x_1$. Причем функция v такая, что $v|_{\gamma_1} = v^1$ и $v|_{\gamma_2} = v^2$. Аналогичное верно и для функции w . Так как нормаль ν_p совпадает с направлением нормали на Γ_c , справедливо $\langle (w(0), v(0)) \rangle \nu_p = ((w^2(0), v^2(0)) - (w^1(0), v^1(0))) \nu_p \geq 0$ и $\langle (\theta(0), \psi(0)) \rangle \nu_p = ((\theta^2(0), \psi^2(0)) - (\theta^1(0), \psi^1(0))) \nu_p \geq 0$.

Уравнения (20), (21) соответствуют дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядка для смещений тонких упругих включений в рамках модели балок Бернулли — Эйлера. При этом правые части этих соотношений описывают влияние упругой среды на γ_i , $i = 1, 2$. Соотношения (25) обеспечивают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i , $i = 1, 2$. Краевые условия (26) обеспечивают нулевые моменты, нулевые поперечные силы и нулевые касательные силы для упругого включения при $x = -1$ и $x = 1$. Соотношения (27) и (28) представляют собой условия сопряжения при $x = 0$, смысл которых состоит в следующем: работа внутренних сил на допустимых перемещениях точек тела не меньше, чем работа внешних сил, а на истинных перемещениях работа обращается в нуль.

Покажем, что задача (19)–(28) также допускает вариационную формулировку. Введем для этого множество допустимых перемещений

$$K_0 = \{(u, v, w) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i) \mid v^i = u_\nu, \quad w^i = u_\tau \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \\ [u_\nu] \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad \langle (w(0), v(0)) \rangle \nu_p \geq 0\}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (v_{xx}^1)^2 + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (w_x^1)^2 \\ + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (v_{xx}^2)^2 + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (w_x^2)^2 \xrightarrow{(u,v,w) \in K_0} \inf. \quad (29) \end{aligned}$$

Поскольку функционал в (29) является слабо полунепрерывным снизу, а также обладает свойством коэрцитивности (близкие рассуждения можно найти в [13]), задача (29) разрешима и может быть записана в виде вариационного неравенства

$$\begin{aligned} (u, v, w) \in K_0, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1 (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1 (\bar{w}_x^1 - w_x^1) \\ + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2 (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2 (\bar{w}_x^2 - w_x^2) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_0. \quad (30) \end{aligned}$$

Теорема 2. Формулировки (19)–(28) и (30) эквивалентны в предположении, что их решения достаточно гладкие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено вариационное неравенство (30). Подставляя в (30) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, 0, 0)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$, получим (19).

Доказательство справедливости краевых условий на кривой Γ_c аналогичны выводу краевых условий на Γ_c разд. 2. Именно, выбирая в неравенстве (30) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, 0, 0) \in K_0$, где $[\varphi] = 0$ на Γ_c , $\varphi = 0$ на γ_1 и на γ_2 , получим $\int_{\Gamma_c} [\sigma\nu] \varphi = 0$. Отсюда при помощи рассуждений, аналогичных проведенным в разд. 2, получим все условия (23).

Теперь установим справедливость краевых условий на части границы γ . Рассмотрим гладкие функции $(\varphi, \psi, \theta) \in K_0$ такие, что $[\varphi_\nu] = 0$ на Γ_c , $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, $\langle (\theta(0), \psi(0)) \rangle \nu_p = 0$. Тогда функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) \pm (\varphi, \psi, \theta)$ принадлежат множеству K_0 и их можно брать в (30) в качестве пробных. Интегрируя по частям и принимая во внимание условия (19), (23), получим

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \varphi - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \varphi + \int_{\gamma_1} v_{xxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 \\ - v_{xxx}^1 \psi^1|_0^1 + v_{xx}^1 \psi_x^1|_0^1 + w_x^1 \theta^1|_0^1 - v_{xxx}^2 \psi^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \psi_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 \theta^2|_{-1}^0 = 0. \quad (31) \end{aligned}$$

Предполагая, что $\psi^i = \psi_x^i = \theta^i = 0$ при $x = -1, 0, 1$ и применяя разложение $[\sigma\nu] \varphi = [\sigma_\nu] \varphi_\nu + [\sigma_\tau] \varphi_\tau$ на γ_i , $i = 1, 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] \varphi_\nu - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau] \varphi_\tau - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] \varphi_\nu - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau] \varphi_\tau \\ + \int_{\gamma_1} v_{xxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенств $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, получим соотношения (20) и (21). Следовательно, из (31) вытекает (26).

Остается показать справедливость соотношений (27) и (28). Возьмем в (30) тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w) + (\varphi, \psi, \theta)$, причем $[\varphi_\nu] = 0$ на Γ_c , $\varphi_\nu = \psi^i$, $\varphi_\tau = \theta^i$ на γ_i , $i = 1, 2$, $\langle (\theta(0), \psi(0)) \rangle_{\nu_p} \geq 0$; (φ, ψ, θ) — достаточно гладкие функции. Используя (19), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot \varphi] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] \varphi - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] \varphi + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 \psi^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 \theta^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 \psi^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 \theta^2 \\ & - v_{xxx}^1 \psi^1|_0^1 + v_{xx}^1 \psi_x^1|_0^1 + w_x^1 \theta^1|_0^1 - v_{xxx}^2 \psi^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 \psi_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 \theta^2|_{-1}^0 \geq 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (20), (21), (23) и (26), получим условие (27).

Подставим в (30) функции $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u, v, w)$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$. После интегрирования по частям, учитывая уравнения равновесия (19), найдем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot u] - \int_{\gamma_1} [\sigma\nu] u - \int_{\gamma_2} [\sigma\nu] u + \int_{\gamma_1} v_{xxxx}^1 v^1 - \int_{\gamma_1} w_{xx}^1 w^1 + \int_{\gamma_2} v_{xxxx}^2 v^2 - \int_{\gamma_2} w_{xx}^2 w^2 \\ & - v_{xxx}^1 v^1|_0^1 + v_{xx}^1 v_x^1|_0^1 + w_x^1 w^1|_0^1 - v_{xxx}^2 v^2|_{-1}^0 + v_{xx}^2 v_x^2|_{-1}^0 + w_x^2 w^2|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (20), (21), (23) и (26) вытекает условие (28). В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть выполнено (19)–(28). Выберем элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_0$ и умножим (19), (20) и (21) на $(\bar{u} - u)$, $(\bar{v}^1 - v^1)$, $(\bar{v}^2 - v^2)$, $(\bar{w}^1 - w^1)$, $(\bar{w}^2 - w^2)$ соответственно и проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i , $i = 1, 2$. После сложения будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma_1} (v_{xxxx}^1 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^1 - v^1) + \int_{\gamma_1} (-w_{xx}^1 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^1 - w^1) \\ & + \int_{\gamma_2} (v_{xxxx}^2 - [\sigma_\nu])(\bar{v}^2 - v^2) + \int_{\gamma_2} (-w_{xx}^2 - [\sigma_\tau])(\bar{w}^2 - w^2) = 0. \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) + \int_{\Gamma_c} [\sigma\nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma\nu](\bar{u} - u) + \int_{\gamma_2} [\sigma\nu](\bar{u} - u) \\ & + \int_{\gamma_1} v_{xx}^1 (\bar{v}_x^1 - v_x^1) + \int_{\gamma_1} w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu](\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau](\bar{w}^1 - w^1) \\ & + \int_{\gamma_2} v_{xx}^2 (\bar{v}_x^2 - v_x^2) + \int_{\gamma_2} w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu](\bar{v}^2 - v^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau](\bar{w}^2 - w^2) \\ & + v_{xxx}^1 (\bar{v}^1 - v^1)|_0^1 - v_{xx}^1 (\bar{v}_x^1 - v_x^1)|_0^1 - w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1)|_0^1 \\ & + v_{xxx}^2 (\bar{v}^2 - v^2)|_{-1}^0 - v_{xx}^2 (\bar{v}_x^2 - v_x^2)|_{-1}^0 - w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2)|_{-1}^0 = 0. \end{aligned}$$

Для получения из предыдущей строки вариационного неравенства (30) нам достаточно доказать, что для всех $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_0$ справедливо следующее нера-

венство:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} [\sigma \nu \cdot (\bar{u} - u)] + \int_{\gamma_1} [\sigma \nu] (\bar{u} - u) + \int_{\gamma_2} [\sigma \nu] (\bar{u} - u) \\
& - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu] (\bar{v}^1 - v^1) - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau] (\bar{w}^1 - w^1) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\nu] (\bar{v}^2 - v^2) - \int_{\gamma_2} [\sigma_\tau] (\bar{w}^2 - w^2) \\
& + v_{xxx}^1 (\bar{v}^1 - v^1) \Big|_0^1 - v_{xx}^1 (\bar{v}_x^1 - v_x^1) \Big|_0^1 - w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1) \Big|_0^1 \\
& + v_{xxx}^2 (\bar{v}^2 - v^2) \Big|_{-1}^0 - v_{xx}^2 (\bar{v}_x^2 - v_x^2) \Big|_{-1}^0 - w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2) \Big|_{-1}^0 \leq 0. \quad (32)
\end{aligned}$$

Действительно, с помощью третьего и четвертого равенства (23), условия (25), а также разложения $[\sigma \nu]u = [\sigma_\nu]u_\nu + [\sigma_\tau]u_\tau$, $[\sigma \nu]\bar{u} = [\sigma_\nu]\bar{u}_\nu + [\sigma_\tau]\bar{u}_\tau$ неравенство (32) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [u_\nu] + v_{xxx}^1 (\bar{v}^1 - v^1) \Big|_0^1 - v_{xx}^1 (\bar{v}_x^1 - v_x^1) \Big|_0^1 \\
& - w_x^1 (\bar{w}^1 - w^1) \Big|_0^1 + v_{xxx}^2 (\bar{v}^2 - v^2) \Big|_{-1}^0 - v_{xx}^2 (\bar{v}_x^2 - v_x^2) \Big|_{-1}^0 - w_x^2 (\bar{w}^2 - w^2) \Big|_{-1}^0 \leq 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, из пятого условия (23) и соотношений (26), (28) следует

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu [\bar{u}_\nu] - (v_{xxx}^1 \bar{v}^1)(0) + (v_{xx}^1 \bar{v}_x^1)(0) + (w_x^1 \bar{w}^1)(0) \\
& + (v_{xxx}^2 \bar{v}^2)(0) - (v_{xx}^2 \bar{v}_x^2)(0) - (w_x^2 \bar{w}^2)(0) \leq 0.
\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое неположительно вследствие неравенства $[\bar{u}_\nu] \geq 0$ и второго условия (23); оставшиеся слагаемые неположительны в силу (27). Отсюда следует, что неравенство (32) верно. Таким образом, мы получили вариационное неравенство (30). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В дифференциальной постановке краевые условия в точке сопряжения $(0, 0)$, т. е. условия (27) и (28), можно переписать следующим образом:

$$v_{xx}^1 = 0, \quad v_{xx}^2 = 0, \quad (v_{xxx}^1 v^1)(0) - (w_x^1 w^1)(0) - (v_{xxx}^2 v^2)(0) + (w_x^2 w^2)(0) = 0, \quad (27')$$

$$(v_{xxx}^1 \psi^1)(0) - (w_x^1 \theta^1)(0) - (v_{xxx}^2 \psi^2)(0) + (w_x^2 \theta^2)(0) \geq 0$$

$$\text{для всех } (\psi^i, \theta^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad \langle (\theta(0), \psi(0)) \rangle \nu_p \geq 0. \quad (28')$$

3. Предельный переход от упругого включения к жесткому. Оказывается, что задача (1)–(6) будет предельной для семейства задач с упругим включением при стремлении параметра жесткости к бесконечности.

На самом деле, решение задачи (19)–(28) должно зависеть от параметра жесткости тонкого включения. В модели (19)–(28) этот параметр принимался равным единице. В этом разделе мы введем параметр λ в модель и исследуем предельный переход при стремлении параметра к бесконечности. С этой целью рассмотрим функционал энергии

$$\begin{aligned}
\Pi_\lambda(u, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u \\
& + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_1} (v_{xx}^1)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_1} (w_x^1)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_2} (v_{xx}^2)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\gamma_2} (w_x^2)^2,
\end{aligned}$$

где параметр $\lambda > 0$ характеризует жесткость упругого включения γ . Существует единственное решение задачи минимизации

$$\Pi_\lambda(u, v, w) \xrightarrow{(u, v, w) \in K_0} \inf.$$

Это решение удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in K_0, \quad & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) + \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^{1\lambda} (\bar{v}_{xx}^1 - v_{xx}^{1\lambda}) \\ & + \lambda \int_{\gamma_1} w_x^{1\lambda} (\bar{w}_x^1 - w_x^{1\lambda}) + \lambda \int_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda} (\bar{v}_{xx}^2 - v_{xx}^{2\lambda}) + \lambda \int_{\gamma_2} w_x^{2\lambda} (\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}) \geq 0 \\ & \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in K_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим предельный переход в (33) при $\lambda \rightarrow \infty$. Подставим пробные функции вида $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ в (33), при $\alpha \in \mathbb{R}$ найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f u^\lambda \pm \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{1\lambda})^2 + (w^{1\lambda})^2) \pm \alpha \int_{\gamma_2} ((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2) \\ & + \lambda \int_{\gamma_1} ((v_{xx}^{1\lambda})^2 + (w_x^{1\lambda})^2) + \lambda \int_{\gamma_2} ((v_{xx}^{2\lambda})^2 + (w_x^{2\lambda})^2) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

В силу условия $u_\nu^\lambda = v^{i\lambda}$, $u_\tau^\lambda = w^{i\lambda}$ на γ_i , $i = 1, 2$, неравенства Корна и теоремы вложения при малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \alpha \int_{\gamma_1} ((v^{1\lambda})^2 + (w^{1\lambda})^2) - \alpha \int_{\gamma_2} ((v^{2\lambda})^2 + (w^{2\lambda})^2) \geq 0.$$

Тогда из (34) выводим, что при $\lambda \geq \alpha$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} c_0 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2}^2 + \alpha \|v^{1\lambda}\|_{H^2(\gamma_1)}^2 + \alpha \|w^{1\lambda}\|_{H^1(\gamma_1)}^2 \\ + \alpha \|v^{2\lambda}\|_{H^2(\gamma_2)}^2 + \alpha \|w^{2\lambda}\|_{H^1(\gamma_2)}^2 \leq c_1 \|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2}, \end{aligned}$$

где $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ не зависят от λ . Следовательно, получим равномерную по $\lambda \geq \lambda_0$ оценку

$$\|u^\lambda\|_{H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2}^2 + \|v^{1\lambda}\|_{H^2(\gamma_1)}^2 + \|w^{1\lambda}\|_{H^1(\gamma_1)}^2 + \|v^{2\lambda}\|_{H^2(\gamma_2)}^2 + \|w^{2\lambda}\|_{H^1(\gamma_2)}^2 \leq c_2. \quad (35)$$

Из (34) при $\lambda \geq \lambda_0$ также следует оценка

$$\lambda \int_{\gamma_1} (v_{xx}^{1\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_1} (w_x^{1\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_2} (v_{xx}^{2\lambda})^2 + \lambda \int_{\gamma_2} (w_x^{2\lambda})^2 \leq c_3. \quad (36)$$

Выбирая для сходящейся подпоследовательности прежнее обозначение $(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, из (35) при $\lambda \rightarrow \infty$ получим следующие сходимости:

$$u^\lambda \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, \quad (37)$$

$$v^{i\lambda} \rightharpoonup v^i \quad \text{слабо в } H^2(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad (38)$$

$$w^{i\lambda} \rightharpoonup w^i \quad \text{слабо в } H^1(\gamma_i), \quad i = 1, 2. \quad (39)$$

Тогда, в силу (36) имеем

$$v_{xx}^i = 0, \quad w_x^i = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (40)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v^1(x) &= c_{10} + c_{11}x, & w^1(x) &= b_{10}, & x &\in (0, 1), & c_{10}, c_{11}, b_{10} &\in \mathbb{R}, \\ v^2(x) &= c_{20} + c_{21}x, & w^2(x) &= b_{20}, & x &\in (-1, 0); & c_{20}, c_{21}, b_{20} &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Это означает, что $u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, а именно,

$$u|_{\gamma_i} = (w^i, v^i) = \rho_i^0, \quad \rho_i^0(x_1, x_2) = c_{i1}(-x_2, x_1) + (b_{i0}, c_{i0}), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, предельная функция (u, v, w) будет принадлежать множеству допустимых перемещений K . (Множество K определено в разд. 1.)

С помощью полученных сходимостей можем перейти к пределу в вариационном неравенстве (33). Возьмем произвольную функцию $\bar{u} \in K$. Тогда $(\bar{u}, \bar{u}_2|_{\gamma}, \bar{u}_1|_{\gamma}) \in K_0$. Обозначим $(\bar{u}, \bar{u}_2|_{\gamma}, \bar{u}_1|_{\gamma})$ через $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Подставим элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в (33), это влечет

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) &\geq \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u^\lambda) - \lambda \int_{\gamma_1} v_{xx}^{1\lambda} (\bar{v}_x^1 - v_{xx}^{1\lambda}) \\ &\quad - \lambda \int_{\gamma_1} w_x^{1\lambda} (\bar{w}_x^1 - w_x^{1\lambda}) - \lambda \int_{\gamma_2} v_{xx}^{2\lambda} (\bar{v}_x^2 - v_{xx}^{2\lambda}) - \lambda \int_{\gamma_2} w_x^{2\lambda} (\bar{w}_x^2 - w_x^{2\lambda}). \end{aligned}$$

Переходя к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства, в силу (37)–(40) при $\lambda \rightarrow \infty$ получим

$$u \in K, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \text{для всех} \quad \bar{u} \in K. \quad (41)$$

Заметим, что выражение (41) с точностью до обозначений есть вариационное неравенство (8). Таким образом, предельная задача для (33) при $\lambda \rightarrow \infty$ совпадает с задачей (1)–(6) о равновесии упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. Khudnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
4. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
5. Khudnev A. M., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Meth. Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
6. Хлуднев А. М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 114–126.
7. Шербаков В. В. Управление жесткостью тонких включений в упругих телах с криволинейными трещинами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13. С. 135–149.
8. Шербаков В. В. О выборе оптимальной формы тонких жестких включений в упругих телах // Прикл. математика и техн. физика. 2015. Т. 2. С. 178–187.

9. Попова Т. С. О моделировании вязкоупругого тела с тонким включением // *Math. Montisnigri*. 2014. V. 30. P. 25–36.
10. Попова Т. С. Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким включением // *Мат. заметки СВФУ*. 2014. Т. 21, № 2. С. 94–105.
11. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения // *Вестн. Удмуртск. гос. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2014. Т. 1. С. 32–45.
12. Khludnev A. M., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // *Z. Angew. Math. Mech.* 2012. V. 92, N 5. P. 341–354.
13. Khludnev A. M., Leugering G. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // *Math. Mech. Complex Systems*. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.
14. Faella L., Khludnev A. M. Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 12. P. 3381–3390.
15. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler—Bernoulli inclusions // *Math. Mech. Solids*. 2017. V. 22, N 11. P. 2180–2195.
16. Фурцев А. И. О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // *Сиб. журн. чистой и прикл. математики*. 2017. Т. 17, N 4. С. 94–111.
17. Shcherbakov V. V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317.
18. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993.
19. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Math. Mech. Solids*. 2017. V. 22, N 4. P. 1–14.
20. Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением // *Докл. АН*. 2014. Т. 458, № 1. С. 32–35.
21. Khludnev A. M., Leugering G. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // *Math. Mech. Solids*. 2015. V. 20. P. 495–511.
22. Khludnev A. M., Popova T. S. Junction problem for Euler—Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Quart. Appl. Math.* 2016. V. 74. P. 705–718.
23. Rudoy E. M., Lazarev N. P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // *J. Comput. Appl. Math.* 2018. V. 334. P. 18–26.
24. Неустроева Н. В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.
25. Неустроева Н. В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // *Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика*. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.
26. Рудой Е. М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // *Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика*. 2010. Т. 10, № 2. С. 98–117.
27. Ротанова Т. А. О постановках и разрешимости задачи о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2012. Т. 15, № 2. С. 107–118.
28. Lazarev N. P. An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // *J. Siberian Federal Univ. Mathematics. Physics*. 2013. V. 6, N 1. P. 53–62.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.

После доработки 19 августа 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Николаева Наталья Афанасьевна
Северо-Восточный федеральный университет
ул. Кулаковского, 48
677000 г. Якутск
E-mail: niknataf@mail.ru