Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, New solutions of dynamic equations of ideal plasticity, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 89–94

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.409>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 17:01:14

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

Для построения решений динамических уравнений идеальной пластичности используются точечные симметрии, допускаемые уравнениями пластичности в динамическом случае. Эти симметрии позволяют преобразовать точные решения стационарных динамических уравнений в нестационарные решения. В построенные таким образом решения входят произвольные функции времени. Приведенное решение позволяет описать пластическое течение между плитами, которые меняют свою форму под действием динамических нагрузок. Приведено также новое пространственное автомоделное решение.

Ключевые слова: идеальная пластичность, точные решения, симметрии.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.409

ВВЕДЕНИЕ

Теории пластичности посвящена обширная литература. Это объясняется важностью и актуальностью рассматриваемых там задач. Такие задачи возникают при конструировании машин и механизмов, при технологических процессах, где возникают пластические деформации. Впервые понятия пластических деформаций использовал Эйфель при конструировании своей знаменитой башни. Он опирался на известные опыты Треска, приведшие к возникновению понятия пластические деформации. В современных и классических статьях и монографиях [1–6] и цитируемой там литературе рассматриваются статические задачи или одномерные динамические. Это связано не с тем, что динамические задачи не важны для приложений, а с тем фактом, что не разработаны методы для решения динамических задач. Впервые пространственное решение динамических уравнений пластичности построил Б.Д. Аннин более 40 лет назад [7]. Решение было линейно по двум пространственным переменным и содержало несколько произвольных функций, зависящих от времени. Оно было построено Б.Д. Анниным с помощью группы точечных симметрий, допускаемых системой уравнений динамической теории пластичности. Позднее на основе групповых свойств уравнений были построены точные решения некоторых плоских динамических задач [7]. К сожалению, с тех пор новых решений пластичности не появилось. Здесь авторы ссылаются на уникальный обзор литературы в [8].

Авторы возвращаются к построению точных решений динамических задач теории пластичности. Решения в работе строятся как традиционными методами группового анализа, так и впервые применяемым способом — преобразованием стационарных решений в нестационарные.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ — ортогональная декартова система координат; $u = v_1$, $v = v_2$, $w = v_3$ — компоненты вектора скорости деформаций; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; σ_{ij} — компоненты тензора

напряжений. Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора скорости удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{dv_i}{dt} = \partial_i \sigma_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\frac{dv_i}{dt} = \partial_t v_i + v_j \partial_j v_i$ — полная или субстациональная производная.

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформации соосны:

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} p = \lambda e_{ij} = \lambda (\partial_j v_i + \partial_i v_j)/2, \quad (2)$$

здесь δ_{ij} — символ Кронекера; λ — некоторая неотрицательная функция; $3p = \sigma_{ii}$. Среда предполагается несжимаемой, поэтому имеет место уравнение несжимаемости

$$\partial_i v_i = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2, \quad (4)$$

где k_s — предел текучести при чистом сдвиге.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Групповые свойства уравнений динамической теории пластичности. Группа точечных симметрий, допускаемых уравнениями (1)–(4), порождается следующими операторами (не суммировать по i) [7]:

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial_t, \quad M = t\partial_t + x_i \partial_{x_i}, \quad S = \varphi(t)\partial_p, \\ T_i &= f_i(t)\partial_{x_i} + f'_i(t)\partial_{v_i} - x_i f''_i(t)\partial_p \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$Z_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}.$$

Еще два оператора Z_2, Z_3 получаются из Z_1 круговой перестановкой индексов. Функции $\varphi(t), f_i(t)$ являются произвольными из класса C^∞ , поэтому операторы (5) порождают бесконечномерную алгебру Ли.

Замечательным свойством точечных симметрий (5) является то, что они решение системы (1)–(4) снова переводят в точные решения этой же системы. Пусть v_i^1, p^1 — какое-либо решение системы (1)–(4), тогда v_i^2, p^2 — также решение этой системы. Имеет место формула

$$\begin{aligned} v_j^2(t, x_1, x_2, x_3) &= v_j^1(t, x_1 + a_1 f_1(t), x_2 + a_2 f_2(t), x_3 + a_3 f_3(t)) + a_j f'_j(t), \\ p^2(t, x_1, x_2, x_3) &= p^1(t, x_1 + a_1 f_1(t), x_2 + a_2 f_2(t), x_3 + a_3 f_3(t)) - x_i f''_i(t) \end{aligned} \quad (6)$$

по $j = 1, 2, 3$ не суммировать, $i = 1, 2, 3$. Мы используем это свойство в п. 3 для построения новых решений системы (1)–(4). Здесь a_i — групповые параметры, которые непрерывно меняются в некоторой окрестности нуля.

2.2. Стационарные решения системы (1)–(4). Поскольку система (1)–(4) допускает оператор $X_0 = \partial_t$, то можно искать инвариантные решения этой системы, не зависящие от переменной t . Такие решения определяются из системы

$$\begin{aligned} v_j \partial_j v_i &= \partial_i \sigma_{ij}, \quad \lambda e_{ij} = \lambda (\partial_j v_i + \partial_i v_j), \quad \partial_i v_i = 0, \\ (\sigma_{11} - p)^2 &+ (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) проще, чем исходная система уравнений, поскольку имеет меньше независимых переменных, но ее решений, кроме тривиальных, насколько известно авторам, нет [7, 8]. Будем искать инвариантное решение системы (7) относительно двумерной подалгебры, порождаемой операторами $\partial_y + A\partial_p, \partial_z + B\partial_p$. Это решение следует искать в виде

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x), \quad p = Ay + Bz + p(x). \quad (8)$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функции u, v, w, p определяются из системы (7). Подставляем соотношения (7) в (8). Имеем

$$u = \text{const}, \quad \partial_x \sigma_{11} = 0, \quad u \partial_x v = \partial_x \sigma_{12} + A, \quad u \partial_x w = \partial_x \sigma_{13} + B. \quad (9)$$

Из (9) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций v, w :

$$u d_x v = d_x \frac{2k_s d_x v}{\sqrt{(d_x v)^2 + (d_x w)^2}} + A, \quad u d_x w = d_x \frac{2k_s d_x w}{\sqrt{(d_x v)^2 + (d_x w)^2}} + B, \quad (10)$$

$$\sigma_{11} = p = \text{const}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если постоянные $A = B = 0$, то из (9) получаем только тривиальные решения.

Введем новые искомые функции в (10) по формулам

$$d_x v = h(x) \sin \varphi(x), \quad d_x w = h(x) \cos \varphi(x). \quad (11)$$

Тогда система (10) запишется в виде

$$uh \sin \varphi = \varphi' \cos \varphi + A, \quad uh \cos \varphi = -\varphi' \sin \varphi + B, \quad (12)$$

штрих означает производную по x .

Из (12) получаем

$$\frac{d\varphi}{-A \cos \varphi + B \sin \varphi} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \theta}{2} \right| = x + C,$$

где $\sin \theta = -A/(\sqrt{A^2 + B^2})$. Отсюда следует

$$\varphi = -\theta + 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C));$$

$$h = \begin{cases} \frac{1}{u} \left(-2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{tg} \varphi + \frac{B}{u \cos \varphi}, & \text{если } \cos \varphi \neq 0; \\ \frac{1}{u} \left(2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{A}{u \sin \varphi}, & \text{если } \cos \varphi = 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$\sigma_{12} = k_s \sin \varphi, \quad \sigma_{13} = k_s \cos \varphi, \quad v = \int_{x_1}^x h \sin \varphi dx, \quad w = \int_{x_1}^x h \cos \varphi dx.$$

Исследуем поведение функций, входящих в (13). Пусть x меняется от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае $\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)$ монотонно возрастает от нуля до $+\infty$; $2 \arctg((A^2 + B^2) \exp(x + C))$ монотонно возрастает от нуля до π . При этом φ изменяется от $-\theta$ до $-\theta + \pi$. В силу (13) становится понятно, как меняются компоненты тензора напряжений σ_{12} , σ_{13} . Это позволяет интерпретировать полученное решение следующим образом. Имеются две жесткие шероховатые плиты $x = x_1 = \text{const}$, $x = x_2 = \text{const}$. Пластический материал продавливается между ними. На плитах заданы постоянные касательные напряжения σ_{12} , σ_{13} . Графики функций σ_{12} , σ_{13} приведены на рисунке.

Касательные напряжения для решения (14):

• соответствуют σ_{12} , $\blacktriangle$ — σ_{13} ;

при этом $A = B = 1$, $u = 1$, $\theta = -\pi/4$, $C = 0$

2.3. Деформация стационарного решения системы (1)–(4). Теперь стационарное решение, построенное в предыдущем пункте, с помощью преобразований (5) деформируем в нестационарные решения исходной системы (1)–(4). Имеем

$$\varphi = -\theta + 2 \arctg(\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)),$$

$$h = \begin{cases} \frac{1}{u} \left(-2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{tg} \varphi + \frac{B}{u \cos \varphi}, & \text{если } \cos \varphi \neq 0; \\ \frac{1}{u} \left(2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{A}{u \sin \varphi}, & \text{если } \cos \varphi = 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma_{12} = k_s \sin \varphi, \quad \sigma_{13} = k_s \cos \varphi, \quad \sigma_{13} = k_s \cos \varphi,$$

$$v = \int_{x_1}^x h \sin \varphi dx, \quad w = \int_{x_1}^x h \cos \varphi dx.$$

В этом случае касательные напряжения σ_{12} , σ_{13} уже не являются постоянными на плитах, как это было в предыдущем пункте, а меняются в зависимости от выбранной функции $f_1(t)$, входящей в (14). Такое решение можно использовать для описания течения пластического материала между плитами, которые находятся под воздействием вибрационных нагрузок на плиты $x = x_1 = \text{const}$, $x = x_2 = \text{const}$. При этом сами плиты тоже меняют свою форму $x + a_1 f_1(t) = x_1$, $x + a_1 f_1(t) = x_2$. Здесь a_1 — некоторое фиксированное число. Если $a_1 = 0$, то получаем исходное стационарное решение.

2.4. Автомоделное решение системы уравнений (1)–(4). Построим инвариантное решение на подалгебре $M = t\partial_t + x_i\partial_{x_i}$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u(\xi, \eta, \zeta), \quad v = v(\xi, \eta, \zeta), \quad w = w(\xi, \eta, \zeta), \quad p = p(\xi, \eta, \zeta), \\ \xi &= x_1/t, \quad \eta = x_2/t, \quad \zeta = x_3/t. \end{aligned} \quad (15)$$

В литературе такие решения принято называть автомоделными.

Подставляем (15) в систему уравнений (1)–(4). Получим

$$\begin{aligned} (u - \xi)\partial_\xi u + (v - \eta)\partial_\eta u + (w - \zeta)\partial_\zeta u &= \partial_\xi \sigma_{11} + \partial_\eta \sigma_{12} + \partial_\zeta \sigma_{13}, \\ (u - \xi)\partial_\xi v + (v - \eta)\partial_\eta v + (w - \zeta)\partial_\zeta v &= \partial_\xi \sigma_{12} + \partial_\eta \sigma_{22} + \partial_\zeta \sigma_{23}, \\ (u - \xi)\partial_\xi w + (v - \eta)\partial_\eta w + (w - \zeta)\partial_\zeta w &= \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23} + \partial_\zeta \sigma_{33}, \\ \partial_\xi u + \partial_\eta v + \partial_\zeta w &= 0, \\ (\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) &= 2k_s^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Система уравнений (16) проще, чем исходная система уравнений, поскольку содержит на одну независимую переменную меньше.

Будем искать решение системы уравнений (16) в следующем виде:

$$u = \xi, \quad v = \eta, \quad w = -2\zeta + f(\xi, \eta), \quad p = p(\xi, \eta, \zeta), \quad (17)$$

где $f(\xi, \eta)$ — гладкая функция.

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\begin{aligned} \partial_\xi \sigma_{11} = \partial_\xi \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}} &= 0, \quad \partial_\eta \sigma_{22} = \partial_\eta \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}} = 0, \\ 2(-f + 3\zeta) &= \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23} + \partial_\zeta p. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Заметим, что уравнение несжимаемости удовлетворяется тождественно.

Из системы (18) получаем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}, \quad p = 3\zeta^2 + \sigma_{11}, \quad -2f = \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23}. \quad (19)$$

Из последнего уравнения системы (19) следует уравнение для определения функции f :

$$-2f = \partial_\xi \frac{2k_s f_\xi}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}} + \partial_\eta \frac{2k_s f_\eta}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}}. \quad (20)$$

Уравнение (20) встречается при изучении поверхностей равновесия в гидромеханике невесомости [9]. Оно же встречается в теории пластичности [10] при описании медленных нестационарных течений в цилиндрическом канале, образующие которого параллельны оси z .

В общем случае решить уравнение (20) затруднительно, поэтому рассмотрим частный случай, когда $f = f(\xi)$. В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое допускает понижение порядка и сводится к уравнению первого порядка вида

$$f'_\xi = \pm \frac{\sqrt{4 \times 144 - (f^2 + C)^2}}{f^2 + C}, \quad (21)$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение (21) решается квадратурами, и решение записывается в виде эллиптических интегралов первого и второго родов.

Для удобства интерпретации построенного решения, преобразуем переменные следующим образом. Введем новые независимые переменные по формулам $x' = -mx$, $y' = -my$, $z' = mz$, $t' = h - mt$. Здесь m , h — положительные постоянные. Это преобразование можно сделать, поскольку исходная система допускает операторы растяжения и переноса. Построенное решение имеет вид

$$u = \frac{-mx}{h - mt}, \quad v = \frac{-my}{h - mt}, \quad w = \frac{2mz}{h - mt} + f\left(\frac{-mx}{h - mt}\right).$$

Данное решение можно интерпретировать как пластическое течение слоя, расположенного вдоль оси Oz , который сжимается жесткими и шероховатыми плитами в направлениях x и y . При этом плиты сближаются с постоянной скоростью m .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, как с помощью симметрий можно одно нестационарное решение уравнений пластичности превратить в целый класс нестационарных решений динамических уравнений пластичности. В работе построено новое автомодельное решение уравнений идеальной пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Максимова Л. М., Непершин Р. И. и др. Предельное состояние деформируемых тел и конструкций. М.: Физматлит, 2008.
2. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
3. Ольшев В., Мруз З, Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М.: Мир, 1964.
4. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
5. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
6. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
7. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
8. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. London; New York: CRC Press, 2012.
9. Бабский В. Г., Колпачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидродинамика невесомости. М.: Наука, 1975.
10. Сенашов С. И. Об одном классе точных решений уравнений идеальной пластичности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1986. № 3. С. 139–142.

Поступила в редакцию 12 июля 2019 г.

После доработки 12 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Сенашов Сергей Иванович

Савостьянова Ирина Леонидовна

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева
просп. Красноярский рабочий, 31

660037 г. Красноярск

E-mail: sen@sibsau.ru; ruppa@inbox.ru