Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

H. A. Petrosyan, On the properties of the symbols of one class of hypoelliptic equations, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 81–88

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.408>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.90.164.192

April 26, 2023, 16:14:11

О СВОЙСТВАХ СИМВОЛОВ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ^{*)}

Г. А. Петросян

Рассматриваются регулярные гипоеллиптические операторы и исследуются некоторые свойства вполне правильных многогранников. На основе полученных свойств устанавливается верхняя оценка для функциональной размерности пространства решений гипоеллиптических уравнений.

Ключевые слова: вполне правильный многогранник, регулярный оператор (многогранник), функциональная размерность.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.408

Рассматриваются регулярные гипоеллиптические операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами и исследуются свойства вполне правильных многогранников. Хорошо известно (см., например, [1–3]), что:

1) если многочлен $P(\xi)$ гипоеллиптичен, то его характеристический многогранник $\mathfrak{N}(P)$ является вполне правильным;

2) если характеристический многогранник $\mathfrak{N}(P)$ регулярного многочлена вполне правильный, то $P(D)$ гипоеллиптичен.

В работах [4, 5] показано, что классы Жевре, которым принадлежат решения уравнения $P(D)U = f$, определяются характеристическим многогранником гипоеллиптического оператора $P(D)$. В [3, 6–9] получены верхние и нижние оценки функциональной размерности пространств решений для некоторых классов гипоеллиптических уравнений. В настоящей работе на основе полученных свойств вполне правильных многогранников установлена более точная, по сравнению с известными, верхняя оценка для функциональной размерности пространства решений гипоеллиптических уравнений.

1. Обозначения и определения. Рассмотрим n -мерное вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ точек

$$\begin{aligned}\xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad |\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}, \\ \mathbb{C}^n &:= \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}_+^n := \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}, \\ \mathbb{R}_0^n &:= \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \neq 0, \dots, \xi_n \neq 0\},\end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{N}_0^n$ — множество n -мерных мультииндексов, т. е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, n$.

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Минобрнауки Республики Армения и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18RF-004).

Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\nu \in \mathbb{R}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\xi^\alpha &= \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad (\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n}, \\ t\nu &= (t\nu_1, \dots, t\nu_n), \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \\ D^\alpha &= D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},\end{aligned}$$

где

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i^2 = -1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^n$ — конечный набор. Характеристическим многогранником набора $\mathcal{A}$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{N}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}_+^n$, содержащий множество $\mathcal{A} \cup \{0\}$.

Многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне правильным, если $\mathfrak{N}$ имеет:

- 1) вершину в начале координат,
- 2) отличные от начала координат вершины на каждой оси ординат,
- 3) компоненты внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней положительны.

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — вполне правильный многогранник. Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{N}^0$ — множество вершин $\mathfrak{N}$,

$\partial\mathfrak{N}$ — множество точек $\mathfrak{N}$, лежащих на замыканиях некоординатных граней $\mathfrak{N}$,

$\wedge(\mathfrak{N})$ — множество внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоординатных граней $\mathfrak{N}$, нормированных так, чтобы

$$d_{\mathfrak{N}}(\lambda) := \max_{\nu \in \mathfrak{N}}(\nu, \lambda) = 1,$$

$\wedge^{n-1}(\mathfrak{N})$ — множество тех $\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})$, которые являются нормальями $(n-1)$ -мерных (некоординатных) граней $\mathfrak{N}$,

$\wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})$ — множество нормалей $\lambda \in \wedge^{n-1}(\mathfrak{N})$, соответствующая $(n-1)$ -мерная грань которой имеет подгрань, лежащую в некоторой координатной гиперплоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно заметить, что для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ множество

$$\tilde{\wedge}(\mathfrak{N}) := \{\mu, \mu = \lambda/|\lambda|, \lambda \in \wedge(\mathfrak{N})\}$$

совпадает с выпуклой оболочкой точек множества

$$\tilde{\wedge}^{n-1}(\mathfrak{N}) := \{\mu, \mu = \lambda/|\lambda|, \lambda \in \wedge^{n-1}(\mathfrak{N})\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — вполне правильный многогранник. Тогда для любого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \wedge(\mathfrak{N})$ имеем $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(P) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$, а $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ — его полный символ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Характеристическим многогранником оператора $P(D)$ называется характеристический многогранник набора (P) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [10]. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется регулярным (невыврожденным), если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\nu \in \mathfrak{N}(P)$ выполняется

$$|\xi^\nu| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоеллиптическим, если все решения уравнения $P(D)U = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Л. Хермандер доказал (см. [12, определение 11.1.2, теорема 11.1.3]), что оператор $P(D)$ является гипоеллиптическим, если для $\xi \in \mathbb{R}^n$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ выполняется

$$\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \neq 0$$

(см. также [11, гл. 3]).

Пусть P — регулярный гипоеллиптический многочлен с характеристическим многогранником $\mathfrak{N}(P)$. Весовое множество гипоеллиптичности регулярного многочлена P обозначим через

$$\mathfrak{M}(P) := \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n, (\nu, \lambda) \leq 1 / \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j, \lambda \in \wedge^{n-1}(\mathfrak{N}) \right\}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным многогранником.

Пусть $\mathfrak{M}(P)$ — вполне правильный многогранник. Обозначим через $\Gamma^{\mathfrak{M}(P)}(\Omega)$ мультианизотропный класс Жевре — множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K, f) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j, \quad \alpha \in j\mathfrak{M}(P), \quad j = 0, 1, \dots$$

Известно (см. [9]), что если $P(D)$ — регулярный гипоеллиптический оператор, то для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выполняется

$$E(P, \Omega) := \{U \in \mathcal{D}'(\Omega), P(D)U = 0 \text{ на } \Omega\} \subset \Gamma^{\mathfrak{M}(P)}(\Omega),$$

где $\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство обобщенных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [13]. Линейное топологическое пространство E называется локально-выпуклым, если существует выпуклая окрестность нуля.

Пусть E — локально-выпуклое пространство, U — окрестность нуля в E , а $B \subset E$ — некоторое множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [14]. Для заданного $\varepsilon > 0$ множество F называется ε -сетью множества B относительно U , если $B \subset F + \varepsilon U$.

Для заданных $\varepsilon > 0$, B и U через $N(B, \varepsilon U)$ обозначим наименьшее количество элементов ε -сети множества B относительно U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [15]. Для локально-выпуклого пространства E величина

$$dfE := \sup_U \inf_V \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln \ln N(V, \varepsilon U)}{\ln \ln \varepsilon^{-1}},$$

где U и V пробегает все окрестности нуля в E , называется функциональной размерностью пространства E .

2. Предварительные результаты. Пусть $\mathfrak{N}$ — правильный многогранник. Обозначим

$$\tilde{\lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}) := \{\mu, \mu = \lambda/|\lambda|, \lambda \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})\}.$$

Предложение. Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — вполне правильный многогранник,

$$\mathfrak{M} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n \mid (\nu, \lambda) \leq 1, \lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})\}.$$

Тогда $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{M}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M}) = \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что в силу определения многогранника $\mathfrak{M}$

$$\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M}) = \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}). \quad (2.1)$$

Так как в силу замечания 1 $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{M})$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})$, то $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{M}) \subset \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$. Откуда в силу (2.1) получаем, что

$$\tilde{\Lambda}(\mathfrak{M}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M}) \subset \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}).$$

Докажем обратное включение. Пусть $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$. Так как в силу определения многогранника $\mathfrak{M}$ многогранник $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ и множество вершин $\mathfrak{M}$, лежащих на координатных гиперплоскостях, совпадает с множеством вершин $\mathfrak{N}$, также лежащих на координатных гиперплоскостях, то

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{M}}(\mu) &= \max_{\nu \in \mathfrak{M}} (\nu, \mu) = d_{\mathfrak{N}}(\mu), \\ (\alpha, \mu) &< d_{\mathfrak{N}}(\mu) \quad \text{для любого} \quad \alpha \in \mathfrak{M}^0, \end{aligned}$$

лежащего в некоторой координатной гиперплоскости. Следовательно,

$$\{\nu \in \mathfrak{M}, (\nu, \mu) = d_{\mathfrak{M}}(\mu)\} \subset \mathbb{R}_0^n \cap \mathbb{R}_+^n,$$

и поэтому $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{M}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})$. $\square$

Следствие 1. Для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ множество $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$ совпадает с выпуклой оболочкой точек множества $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$.

Доказательство. Так как $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}) = \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})$, то доказательство непосредственно следует из предложения 1 и замечания 1. $\square$

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — вполне правильный многогранник. Тогда

$$\max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda) = \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda).$$

Доказательство. Предположим обратное, пусть

$$\max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda) \neq \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda).$$

Так как $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}) \subset \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$, то это означает, что существует $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N}) \setminus \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$, для которого

$$d_{\mathfrak{N}}(\mu) > \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda). \quad (2.2)$$

Рассмотрим следующий вполне правильный многогранник:

$$\mathfrak{M} := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\nu, \lambda) \leq d_{\mathfrak{N}}(\lambda), \lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})\}.$$

Так как $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M}) = \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$ (см. (2.1)) и очевидно $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ и

$$d_{\mathfrak{M}}(\lambda) = d_{\mathfrak{N}}(\lambda) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M}),$$

то

$$d_{\mathfrak{M}}(\mu) > \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} d_{\mathfrak{M}}(\lambda) = \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} d_{\mathfrak{N}}(\lambda). \quad (2.3)$$

Следовательно, $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{M})$.

Так как в силу предложения 2.1 $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{M})$ является выпуклой оболочкой точек множества $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})$, то существуют числа $\theta(\lambda) \in [0, 1]$, $\sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} \theta(\lambda) = 1$ для

любого $\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})$ такие, что $\mu = \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} \theta(\lambda) \lambda$.

Пусть $\nu^0 \in \mathfrak{M}$ такая, что $(\nu^0, \mu) = d_{\mathfrak{M}}(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{M}}(\mu) = (\nu^0, \mu) &= \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} \theta(\lambda) (\nu^0, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} \theta(\lambda) d_{\mathfrak{M}}(\lambda) \\ &\leq \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} d_{\mathfrak{M}}(\lambda) \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} \theta(\lambda) = \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{M})} d_{\mathfrak{M}}(\lambda). \end{aligned}$$

Это противоречит оценке (2.3) и доказывает справедливость утверждения леммы. $\square$

Следствие 2. Для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ выполняется $\min_{\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})} |\lambda| = \min_{\lambda \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})} |\lambda|$.

Доказательство. Так как для любого $\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})$ $\lambda/|\lambda| \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$, то в силу определения $\wedge(\mathfrak{N})$ имеем, что $d_{\mathfrak{N}}(\lambda/|\lambda|) = 1/|\lambda|$. Откуда в силу леммы 1 получаем, что

$$\max_{\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})} \frac{1}{|\lambda|} = \max_{\lambda \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \frac{1}{|\lambda|}$$

или, что то же самое,

$$\min_{\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})} |\lambda| = \min_{\lambda \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})} |\lambda|. \quad \square$$

Лемма 2. Для любого вполне правильного многогранника $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ выполняется

$$\max_{\lambda \in \wedge(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\lambda|}{\lambda_j} = \max_{\lambda \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\lambda|}{\lambda_j}.$$

Доказательство. Так как $\tilde{\Lambda}(\mathfrak{N}) = \{\mu = \lambda/|\lambda|, \lambda \in \wedge(\mathfrak{N})\}$, то достаточно показать, что

$$\max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\lambda_j} = \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\lambda_j}. \quad (2.4)$$

Пусть $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$. Тогда в силу следствия 2 существуют числа $\theta(\lambda) \in [0, 1]$, $\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})$, $\sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \theta(\lambda) = 1$ такие, что $\mu = \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \theta(\lambda) \lambda$, откуда

$$\mu_j = \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \theta(\lambda) \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\mu_j \geq \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \lambda_j \sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \theta(\lambda) = \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

откуда

$$\max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\mu_j} \leq \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Так как $\tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N}) \subset \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})$, то отсюда в силу произвольности $\mu \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{M})$ получаем равенство (2.4) и тем самым утверждение леммы. $\square$

Пусть P — многочлен от n -переменных. Обозначим

$$\begin{aligned} D(P) &:= \{\zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}, \\ d_P(\xi) &:= \inf_{\zeta \in D(P)} \|\xi - \zeta\|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \\ E(P, \Omega) &:= \{U \in \mathcal{D}', P(D)U = 0 \text{ на } \Omega\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}'$ — пространство обобщенных функций.

Теорема 1 [3, теорема 2]. Пусть $P(D)$ — гипоеллиптический оператор и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_P := \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, \exists C_\nu > 0 \ |\xi|^\nu \leq C_\nu(d_P(\xi) + 1), \xi \in \mathbb{R}^n\}$ — вполне правильный многогранник. Тогда

$$dfE(P, \Omega) \leq 1 + \max_j \sup_{\lambda \in \wedge(\mathfrak{M}_j)} \frac{|\lambda|}{d_{j,\lambda}},$$

где $d_{j,\lambda} = \sup_{\nu \in \mathfrak{M}_j} (\nu, \lambda)$, $\mathfrak{M}_j = \{\nu^j \in \mathbb{R}_+^n, (\nu_1, \dots, \nu_{j-1}, 0, \nu_{j+1}, \dots, \nu_n) \in \mathfrak{M}\}$, а максимум берется по тем j , для которых существует $\alpha \in (P)$ такая, что $|\alpha| = \text{ord } P$ с $\alpha_j \neq 0$.

3. Основные результаты. Для регулярного гипоеллиптического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ с постоянными коэффициентами через $\mathfrak{M}(P)$, $E(P, \Omega)$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(P) &:= \{\nu \in \mathbb{R}_+^n, (\nu, \lambda) \leq \min_{1 \leq j \leq n} 1/\lambda_j, \lambda \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})\}, \\ E(P, \Omega) &:= \{U \in \mathcal{D}', P(D)U = 0 \text{ на } \Omega\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}'$ — пространство обобщенных функций.

Теорема 2. Если $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — регулярный гипоеллиптический многочлен с постоянными коэффициентами, то

$$dfE(P, \Omega) \leq \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_k^{n-1}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\lambda_j}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства (2.4) достаточно показать, что

$$dfE(P, \Omega) \leq \max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(\mathfrak{N})} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\lambda_j}. \quad (3.2)$$

Так как $P(\xi)$ — регулярный гипоеллиптический многочлен и $d_{\mathfrak{N}}(\lambda) = \max_{\nu \in \mathfrak{N}} (\nu, \lambda) = 1$, то доказательство неравенства (3.2) непосредственно получается из теоремы 1, откуда и следует справедливость неравенства (3.1). $\square$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество тех вполне правильных многогранников $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}_+^n$, для которых $\emptyset \neq \mathfrak{N}^0 \setminus \{\nu^j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_0^n$. Здесь $\nu^j = (0, \dots, 0, \nu_j^j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$, — вершины многогранника $\mathfrak{N}$, лежащие на координатных осях.

Очевидно, что если $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$, то он имеет $(n-1)$ -мерную некоординатную грань, проходящую через точки $\{\nu^j\}_{j=1, j \neq l}^n$, $l = 1, \dots, n$. Через $\lambda^l \in \wedge_k^{n-1}(\mathfrak{N})$ обозначим нормаль $(n-1)$ -мерной грани, проходящей через точки $\{\nu^j\}_{j=1, j \neq l}^n$, $l = 1, \dots, n$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$. Тогда $\min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{N})} |\lambda| = \min_{1 \leq l \leq n} |\lambda^l|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 достаточно показать, что

$$\min_{\lambda \in \Lambda_k^{n-1}(\mathfrak{N})} |\lambda| = \min_{1 \leq l \leq n} |\lambda^l|. \quad (3.3)$$

Предположим обратное, что равенство (3.3) не верно. Так как $\{\lambda^l\}_{l=1}^n \subset \Lambda_k^{n-1}(\mathfrak{N})$, то это означает, что существует $\mu \in \Lambda_k^{n-1}(\mathfrak{N})$, для которого

$$|\mu| < \min_{1 \leq l \leq n} |\lambda^l|. \quad (3.4)$$

Из условия $\mu \in \Lambda_k^{n-1}(\mathfrak{N})$ следует, что $(n-1)$ -мерная некоординатная грань с нормалью μ проходит через вершину $\mathfrak{N}$, лежащую в некоторой координатной гиперплоскости. Из определения множества $\mathfrak{B}$ (так как $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$) следует, что эти вершины лежат на координатных осях. Пусть $(n-1)$ -мерная некоординатная грань с нормалью μ проходит только через вершины $\nu^1, \dots, \nu^r$ многогранника $\mathfrak{N}$, лежащие на координатных осях. Из условия $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$ следует, что $1 \leq r \leq n-1$. Следовательно, в силу нашего предложения $(\nu^j, \mu) = 1$, $j = 1, \dots, r$, и $(\nu^j, \mu) < 1$, $j = r+1, \dots, n$. Из определений множества $\Lambda_k^{n-1}(\mathfrak{N})$ и векторов $\{\lambda^l\}_{l=1}^n$ следует, что

$$\mu_j = 1/\nu_j^j = \lambda_j^l, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = r+1, \dots, n.$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ и $\nu'' = (\nu_{r+1}, \dots, \nu_n)$. Отсюда в силу оценки (3.4) имеем

$$|\mu''| < \min_{r+1 \leq j \leq n} |\lambda^{j''}|. \quad (3.5)$$

Рассмотрим многогранник

$$\mathfrak{M} := \{\nu'' \in \mathbb{R}_+^{n-r}, (\nu'', \lambda^{j''}) \leq 1, j = r+1, \dots, n, (\nu'', \mu'') \leq 1\}.$$

Очевидно, вершинами многогранника $\mathfrak{M}$, лежащими на координатных гиперплоскостях, являются точки $(\nu_{r+1}^{r+1}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \nu_n^n) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$. При этом так как $(\nu^j, \mu) < 1$, $j = r+1, \dots, n$, то грань многогранника $\mathfrak{M}$ с нормалью μ'' не проходит через эти вершины. Следовательно,

$$\Lambda_k^{n-r-1}(\mathfrak{M}) = \{\lambda^{j''}\}_{j=r+1}^n \quad \mu'' \notin \Lambda_k^{n-r-1}(\mathfrak{M}).$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем, что $|\mu''| \geq \min_{r+1 \leq j \leq n} |\lambda^{j''}|$. Это противоречит оценке (3.5), следовательно, и оценке (3.4). Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

Теорема 4. Пусть для $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$ выполняется $\mathfrak{N}^0 \subset \mathbb{N}_0^n$. Тогда

$$\max_{\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})} |\lambda| \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу условия теоремы $\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{N}^0 \cap \mathbb{R}_0^n \neq \emptyset$, то из условия $\mathfrak{N}^0 \subset \mathbb{N}_0^n$ следует, что $\alpha := (1, \dots, 1) \in \mathfrak{N}$. Откуда следует $|\lambda| = (\alpha, \lambda) \leq d_{\mathfrak{N}}(\lambda) = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$. $\square$

Следствие 3. Если при условиях теоремы 4 многочлен $P(\xi) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}^0} \xi^\alpha$ регулярен, то $\max_{\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})} |\lambda| \leq 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gindikin S., Volevich L. The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations. Kluwer Acad. Publ., 1992.
2. Никольский С. М. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 4, С. 767–769.
3. Маргарян В. Н. Оценки сверху функциональной размерности пространства решений гипоеллиптических уравнений // Изв. НАН Армении. 2002. Т. 37, № 5. С. 27–39.
4. Маргарян В. Н., Казарян Г. Г. Оценки решений негипоеллиптических уравнений с данным носителем гипоеллиптичности // Изв. АН Армянской ССР. 1987. Т. 22, № 5. С. 315–336.
5. Margaryan V.N., Hakobyan G.H. On Gevrey class solutions of hypoelliptic equations // J. Contemp. Math. Anal. 1998. V. 33, N 1. P. 1–13.
6. Zielesni Z. On the functional dimension of solution of PDE // J. Differential Equations. 1975. V. 18, N 2. P. 340–345.
7. Langenbruch M. On the functional dimension of solution spaces of hypoelliptic partial differential operators // Math. Ann. 1985. V. 272. С. 217–229.
8. Langenbruch M. P-Functionale und Raudwere zu Hypoelliptischen Differential operatoren // Math. Ann. 1979. V. 239. P. 313–324.
9. Маргарян В. Н., Казарян Г. Г. О функциональной размерности пространства решений гипоеллиптических уравнений // Мат. сб. 1981. Т. 115, № 157. С. 614–631.
10. Михайлов В.П. О поведений на бесконечности одного класса многочленов // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 3. С. 571–573.
11. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
12. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
13. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
14. Pontrjagin L., Schnirelmann L. Sur une propriete metrique de la dimension // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 156–162.
15. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -Энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 2, № 96. С. 3–86.

Поступила в редакцию 1 июля 2019 г.

После доработки 1 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Петросян Гегине Арамовна
Российско-Армянский университет
ул. Овсепя Эмина, 123
0051 г. Ереван
E-mail: heghine.petrosyan@rau.am