Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. B. Sorokin, An implicit iterative method for numerical solution of the Cauchy problem for elliptic equations, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 95–106

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.410>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.135.184

April 26, 2023, 18:10:28

НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. Б. Сорокин

Строится и численно исследуется неявный градиентный двухслойный итерационный метод численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача, задача Коши, эллиптические уравнения, неявный двухслойный итерационный метод, разностная схема, метод разделения переменных.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.410

Введение. Задача Коши для эллиптического уравнения является одной из классических некорректных задач. В общих случаях (переменные коэффициенты, сложная геометрия расчетной области) численные методы ее решения основываются на фундаментальных результатах в области некорректных задач (см., например, [1]). Одним из наиболее употребимых несомненно является метод регуляризации Тихонова, основанный на сведении исходной некорректной задачи к задаче минимизации соответствующего функционала для функционального уравнения. Поиск минимума функционала осуществляется, как правило, посредством применения итерационных алгоритмов.

Некорректность исходной задачи отражается на свойствах оператора уравнения в виде очень большой его обусловленности. В свою очередь, следствием наличия у оператора большой обусловленности является то, что применение явных итерационных методов для нахождения с заданной точностью решения операторного уравнения требует выполнения неприемлемо большого числа итераций (пропорционального значению обусловленности).

Принципиально новых результатов при решении операторных уравнений итерационными методами достигают в большинстве случаев посредством применения неявных процессов.

В работе предлагается и численно исследуется неявный градиентный двухслойный итерационный метод численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений. В качестве переобусловливателя используется экономичный прямой метод решения задачи Коши для уравнения Лапласа в прямоугольной области.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ рассмотрим начально-краевую задачу для эллиптического уравнения (задача продолжения)

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}
& -k_1(a, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) = 0, \quad x_2 \in [c, d], \\
& u(a, x_2) = f(x_2), \quad x_2 \in [c, d], \\
& -k_2(x_1, c) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) = 0, \quad k_2(x_1, d) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, \quad x_1 \in [a, b].
\end{aligned} \tag{1}$$

Необходимо найти функцию $u(x_1, x_2)$ в области Ω по данным $f(x_2)$.

Сведем задачу продолжения (1) к обратной задаче [2, 3]: определить функцию $q(x_2)$, заданную на правой стороне прямоугольника $(a, b) \times (c, d)$, такую, чтобы решение $u(x_1, x_2)$ задачи

$$\begin{aligned}
Lu & \equiv -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\
& -k_1(a, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) = 0, \quad x_2 \in [c, d], \\
& u(b, x_2) = q(x_2), \quad x_2 \in [c, d], \\
& -k_2(x_1, c) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) = 0, \quad k_2(x_1, d) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, \quad x_1 \in [a, b],
\end{aligned} \tag{2}$$

удовлетворяло на левой стороне прямоугольника $(a, b) \times (c, d)$ дополнительной информации

$$u(a, x_2) = f(x_2), \quad x_2 \in (c, d). \tag{3}$$

Обратную задачу (2), (3) будем решать на дискретном уровне.

Построим равномерные сетки:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1^- & = \left\{ x_{1,i} = x_{1,i-1} + h_1, \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad x_{1,0} = a, \quad h_1 = \frac{b-a}{N_1+1} \right\}, \\
\bar{\omega}_2 & = \left\{ x_{2,j} = x_{2,j-1} + h_2, \quad 1 \leq j \leq N_2 + 1, \quad x_{2,0} = c, \quad x_{2,N_2+1} = d, \quad h_2 = \frac{d-c}{N_2+1} \right\}, \\
\bar{\omega} & = \{x_{i,j} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega}, \quad x_{1,i} \in \bar{\omega}_1^-, \quad x_{2,j} \in \bar{\omega}_2\}.
\end{aligned}$$

Скалярные произведения в гильбертовых пространствах сеточных функций $H_{\bar{\omega}_1^-}$, $H_{\bar{\omega}_2}$ и $H_{\bar{\omega}}$, определенных на сетках $\bar{\omega}_1^-$, $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}$, соответственно зададим в виде

$$\begin{aligned}
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}_1^-} & = \frac{h_1}{2} u^h(x_{1,0}) v^h(x_{1,0}) + \sum_{i=1}^{N_1} u^h(x_{1,i}) v^h(x_{1,i}) h_1, \\
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}_2} & = \frac{h_2}{2} u^h(x_{2,0}) v^h(x_{2,0}) + \sum_{j=1}^{N_2} u^h(x_{2,j}) v^h(x_{2,j}) h_2 + \frac{h_2}{2} u^h(x_{2,N_2+1}) v^h(x_{2,N_2+1}), \\
(u^h, v^h)_{\bar{\omega}} & = (1, (u^h, v^h)_{\bar{\omega}_1^-}).
\end{aligned}$$

Дискретный аналог обратной задачи (2), (3) сформулируем следующим образом: среди всех задач

$$\Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \tag{4}$$

$$u^h(x_{1,N_1+1}, x_{2,j}) = q^h(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \tag{5}$$

надо указать такую задачу (такую сеточную функцию $q^h(x_{2,j})$), чтобы ее решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ удовлетворяло равенству

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = f(x_{2,j}), \quad x_{2,j} \in [c, d]. \quad (6)$$

Действие операторов Λ_1 и Λ_2 определим в виде [4, 5]

$$\Lambda_1 y(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} k_1(x_{1,0} + 0, 5h_1, x_{2,j}) y_{x_1}(x_{1,0}, x_{2,j}), & i = 0, \\ -(k_1(x_{1,i} - 0, 5h_1, x_{2,j}) y_{\bar{x}_1})_{x_1}(x_{1,i}, x_{2,j}), & i = \overline{1, N_1}, \end{cases}$$

$$\Lambda_2 y(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} k_2(x_{1,i}, x_{2,0} + 0, 5h_2) y_{x_2}(x_{1,i}, x_{2,0}), & j = 0, \\ -(k_2(x_{1,i}, x_{2,j} - 0, 5h_2) y_{\bar{x}_2})_{x_2}(x_{1,i}, x_{2,j}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_2} k_2(x_{1,i}, x_{2, N_2+1} - 0, 5h_2) y_{\bar{x}_2}(x_{1,i}, x_{2, N_2+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases}$$

Так же, как это описано, например, в [2], можно, используя задачу (4), (5), ввести оператор $A_h: q^h(x_{2,j}) \rightarrow u^h(x_{1,0}, x_{2,j})$, где $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ — решение прямой задачи (4), (5). Тогда обратная задача (4)–(6) может быть записана в следующем виде:

$$A_h q^h(x_{2,j}) = f(x_{2,j}). \quad (7)$$

Одним из возможных способов решения (7) является минимизация целевого функционала

$$J(q) = \|A_h q^h - f\|_{\bar{\omega}}^2 = (A_h q^h - f, A_h q^h - f)_{\bar{\omega}},$$

что эквивалентно решению уравнения (трансформация Гаусса)

$$A_h^* A_h q^h(x_{2,j}) = A_h^* f(x_{2,j}). \quad (8)$$

Постановка задачи. Исследовать итерационные методы решения уравнения (8).

2. Построение операторов A_h и A_h^* . Учтем краевые условия Дирихле (5) задачи (4), (5) в правой части. В результате получим задачу

$$L_h u^h \equiv \bar{\Lambda}_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = g^h(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (9)$$

$$i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}.$$

Здесь

$$\bar{\Lambda}_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} \Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}), & i = \overline{0, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \frac{k_1(x_{1, N_1} - 0, 5h_1, x_{2,j})}{h_1} u_{\bar{x}_1}^h(x_{1, N_1}, x_{2,j}) \\ + \frac{k_1(x_{1, N_1} + 0, 5h_1, x_{2,j})}{h_1^2} u^h(x_{1, N_1}, x_{2,j}), & i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \end{cases}$$

а правая часть задается формулой

$$g^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \frac{k_1(x_{1, N_1} + 0, 5h_1, x_{2,j})}{h_1^2} q^h(x_{2,j}), & i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \quad (10)$$

Линейный оператор $L_h: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$ отображает сеточные функции, заданные на сетке $\bar{\omega}$, в сеточные функции, заданные также на $\bar{\omega}$.

Используя запись задачи (4), (5) в форме (9), (10), оператор A_h может быть записан в виде

$$A_h = RL_h^{-1}P: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}. \quad (11)$$

Здесь оператор $P: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$ — оператор продолжения. Результатом действия на функцию $q^h(x_{2,j})$, $j = \overline{0, N_2 + 1}$, оператором P является сеточная функция

$$(Pq^h)(x_{1,i}, x_{2,j}) = \frac{k_1(x_{1,N_1} + 0, 5h_1, x_{2,j})}{h_1^2} q^h(x_{2,j}) \delta_{i,N_1},$$

где $\delta_{i,m}$ — символ Кронеккера; $L_h^{-1}: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$ — оператор, обратный к оператору из (9); $R: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}$ — оператор сужения, ставящий в соответствие сеточной функции, заданной на $\bar{\omega}$, ее след на левой границе $\bar{\omega}$:

$$(Ru^h)(x_{2,j}) = u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) \quad \text{для любых } u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) \in H_{\bar{\omega}}.$$

Поскольку оператор $L_h: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$ самосопряжен [4], то из (11) следует

$$A_h^* = P^*L_h^{-1}R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}. \quad (12)$$

Непосредственная проверка показывает, что в заданных скалярных произведениях:

$R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$ — оператор продолжения, действующий на сеточную функцию $v^h(x_{2,j})$, $j = \overline{0, N_2 + 1}$, заданную на $\bar{\omega}_2$ по правилу

$$(R^*v^h)(x_{1,i}, x_{2,j}) = \frac{2}{h_1} v^h(x_{2,j}) \delta_{i,0};$$

$P^*: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}$ — оператор сужения, ставящий в соответствие сеточной функции, заданной на $\bar{\omega}$, функцию из $H_{\bar{\omega}_2}$ по правилу

$$(P^*u^h)(x_{2,j}) = \frac{k_1(x_{1,N_1} + 0, 5h_1, x_{2,j})}{h_1} u^h(x_{1,N_1}, x_{2,j})$$

для любых $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) \in H_{\bar{\omega}}$.

3. Спектральные задачи для операторов B_h и B_h^* . Определим оператор B_h , действующий следующим образом: $B_h: q^h(x_{2,j}) \rightarrow u^h(x_{1,0}, x_{2,j})$, где $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ — решение прямой задачи (9), (10), в которой в качестве оператора в (9) используется разностный оператор Лапласа

$$-\Delta_h u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \tilde{\Lambda}_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + \tilde{\Lambda}_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}),$$

где

$$\tilde{\Lambda}_1 y(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} y_{x_1}(x_{1,0}, x_{2,j}), & i = 0, \\ -y_{\bar{x}_1 x_1}(x_{1,i}, x_{2,j}), & i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ \frac{-y^h(x_{1,N_1-1}, x_{2,j}) + 2y^h(x_{1,N_1}, x_{2,j})}{h_1^2}, & i = N_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_2 y(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}(x_{1,i}, x_{2,0}), & j = 0, \\ -y_{\bar{x}_2 x_2}(x_{1,i}, x_{2,j}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_2} y_{\bar{x}_2}(x_{1,i}, x_{2,N_2+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases}$$

Таким образом, $B_h = R(-\Delta_h)^{-1}P: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}$ и соответственно

$$B_h^* = P^*(-\Delta_h)^{-1}R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}. \quad (13)$$

В [6] показано, что собственными функциями оператора B_h являются собственные функции спектральной задачи

$$\tilde{\Lambda}_2 \mu^{(2)}(x_{2,j}) = \lambda^{(2)} \mu^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (14)$$

имеющей аналитическое решение: собственные функции

$$\begin{aligned} \mu_m^{(2)}(x_{2,j}) &= \sqrt{\frac{2}{d-c}} \cos\left(\frac{m\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \mu_0^{(2)}(x_{2,j}) &= \sqrt{\frac{1}{d-c}}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \mu_{N_2+1}^{(2)}(x_{2,j}) &= \sqrt{\frac{1}{d-c}} \cos\left(\frac{(N_2+1)\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ (\mu_m^{(2)}, \mu_l^{(2)})_{\bar{\omega}_2} &= \delta_{ml} \end{aligned}$$

и собственные числа

$$\lambda_m^{(2)} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2\left(\frac{m\pi h_2}{2(d-c)}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N_2 + 1.$$

Собственные числа B_h могут быть представлены через $\lambda_m^{(2)}$ в двух видах: в аналитическом и путем решения методом прогонки специальных трехточечных задач:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1 w_{k,k}(i) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(i) &= 0, \quad i = \overline{0, N_1 - 1}, \\ \bar{\Lambda}_1 w_{k,k}(N_1) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(N_1) &= 1/h_1^2. \end{aligned}$$

При этом $\lambda_k(B_h) = w_{k,k}(0)$.

Затраты на вычисления $\lambda_k(B_h)$, $k = \overline{0, N_2 + 1}$, с применением метода прогонки составляют порядка $N_1 N_2$ операций.

Покажем, что собственными функциями оператора B_h^* также являются собственные функции спектральной задачи (14). Для этого подействуем оператором B_h^* на $\mu_k^{(2)}$.

В соответствии с (13) надо выполнить следующие действия.

1. Продолжить сеточную функцию $\mu_k^{(2)}(x_{2,j})$ с помощью оператора $R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}}$:

$$(R^* \mu_k^{(2)})(x_{1,i}, x_{2,j}) = \frac{2}{h_1} \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) \delta_{i,0}.$$

2. Применить к полученной функции оператор $(-\Delta_h)^{-1}$, т. е. решить задачу

$$-\Delta_h w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \frac{2}{h_1} \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) \delta_{i,0} \equiv f_k(x_{1,i}, x_{2,j}). \quad (15)$$

3. Применить к полученному решению $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ оператор сужения $P^*: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}$:

$$(P^* w_k)(x_{2,j}) = \frac{1}{h_1} w_k(x_{1,N_1}, x_{2,j}). \quad (16)$$

Для решения (15) используем метод разложения в одинарный ряд. Рассматривая сеточные функции $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ и $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ при фиксированном i как сеточные функции аргумента j , разложим их по базису $\mu_m^{(2)}$, $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$\begin{aligned} w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) &= \sum_{m=0}^{N_2+1} w_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \\ w_{k,m}(i) &= (w_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}; \\ f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) &= \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \\ f_{k,m}(i) &= (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (15) и учитывая (14), имеем

$$\sum_{m=0}^{N_2+1} [\tilde{\Lambda}_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} w_{k,m}(i)] \mu_m^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}).$$

Используя линейную независимость собственных функций, получаем для каждого номера $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$ систему линейных уравнений

$$\tilde{\Lambda}_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} w_{k,m}(i) = f_{k,m}(i), \quad i = \overline{0, N_1}. \quad (18)$$

В соответствии с введенными скалярными произведениями и видом $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ из (15) для каждого фиксированного номера k имеем

$$\begin{aligned} f_{k,m}(i) &= (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2} \\ &= \begin{cases} 0, & i = \overline{1, N_1}, \quad m = \overline{0, N_2 + 1}, \\ \left(\frac{2}{h_1} \mu_k^{(2)}, \mu_m^{(2)} \right)_{\bar{\omega}_2} = \frac{2}{h_1} \delta_{km}, & i = 0, \quad m = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Поэтому при фиксированном k все системы (18) (предназначенные для определения коэффициентов Фурье $w_{k,m}(i)$, $i = \overline{0, N_1}$, $m = \overline{0, N_2 + 1}$) для номеров $m \neq k$ будут однородными. Следовательно, их решения тождественно равны нулю: $w_{k,m}(i) = 0$, $i = \overline{0, N_1}$ для всех $m \neq k$. Единственной неоднородной системой из (18) будет система с номером $m = k$. Имея в виду (19), эта система записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1 w_{k,k}(0) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(0) &= 2/h_1, \\ \tilde{\Lambda}_1 w_{k,k}(i) + \lambda_k^{(2)} w_{k,k}(i) &= 0, \quad i = \overline{1, N_1}. \end{aligned}$$

Суммируя сказанное, решение (17) задачи (15) с номером k записывается в форме $w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = w_{k,k}(i) \mu_k^{(2)}(x_{2,j})$. Наконец, применяя к полученному решению оператор сужения из (16) $P^*: H_{\bar{\omega}} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}$, получаем окончательный результат:

$$(P^* w_k)(x_{2,j}) = \frac{1}{h_1} w_k(x_{1,N_1}, x_{2,j}) = \frac{1}{h_1} w_{k,k}(N_1) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Это означает, что

$$B^* \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) = \frac{1}{h_1} w_{k,k}(N_1) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Следовательно, собственными функциями оператора B_h^* являются $\mu_k^{(2)}(x_{2,j})$, а собственными числами являются $\lambda_k(B_h^*) = \frac{1}{h_1} w_{k,k}(N_1)$.

Затраты на вычисления $\lambda_k(B_h^*)$, $k = 0, N_2 + 1$, с применением метода прогонки составляют порядка $N_1 N_2$ операций.

Представленные в этом разделе результаты позволяют применять метод Фурье для решения задачи $(B_h^* B_h + \varepsilon E)p = w$. Здесь и далее E — единичный оператор.

1. Разложим w по базису: $w(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j})$.
2. Вычислим коэффициенты Фурье для p : $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k(B_h^*) \lambda_k(B_h) + \varepsilon}$.
3. Собираем решение с этими коэффициентами: $p(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j})$.

Стоимость реализации этого алгоритма с использованием БПФ составляет всего порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

4. Неявный итерационный метод численного решения задачи Коши. Некорректность исходной задачи (1) отражается на свойствах оператора $A_h^* A_h$ в виде очень большой его обусловленности. Результаты, полученные в [6] и разд. 3 данного исследования, позволяют вычислить собственные числа оператора $A_h^* A_h$, например, для случая постоянных коэффициентов $k_1(x_1, x_2) = 1$, $k_2(x_1, x_2) = 1$ в операторе L . Для этого случая в табл. 1 приведены максимальное, минимальное собственные числа (порядок) и обусловленность $A_h^* A_h$ (порядок) при параметрах сетки $\bar{\omega}$, указанных в первом столбце.

Таблица 1

	$\lambda_{\max}(A_h^* A_h)$	$\lambda_{\min}(A_h^* A_h)$	$\text{cond}_2(A_h^* A_h)$
$h_1 = h_2 = 1/10$	1	10^{-5}	10^5
$h_1 = h_2 = 1/20$	1	10^{-10}	10^{10}
$h_1 = h_2 = 1/40$	1	10^{-21}	10^{21}

Следствием наличия у оператора $A_h^* A_h$ такой большой обусловленности является то, что применение явных стационарных итерационных методов $(q^{k+1} - q^k)/\tau + A_h^* A_h q^k = A_h^* f$ для нахождения с заданной точностью решения операторного уравнения (8) требует выполнения неприемлемо большого числа итераций (пропорционального значению обусловленности).

Одним из широко известных подходов, позволяющих уменьшить обусловленность оператора в (8), является метод Лаврентьева. В этом методе вместо уравнения (8) предлагается решать задачу

$$(A_h^* A_h + \alpha E)q_\alpha(x_{2,j}) = A_h^* f(x_{2,j}). \quad (20)$$

Выбор параметра α подчинен, в частности, условию близости решений q и q_α уравнений (8) и (20) соответственно. В изучаемом нами случае параметр должен удовлетворять неравенству

$$\lambda_{\min}(A_h^* A_h) \ll \alpha \ll 1 = \lambda_{\max}(A_h^* A_h).$$

С точки зрения применения итерационных процессов это существенно не улучшает ситуацию. Действительно, обусловленность оператора из (20) выражается в терминах собственных чисел оператора $A_h^* A_h$ в форме

$$\text{cond}_2(A_h^* A_h + \alpha E) = \frac{\lambda_{\max}(A_h^* A_h) + \alpha}{\lambda_{\min}(A_h^* A_h) + \alpha}.$$

Учитывая диапазон изменения α , имеем $\text{cond}_2(A_h^*A_h + \alpha E) \approx 1/\alpha$. Следовательно, даже если выбрать не слишком маленький параметр α , например $\alpha = 10^{-4}$, то для нахождения решения с заданной точностью потребуется выполнить пропорционально $1/\alpha = 10000$ итераций по явному стационарному итерационному методу

$$(q^{k+1} - q^k)/\tau + (A_h^*A_h + \alpha E)q^k = A_h^*f \quad (21)$$

с оптимальным параметром τ .

Что касается явных нестационарных градиентных итерационных процессов, то известно, что асимптотически метод наискорейшего спуска не лучше, чем метод Ричардсона с оптимальным параметром. Однако можно надеяться на определенную эффективность их применения для рассматриваемого класса задач в связи со следующим.

1. Метод наискорейшего спуска обладает свойством подавлять преобладающие гармоники.

2. Как известно, коэффициенты z_i^k в разложении погрешности $z^k = q^k - q_{\text{exact}}$ по собственным функциям оператора задачи убывают по закону $z_i^{k+1} = (1 - \tau \lambda_i) z_i^k$. Если выбрать начальное приближение $q^0 = 0$, то $z^0 = -q_{\text{exact}}$ и в погрешности z^k будут присутствовать только гармоники, содержащиеся в точном решении q_{exact} . В тоже время, если известно, что q_{exact} гладкая, то ее коэффициенты Фурье быстро убывают с номером гармоники.

Таким образом, можно надеяться, что малые коэффициенты в разложении погрешности будут и дальше убывать, а метод наискорейшего спуска будет подавлять большие коэффициенты.

Принципиально новых результатов при решении операторных уравнений итерационными методами достигают в большинстве случаев посредством применения неявных процессов. Так, при численном решении разностных аналогов эллиптических уравнений с переменными коэффициентами использование в неявных итерационных процедурах в качестве переобусловливателей разностных аналогов этих же уравнений с постоянными коэффициентами приводит к независимости числа необходимых итераций от параметров дискретизации. Если уравнение решается в стандартной области (прямоугольник, круг), то для обращения переобусловливателя, как правило, имеются экономичные алгоритмы.

Эти соображения приводят к следующему неявному нестационарному (метод наискорейшего спуска) итерационному процессу для решения операторного уравнения (8):

$$(B_h^*B_h + \varepsilon E) \frac{q^{k+1} - q^k}{\tau_{k+1}} + (A_h^*A_h + \alpha E)q^k = A_h^*f. \quad (22)$$

Используемые здесь операторы B_h^* и B_h определены в разд. 3. Там же показано, что обращение оператора $B_h^*B_h + \varepsilon E$ требует всего порядка $N_2 \ln N_2$ операций. Таким образом, затраты на вычисление q^{k+1} лишь немногим превосходят число операций на получение следующей итерации в явном итерационном методе. В тоже время можно надеяться, что так же, как и в случае решения прямых задач, число итераций, необходимое для достижения в (22) заданной точности, не будет зависеть от параметров дискретизации.

В заключение этого раздела приведем один из возможных алгоритмов реализации итерационного процесса (22).

АЛГОРИТМ. Предварительные расчеты: вычисляем $F = A_h^*f$ и собственные числа оператора $B_h^*B_h$. Задаем начальное приближение $q^0 = 0$.

1. Вычислить невязку $q^k \rightarrow r^k = A_h^*A_h q^k + \alpha E q^k - F$. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1.1. Применить оператор A_h к q^k , т. е. решить прямую задачу с заданным на правом крае условием Дирихле, равным q^k .

1.2. Применить оператор A_h^* к $A_h q^k$, вычисленному в п. 1.1, т. е. решить сопряженную прямую задачу с заданным на левом крае условием Неймана, равным $A_h q^k$.

1.3. Вычислить невязку $r^k = A_h^* A_h q^k + \alpha E q^k - F$.

2. Решить уравнение $(B_h^* B_h + \varepsilon E) w^k = r^k$ методом Фурье, изложенным в разд. 3.

3. Вычислить итерационный параметр $\tau_{k+1} = \frac{(r^k, w^k)}{(A_h w^k, A_h w^k) + \alpha(w^k, w^k)}$.

Для этого дополнительно надо решить одну прямую задачу (применить оператор A_h к w^k).

4. Вычислить следующую итерацию $q^{k+1} = q^k - \tau_{k+1} w^k$.

Если выполнено условие окончания процесса, заканчиваем, в противном случае возвращаемся к п. 1.

5. Результаты вычислительных экспериментов. Задача (2), (3) решалась для оператора L , заданного в области

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, 1), x_2 \in (0, \pi)\}.$$

Коэффициенты в L выбирались следующим образом:

$$k_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [0; 0, 5), x_2 \in [0; \pi], \\ 10, & x_1 \in [0, 5; 1], x_2 \in [0; \pi]; \\ k_2(x_1, x_2) = 1, & x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, \pi]. \end{cases}$$

При построении теста в качестве точного решения бралась функция

$$q(x_2) = \frac{1}{3} \frac{x_2^2(\pi - x_2)^2}{\exp(x_2 - \pi/10)^2}.$$

Для нее решалась разностная прямая задача (4), (5). Далее вычислялся след полученного решения $u^h(x_{1,0}, x_{2,j})$ на левой границе Ω , который и принимался за дополнительную информацию: $f(x_{2,j}) = u^h(x_{1,0}, x_{2,j})$. После этого восстанавливалось выбранное точное решение путем реализации итерационных методов — явного метода наискорейшего спуска (21), $\tau = \tau_{k+1}$, и неявного метода наискорейшего спуска (22).

В табл. 2 представлены результаты расчетов для невозмущенной дополнительной информации f . В первом столбце указаны параметры сеток в прямой задаче (4), (5), при которых выполнялись вычисления. Во втором столбце приведена точность получаемого итерационным методом решения: $\|q^k - q\|_2$. В последних двух столбцах помещены номера итераций, на которых была достигнута соответствующая точность по явному ($\alpha = 10^{-6}$) и неявному методам наискорейшего спуска ($\alpha = 10^{-6}$, $\varepsilon = 10^{-2}$) соответственно. Так, для сетки $N_1 = 9$, $N_2 = 9$ точность $\|q^k - q\|_2 = 0,1$ была достигнута на восьмой итерации по явному методу наискорейшего спуска и на шестой итерации по неявному методу наискорейшего спуска.

Анализ представленных в табл. 2 результатов показывает следующее.

1. Явный метод наискорейшего спуска в реализованном тесте демонстрирует достаточно оптимистичные результаты, существенно лучше теоретических. Теоретическая оценка для используемого параметра $\alpha = 10^{-6}$ дает асимптотическую оценку числа итераций для метода (21) с $\tau = \tau_{k+1}$, равную $1/\alpha = 10^6$ итераций.

2. Для явного метода наискорейшего спуска имеется зависимость числа итераций, необходимого для достижения заданной точности, от размерности задачи.

Т а б л и ц а 2

	Точность	Явный наискорейшего спуска $\alpha = 10^{-6}$	Неявный наискорейшего спуска $\alpha = 10^{-6}, \varepsilon = 10^{-2}$
$N_1 = 9,$ $N_2 = 9$	0,1	8	6
	0,01	37	12
	0,001	98	18
	0,0001	203	24
$N_1 = 19,$ $N_2 = 19$	0,1	10	6
	0,01	55	12
	0,001	178	18
	0,0001	463	28
$N_1 = 39,$ $N_2 = 39$	0,1	10	6
	0,01	62	12
	0,001	212	18
	0,0001	579	35

3. Неявный метод наискорейшего спуска в реализованном тесте показывает практически на порядок лучшие результаты по числу итераций по сравнению с явным методом.

4. Для неявного метода наискорейшего спуска число итераций, необходимое для достижения заданной точности, не зависит от размерности задачи.

В табл. 3 представлены результаты расчетов решения задачи продолжения для возмущенной дополнительной информации f_δ . В отличие от предыдущего вычислительного эксперимента в дополнительную информацию f после ее вычисления вносилось возмущение по правилу

$$f_\delta(x_{2,j}) = f(x_{2,j})(1 + \frac{\text{Pr}}{100} \cdot \text{rand}(j)),$$

где Pr — процент возмущения, $\text{rand}(j)$ — равномерное случайное распределение на отрезке $[-1, 1]$. В результате вместо задачи (20) необходимо решить задачу

$$(A_h^* A_h + \alpha E) q_{\delta\alpha}(x_{2,j}) = A_h^* f_\delta(x_{2,j}).$$

Разность между решением $q_{\delta\alpha}$ этой возмущенной задачи и точным решением q исходной задачи (8) оценивается (см., например, [3, с. 96]) следующим образом:

$$\|q - q_{\delta\alpha}\|_2 \leq C_1 \alpha + C_2 \frac{\delta}{\alpha^{1/2}}.$$

Поэтому при заданной погрешности $\delta = \|f - f_\delta\|_2$ параметр α следует выбирать в виде $\alpha = \delta^{2/3}$.

В расчетах, поскольку константы C_1 и C_2 неизвестны, параметр α полагался $\alpha = \delta^{2/3}/10$. Параметр ε в неявном методе наискорейшего спуска (22) выбирался равным 10^{-2} , что в реализованных тестах соответствовало примерно удвоенному α .

В табл. 3 в первом столбце указаны параметры сеток в прямой задаче (4), (5), при которых выполнялись вычисления. Во втором столбце приведена

вносимая в дополнительную информацию погрешность. На каждой сетке расчеты проводились для погрешностей в 1 и 3 %. В последних двух столбцах помещены номера итераций, на которых необходимая точность была достигнута по явному и неявному методам наискорейшего спуска соответственно. Необходимая точность считалась достигнутой на итерации с номером k , если для этой итерации выполнилось неравенство $\|q^{k+1} - q\|_2 \geq \|q^k - q\|_2$ (q — точное решение исходной задачи). Выполнение этого неравенства означает, что погрешность $\|q^k - q\|_2 = \|(q^k - q_{\delta\alpha}) + (q_{\delta\alpha} - q)\|_2$ достигла уровня $\|q_{\delta\alpha} - q\|_2 = o(\delta) + o(\alpha)$ и дальнейшее уменьшение первого слагаемого $\|q^k - q_{\delta\alpha}\|$ не может улучшить качества полученного приближения q^k .

Так, для сетки $N_1 = 9$, $N_2 = 9$ при вносимой в дополнительную информацию погрешности в 1 % точность была достигнута на 43-й итерации по явному методу наискорейшего спуска и на 12-й итерации по неявному методу наискорейшего спуска.

Т а б л и ц а 3

	Точность	Явный наискорейшего спуска $\alpha = 10^{-6}$	Неявный наискорейшего спуска $\alpha = 10^{-6}, \varepsilon = 10^{-2}$
$N_1 = 9,$ $N_2 = 9$	$\delta \rightarrow 1\%$ $\delta \rightarrow 3\%$	43 34	12 10
$N_1 = 19,$ $N_2 = 19$	$\delta \rightarrow 1\%$ $\delta \rightarrow 3\%$	97 60	12 8
$N_1 = 39,$ $N_2 = 39$	$\delta \rightarrow 1\%$ $\delta \rightarrow 3\%$	100 90	12 10

Из результатов, представленных в табл. 3, имеем следующее.

1. В явном методе наискорейшего спуска для реализованного теста с возмущенной дополнительной информацией f_δ для выполнения критерия останова требуется выполнить по порядку такое же количество итераций, как и для невозмущенной дополнительной информации.

2. Для явного метода наискорейшего спуска зависимость числа итераций от размерности задачи сохраняется.

3. Неявный метод наискорейшего спуска в реализованном тесте показывает почти на порядок лучшие результаты по числу итераций по сравнению с явным методом.

4. Для неявного метода наискорейшего спуска число итераций, необходимое для достижения заданной точности, не зависит от размерности задачи.

5. Число итераций, необходимое для достижения заданной точности, полностью согласуется с распределением собственных чисел соответствующих спектральных задач:

$$(A_h^* A_h + \alpha E)\varphi = \lambda\phi \quad (23)$$

для явного метода;

$$(A_h^* A_h + \alpha E)\psi = \mu(B_h^* B_h + \varepsilon E)\psi \quad (24)$$

для неявного метода.

Результаты работы [6] и разд. 3 позволяют вычислить за $O(N_1 N_2)$ операций собственные числа этих задач на собственные значения. Вычисления спектров проведены для операторов, соответствующих последнему из расчетов

табл. 3, в котором использовались параметры $\alpha = 0,0057$, $\varepsilon = 10^{-2}$. Собственные числа, начиная с номера 10, выходят на асимптотику, равную $\lambda = 0,0057$ для задачи (23) и $\mu = 0,57$ для задачи (24). При этом $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \approx 175$, $\mu_{\max}/\mu_{\min} \approx 10$, что и определяет необходимое число итераций.

Заключение. В работе предложен и численно исследован неявный градиентный двухслойный итерационный метод численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений. Приведенные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об эффективности применения предложенного метода для рассматриваемого класса задач.

К существенным результатам работы следует отнести полученный в разд. 3 оператор разностной обратной задачи

$$A_h = RL_h^{-1}P: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}.$$

Это, в частности, позволило достаточно просто построить сопряженный к нему (в соответствующих скалярных произведениях) оператор

$$A_h^* = P^*L_h^{-1}R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2}.$$

Особо отметим, что сопряженный оператор построен в соответствии с выводами из [7], которые автор полностью разделяет.

Несомненно полезным является результат, касающийся решения спектральной задачи для оператора (разд. 3):

$$B_h^* = P^*(-\Delta_h)^{-1}R^*: H_{\bar{\omega}_2} \rightarrow H_{\bar{\omega}_2},$$

позволяющий в сочетании с прямым методом из [6] применять экономичный прямой метод (метод Фурье) для обращения переобусловливателя $B_h^*B_h + \varepsilon E$.

Отметим, что обращение оператора $B_h^*B_h + \varepsilon E$ требует всего порядка $N_2 \ln N_2$ операций. Тем самым затраты на вычисление q^{k+1} в неявном итерационном методе лишь немногим превосходят число операций на получение следующей итерации в явном методе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L. Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3, N 1. P. 21–46.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи, Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1979.
6. Сорокин С. Б. Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 1, С. 99–117.
7. Карчевский А. Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 609–619.

Поступила в редакцию 1 августа 2019 г.

После доработки 1 августа 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Сорокин Сергей Борисович

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

просп. Акад. Лаврентьева, 6

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1

630090 г. Новосибирск

E-mail: sorokin@sccc.ru