Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. V. Frankina, On the equilibrium of a two-layer elastic structure with a crack, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 107–120

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.411>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 13:50:28

О РАВНОВЕСИИ ДВУСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ*)

И. В. Фанкина

Исследуется задача о равновесии двуслойной конструкции, слоями которой являются упругие пластины. Верхний слой приклеен к нижнему по части края. Поведение пластин моделируется в рамках плоской теории упругости. В нижнем слое вдоль линии склейки имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым углом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, исключающие их взаимное проникание. Рассматривается вопрос о разрешимости задачи равновесия, а также о поведении решения задачи в случае стремления модулей упругости верхней пластины к нулю и бесконечности.

Ключевые слова: двуслойная конструкция, трещина, условие непроникания, метод фиктивных областей, вариационное неравенство.

DOI 10.33048/SIBJIM.2019.22.411

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется задача с налегающими областями, которая описывает равновесие двуслойной конструкции. Задачи с налегающими областями применимы к описанию некоторых естественных явлений, например напоявления льдин друг на друга, торошения льда и напластования горных пород. Такие задачи возникают при проектировании конструкций сложной геометрии. В теории трещин задачи с налегающими областями применимы при моделировании подкрепления трещины накладкой.

В работе рассматривается конструкция, которая состоит из двух упругих пластин, при этом верхняя пластина приклеена по части края к нижней. Вне линии склейки нижняя пластина закреплена по внешнему краю, а верхняя имеет свободный край. В нижней пластине вдоль линии, по которой соединены слои, имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым углом. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, не допускающие проникание противоположных берегов друг в друга [1, 2]. Поведение конструкции моделируется в рамках плоской теории упругости. Задачи равновесия различных двуслойных конструкций в плоской постановке исследовались в [3–8]. В [9] произведено численное моделирование задачи равновесия двуслойной конструкции, изученной в [10]. В [11] рассмотрена квазистатическая трехмерная задача о расслоении слоистой пластины.

Исследуемая проблема равновесия двуслойной конструкции представляет собой контактную задачу, в которой известна область контакта тел, являющихся слоями конструкции. В [12] рассматривается контактная задача для двух упругих пластин одинаковой формы, которые склеены на одном из берегов трещины, находящейся в нижней пластине, а вне линии склейки область контакта пластин заранее неизвестна. Искомые функции в задаче являются

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10007).

как горизонтальные смещения, так и прогибы пластин. В [13] изучена контактная задача с неизвестной областью контакта для двух вязкоупругих пластин, расположенных одна над другой, при наличии трещины в одной из пластин. В [14–17] исследованы задачи равновесия для двух пластин, расположенных под углом друг к другу, с возможным контактом между ними.

Для задачи равновесия, представленной в данной работе, доказано существование решения. Поскольку предполагается, что трещина выходит на внешнюю границу под нулевым углом, для доказательства применяется метод фиктивных областей, ранее использованный в работах [18–22]. Кроме того, проведен анализ поведения решения задачи равновесия при стремлении модулей упругости верхнего слоя к нулю и к бесконечности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть пластины описываются множествами $E_\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $E_\omega \subset \mathbb{R}^3$, а трещине в нижнем слое соответствует множество $C \subset \mathbb{R}^2$ (рис. 1). При этом на плоскости, в которой соединяются слои, пластинам соответствуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ соответственно (рис. 2). Предполагается, что пластины соединяются по линии, которой соответствует гладкая кривая γ , не имеющая самопересечений, $\bar{\gamma} \subset \bar{\Omega}$ и $\bar{\gamma} \subset \partial\omega$. Кривую можно представить в виде объединения $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b \cup \gamma_c$ таким образом, что на γ_a слои сцеплены, γ_b соответствует общей границе пластин, вдоль γ_c имеется трещина. Кроме того, считается, что кривая γ_c выходит на внешнюю границу $\partial\Omega$ под нулевым углом. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к $\partial\omega$; $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ — касательный вектор. С помощью направления ν определяются положительный и отрицательный берега $\gamma^\pm$. Наличие трещины предполагается на положительном берегу γ_c . Введем обозначения $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\Omega_{\gamma_c} = \Omega \setminus \bar{\gamma}_c$.

Рис. 1. Двуслойная конструкция:
 E_ω, E_Ω — упругие слои, C — трещина в слое E_Ω

Рис. 2. Геометрия конструкции на плоскости Ox_1x_2

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ — симметричный и положительно определенный тензор модулей упругости нижней пластины:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \\ a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Предполагается, что все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть тензор модулей упругости верхней пластины $B = \{b_{ijkl}\}$ обладает теми же свойствами. Кроме того, $a_{ijkl} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $b_{ijkl} \in L^\infty(\omega)$, $i, j, k, l = 1, 2$.

Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ — горизонтальные смещения точек нижней и верхней пластин соответственно, $u_\nu = u_i\nu_i$, $i = 1, 2$. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$ обозначим тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i})$, $i, j = 1, 2$; при этом $w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ — частная производная по соответствующей пространственной переменной x_j . Введем также обозначения $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Кроме того, для $P \in \{\sigma, p\}$ верно $P\nu = (P_{1j}\nu_j, P_{2j}\nu_j)$, $P_\nu = P_{ij}\nu_j\nu_i$, $P_\tau = P_{ij}\nu_j\tau_i$. Запись $[w] = w^+ - w^-$ означает скачок функции на γ , где $w^\pm$ — следы функции w на берегах $\gamma^\pm$.

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции при наличии трещины под действием заданных внешних сил $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ имеет следующий вид.

ЗАДАЧА 1. Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$, $p = \{p_{ij}(v)\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\text{div } \sigma = f \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \text{ в } \Omega_{\gamma_c}, \quad (1)$$

$$-\text{div } p = g \text{ в } \omega, \quad p = B\varepsilon(v) \text{ в } \omega, \quad (2)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \gamma, \quad p\nu = 0 \text{ на } \partial\omega \setminus \gamma, \quad (3)$$

$$u = v \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b, \quad [\sigma\nu] = p\nu \text{ на } \gamma_a, \quad -\sigma\nu = p\nu \text{ на } \gamma_b, \quad (4)$$

$$u^- = v, \quad [u_\nu] \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^- = 0, \quad [\sigma_\nu] = p_\nu, \quad -\sigma_\tau^- = p_\tau \text{ на } \gamma_c. \quad (5)$$

Соотношения в (1), (2) — это уравнения равновесия и состояния для пластин. Условия в (3) описывают поведение внешнего края нижней и верхней пластин вне линии склейки. Равенства в (4) соответствуют склейке пластин и совпадению усилий в слоях на линии склейки $\gamma_a \cup \gamma_b$. Второе условие в (5) обеспечивает непроникание берегов трещины $\gamma_c^\pm$ друг в друга. Последние два условия в (5) означают равенство нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих со стороны пластин на линию склейки γ_c .

В то же время задачу равновесия двуслойной конструкции с трещиной можно записать в виде задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений.

ЗАДАЧА 2. Найти функцию $(u, v) \in K$ такую, что

$$\Pi(u, v) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K} \Pi(\bar{u}, \bar{v}).$$

При этом множество допустимых перемещений определяется следующим образом:

$$K = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_{\partial\Omega \setminus \gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \bar{u} = \bar{v} \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b, \bar{u}^- = \bar{v}, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c\},$$

$$H_{\partial\Omega \setminus \gamma}^1(\Omega_{\gamma_c}) = \{\bar{u} \in H^1(\Omega_{\gamma_c}) \mid \bar{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \gamma\},$$

где $H_{\partial\Omega\setminus\gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})$ — пространство Соболева. Функционал потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v}.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи 2 является существование решения следующей вариационной задачи.

ЗАДАЧА 3. Найти функцию $(u, v) \in K$ такую, что

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. (6)

Теорема 1. Формулировки задачи равновесия (задачи 1 и 3) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из дифференциальной задачи 1 следует вариационное неравенство (6). Пусть функция (u, v) есть решение краевой задачи 1, $(\bar{u}, \bar{v})$ — произвольная функция из множества K . Домножим уравнения равновесия из (1) на $(\bar{u} - u)$, а из (2) на $(\bar{v} - v)$ и проинтегрируем по областям Ω_{γ} и ω соответственно. Суммируя полученные выражения и далее интегрируя по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma}} \sigma(u)(\bar{u} - u) + \int_{\gamma} [\sigma \nu(\bar{u} - u)] - \int_{\Omega_{\gamma}} f(\bar{u} - u) \\ + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\bar{v} - v) - \int_{\gamma} p \nu(\bar{v} - v) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание краевые условия (3)–(5), можно показать, что для слабых из (7) выполняется неравенство

$$\int_{\gamma} [\sigma \nu(\bar{u} - u)] - \int_{\gamma} p \nu(\bar{v} - v) \leq 0$$

и, следовательно, справедливо вариационное неравенство (6).

Проверим теперь обратное, а именно, из вариационной задачи 3 вытекают все условия задачи 1. Пусть функция (ξ, ζ) принадлежит пространству $C_0^\infty(\Omega_{\gamma})^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$. Выбирая в (6) тестовую функцию вида $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\xi, \zeta)$, заключаем, что уравнения равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma = f \text{ в } \Omega_{\gamma}; \quad -\operatorname{div} p = g \text{ в } \omega$$

выполняются в смысле обобщенных функций.

Выберем в качестве тестовой функции в (6) поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$. В результате подстановки получим равенство

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f u + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(v) - \int_{\omega} g v = 0. \quad (8)$$

Подставим теперь в (6) функцию $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) + (\xi, \zeta)$, $(\xi, \zeta) \in K$ и, учитывая (8), получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(\xi) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\zeta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \xi - \int_{\omega} g \zeta \geq 0. \quad (9)$$

Пусть U — окрестность произвольной точки множества γ_c (рис. 3). Предположим, что $\text{supp}(\xi, \zeta) \subset \bar{U}$, тогда проинтегрировав по частям (9), получим неравенство

$$- \int_{\gamma_c} \sigma_{\nu}^{+} \xi_{\nu} - \int_{\gamma_c} \sigma_{\tau}^{+} \xi_{\tau} \geq 0.$$

Поскольку $\xi_{\nu} \geq 0$ на γ_c по определению множества K , а ξ_{τ} — произвольная на γ_c , заключаем, что верны условия $\sigma_{\nu}^{+} \leq 0$, $\sigma_{\tau}^{+} = 0$ на γ_c .

Пусть теперь в некоторой точке $b_0 \in \gamma_c$ выполняется условие $[u_{\nu}(b_0)] > 0$. Рассмотрим функцию $\theta \in H_{\partial\Omega \setminus \gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2$, $\text{supp } \theta \subset \bar{U}_0$, где U_0 — малая окрестность точки b_0 (рис. 3).

Рис. 3. Двуслойная конструкция: окрестности произвольной точки γ_c и точки $b_0 \in \gamma_c$

Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\mu\theta, 0)$; μ — малый положительный параметр. Тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив такую функцию $(\bar{u}, \bar{v})$ в качестве тестовой в (6) и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_{\gamma_c} \sigma_{\nu}^{+} \theta_{\nu} + \int_{\gamma_c} \sigma_{\tau}^{+} \theta_{\tau} = 0,$$

откуда следует, что $\sigma_{\nu}^{+}(b_0) = 0$. Предполагая, что в точке $b_1 \in \gamma_c$ выполнено $\sigma_{\nu}^{+}(b_1) < 0$, получим равенство $[u_{\nu}(b_1)] = 0$. Таким образом, $\sigma_{\nu}^{+}[u_{\nu}] = 0$ на γ_c .

Далее, если пробная функция в (6) имеет вид $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\psi, \eta)$, где $(\psi, \eta) \in K$ и $[\psi_{\nu}] = 0$ на γ_c , то верно следующее равенство:

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u) \varepsilon(\psi) + \int_{\omega} p(v) \varepsilon(\eta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f \psi - \int_{\omega} g \eta = 0. \quad (10)$$

Путем интегрирования по частям из (10) извлекаем

$$- \int_{\gamma} [\sigma \nu \cdot \psi] + \int_{\partial\omega} p \nu \cdot \eta = 0. \quad (11)$$

Теперь, налагая дополнительные условия на носитель функции (ψ, η) , можем получить условия на усилия из (4), (5). Если $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \bar{U}_a$, где U_a — окрестность некоторой точки множества γ_a (рис. 4), то (11) обращается в

$$-\int_{\gamma_a} [\sigma \nu] \psi + \int_{\gamma_a} p \nu \cdot \eta = 0.$$

Из этого равенства, поскольку $\psi = \eta$ на γ_a , следует условие $[\sigma \nu] = p \nu$ на γ_a . Если $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \bar{U}_b$, где U_b — окрестность некоторой точки множества γ_b (рис. 4), то (11) примет вид

$$\int_{\gamma_b} \sigma \nu \cdot \psi + \int_{\gamma_b} p \nu \cdot \eta = 0.$$

В силу того, что $\psi = \eta$ на γ_b , следует равенство $-\sigma \nu = p \nu$ на γ_b . Если же $\text{supp}(\psi, \eta) \subset \bar{U}_c$, где U_c — окрестность некоторой точки множества γ_c (рис. 4), то (11) примет вид

$$-\int_{\gamma_c} [\sigma \nu \cdot \psi] + \int_{\gamma_c} p \nu \cdot \eta = 0,$$

или с учетом равенства $[\psi_\nu] = 0$ на γ_c

$$-\int_{\gamma_c} [\sigma_\nu] \psi_\nu - \int_{\gamma_c} [\sigma_\tau \psi_\tau] + \int_{\gamma_c} p_\nu \eta_\nu + \int_{\gamma_c} p_\tau \eta_\tau = 0.$$

Отсюда в силу условий $\sigma_\tau^+ = 0$, $\sigma_\nu^+ \leq 0$, $\sigma_\nu^+[u_\nu] = 0$ на γ_c , а также равенства $u^- = v$ на γ_c , следует, что $[\sigma_\nu] = p_\nu$ и $-\sigma_\tau = p_\tau$ на γ_c . Наконец, принимая во внимание полученные условия на γ , заключаем, что (11) влечет равенство $p \nu = 0$ на $\partial \omega \setminus \gamma$. То есть в предположении достаточной гладкости решения из вариационной задачи 3 вытекают все условия дифференциальной задачи 1. $\square$

Рис. 4. Окрестности точек γ_a , γ_b и γ_c

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Как правило, разрешимость задачи равновесия можно доказать, обращаясь к ее формулировке в виде задачи минимизации функционала энергии. Одним из достаточных условий существования решения задачи минимизации является наличие у минимизируемого функционала свойства коэрцитивности. В рассматриваемой задаче 2 не удастся установить коэрцитивность функционала $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ в связи с негладкостью границы области Ω_{γ_c} . Доказательство разрешимости задачи равновесия будет основано на методе фиктивных областей. При этом исходная область расширяется с помощью фиктивной таким образом, что будет возможным показать коэрцитивность функционала энергии для вспомогательной задачи, сформулированной в расширенной области.

Пусть кривая γ выходит на границу $\partial \Omega$ в точке $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$. Добавим фиктивную область Ω' так, чтобы угол между границами $\partial \Omega$ и $\partial \Omega'$ был

ненулевой и, кроме того, $(x_1^0, x_2^0) \in \partial\Omega'$ (рис. 5). Тогда $\Omega^{\gamma_c} = \Omega_{\gamma_c} \cup \Omega' \cup \text{int } \Sigma$, $\Omega^\gamma = \Omega_\gamma \cup \Omega' \cup \text{int } \Sigma$, $\partial\Omega^\gamma = \partial\Omega \cup \partial\Omega' \setminus (\gamma \cup \text{int } \Sigma)$ — обозначения для расширенной области и ее границы; здесь $\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\Omega'$.

Рис. 5. Расширение исходной области с помощью фиктивной области Ω'

Модули упругости a_{ijkl}^λ в области Ω^{γ_c} зависят от малого положительного параметра λ и имеют вид

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Задача равновесия двуслойной конструкции, которой соответствует область $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int } \Sigma$, при каждом $\lambda > 0$ формулируется следующим образом.

ЗАДАЧА 4. Найти функции $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $v^\lambda = (v_1^\lambda, v_2^\lambda)$, $p = \{p_{ij}(v^\lambda)\}$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda)\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma^\lambda &= f \text{ в } \Omega^\gamma, \quad \sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(u^\lambda) \text{ в } \Omega^{\gamma_c}, \\ -\operatorname{div} p &= g \text{ в } \omega, \quad p = B \varepsilon(v^\lambda) \text{ в } \omega, \\ u^\lambda &= 0 \text{ на } \partial\Omega^\gamma, \quad p\nu = 0 \text{ на } \partial\omega \setminus \gamma, \\ u^\lambda &= v^\lambda \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b, \quad [\sigma^\lambda \nu] = p\nu \text{ на } \gamma_a, \quad -\sigma^\lambda \nu = p\nu \text{ на } \gamma_b, \\ u^{\lambda-} &= v^\lambda, \quad [u_\nu^\lambda] \geq 0, \quad \sigma_\tau^{\lambda+} = 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} \leq 0, \quad \sigma_\nu^{\lambda+} [u_\nu^\lambda] = 0 \text{ на } \gamma_c, \\ [\sigma_\nu^\lambda] &= p_\nu, \quad -\sigma_\tau^{\lambda-} = p_\tau \text{ на } \gamma_c. \end{aligned}$$

Вариационная формулировка задачи 4 имеет следующий вид.

ЗАДАЧА 5. Найти функцию

$$(u^\lambda, v^\lambda) \in \bar{K} \tag{12}$$

такую, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(\bar{v} - v^\lambda) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\lambda) &\geq 0 \\ \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\bar{K}$ — множество возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \{(\bar{u}, \bar{v}) \in H_{\partial\Omega^\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2 \mid \\ &\quad \bar{u} = \bar{v} \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b; \bar{u}^- = \bar{v}, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c\}, \end{aligned}$$

при этом $H_{\partial\Omega^\gamma}^1(\Omega^{\gamma_c}) = \{\tilde{u} \in H^1(\Omega^{\gamma_c}) \mid \tilde{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega^\gamma\}$ — пространство Соболева.

Покажем, что задача равновесия, сформулированная в расширенной области, разрешима.

Лемма 1. *Задача 5 имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение функционал энергии

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) - \int_{\omega} g \bar{v}$$

и проверим его коэрцитивность на множестве $\bar{K}$. Справедливо выражение

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f \bar{u} + \frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) \pm \alpha \int_{\gamma_a} \bar{v}^2 - \int_{\omega} g \bar{v}, \quad (14)$$

где α — малый параметр, $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Кривую γ можно продолжить вдоль γ_c до границы $\partial\Omega^\gamma$ таким образом, что область $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int } \Sigma$ разбивается на две подобласти D_1 и D_2 с липшицевыми границами ∂D_i , $\partial D_i \cap \partial\Omega^\gamma \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. В каждой области D_i выполняется первое неравенство Корна [1, гл. 1, § 1, п. 3], поэтому справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(\bar{u}) \varepsilon(\bar{u}) \geq C_1 \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega^{\gamma_c})}^2.$$

Через C_1 и используемые далее C_i , $i = \overline{2, 19}$, обозначаются постоянные. Из [23, гл. 1, § 1, п. 3] следует, что одной из эквивалентных норм в пространстве $H^1(\omega)^2$ является норма

$$\|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2 = \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) + \int_{\gamma_a} \bar{v}^2$$

при условии, что $\text{mes } \gamma_a > 0$; mes — мера Лебега. Поэтому для слагаемых из (14) верна оценка

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} p(\bar{v}) \varepsilon(\bar{v}) + \alpha \int_{\gamma_a} \bar{v}^2 \geq C_1 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2.$$

Поскольку $\bar{v} = \bar{u}$ на γ_a , по теореме вложения имеем

$$\frac{C_2}{2} \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega^{\gamma_c})}^2 - \alpha \int_{\gamma_a} \bar{v}^2 \geq 0.$$

Таким образом, из (14) следует неравенство

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) \geq \frac{C_2}{2} \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega^{\gamma_c})}^2 + C_1 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}^2 - C_3 \|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega^\gamma}(\Omega^{\gamma_c})}^2 - C_4 \|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2},$$

которое означает, что функционал $\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ обладает свойством коэрцитивности. Кроме того, $\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v})$ является слабо полунепрерывным снизу функционалом в силу непрерывности и выпуклости, а множество $\bar{K}$ слабо замкнуто, поэтому можно заключить, что задача минимизации

$$\Pi^\lambda(\bar{u}, \bar{v}) \xrightarrow{(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}} \inf$$

имеет решение, и, следовательно, разрешима эквивалентная ей задача 5. $\square$

Рассмотрим семейство вариационных задач, зависящих от параметра λ , и перейдем в нем к пределу при стремлении λ к нулю.

Лемма 2. В семействе задач типа 5 можно осуществить предельный переход при $\lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Выбирая в качестве тестовой функции в (13) поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$, получаем уравнение

$$\int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma^\lambda(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) - \int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) - \int_{\omega} g v^\lambda = 0,$$

из которого следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) \\ + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 = \int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} g v^\lambda + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где β — малый параметр, $\beta \in (0, \beta_0)$. Слагаемые в левой части (15) при $\lambda \in (0, \lambda_0)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 \\ \geq C_5 \|u^\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})}^2 + C_6 \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $u^\lambda = v^\lambda$ на γ_a , для правой части в (15) выполняется неравенство

$$\int_{\Omega^{\gamma_c}} f u^\lambda + \int_{\omega} g v^\lambda + \beta \int_{\gamma_a} (v^\lambda)^2 \leq C_7 \|u^\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})} + C_8 \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следуют равномерные оценки по $\lambda \in (0, \lambda_0)$ для (u^λ, v^λ) :

$$\|u^\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})} \leq C_9, \quad \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)} \leq C_{10}, \quad \|u^\lambda\|_{H^1(\Omega')}^2 \leq C_{11} \lambda.$$

Так как пространство $H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})^2 \times H^1(\omega)^2$ рефлексивно, полученные оценки влекут следующие сходимости при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u^\lambda &\rightharpoonup u^0 \quad \text{слабо в } H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})^2, \\ v^\lambda &\rightharpoonup v^0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2, \\ u^\lambda &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega')^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь, если в (13) выбрать тестовой из $\bar{K}$ функцию $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$, продолженную нулем на область Ω' , то выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(\bar{u}) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(\bar{v}) \geq \int_{\Omega^{\gamma_c}} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega'} \sigma(u^\lambda) \varepsilon(u^\lambda) \\ + \int_{\Omega^{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^\lambda) + \int_{\omega} p(v^\lambda) \varepsilon(v^\lambda) + \int_{\omega} g(\bar{v} - v^\lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, переходя на основе (18) к нижнему пределу в (12) и (19) при $\lambda \rightarrow 0$, получим следующую вариационную задачу.

ЗАДАЧА 6. Найти функцию $(u^0, v^0) \in K$ такую, что

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u^0) \varepsilon(\bar{u} - u^0) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u^0) + \int_{\omega} p(v^0) \varepsilon(\bar{v} - v^0) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v^0) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. $\square$

Предельная задача в точности совпадает с задачей 3, и ее решением является сужение предельной функции (u^0, v^0) из (18). Таким образом, в силу теоремы 1 и лемм 1, 2 верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение вариационной задачи равновесия 3 существует. Если решение задачи 3 более гладкое, $(u, v) \in H^2_{\partial\Omega \setminus \gamma}(\Omega_{\gamma_c})^2 \times H^2(\omega)^2$, то оно будет решением задачи 1.*

3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО ПАРАМЕТРУ ЖЕСТКОСТИ ВЕРХНЕГО СЛОЯ

Исследуем вопрос о поведении решения задачи равновесия 1 при стремлении жесткости верхней пластины к нулю и бесконечности. Пусть тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от положительного параметра δ : $B_\delta = \{\delta^{-1} b_{ijkl}\}$. Расширим область Ω до области $\Omega \cup \Omega' \cup \text{int } \Sigma$ аналогично способу в разд. 2. При этом тензор модулей упругости в расширенной области зависит от параметра δ .

3.1. Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$. Пусть модули упругости a_{ijkl}^δ в области Ω^{γ_c} имеют вид

$$a_{ijkl}^\delta = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \delta^{-1} a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Тогда при каждом фиксированном $\delta \in (0, \delta_0)$ вариационная задача равновесия запишется в следующем виде.

ЗАДАЧА 7. Найти функцию

$$(u_\delta, v_\delta) \in \bar{K} \quad (20)$$

такую, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) \\ + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(\bar{v} - v_\delta) - \int_{\omega} g(\bar{v} - v_\delta) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теорема 3. *В семействе задач типа 7 можно осуществить предельный переход при $\delta \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая в (21) в качестве $(\bar{u}, \bar{v})$ поочередно функции $(2u_\delta, 2v_\delta)$ и $(0, 0)$, получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f u_\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) - \int_{\omega} g v_\delta = 0. \quad (22)$$

Из равенства (22) следуют оценки, равномерные по параметру $\delta \in (0, \delta_0)$:

$$\|u_\delta\|_{H^1_{\partial\Omega \setminus \gamma}(\Omega_{\gamma_c})^2} \leq C_{12}, \quad \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{13}, \quad \|u_\delta\|_{H^1(\Omega')^2}^2 \leq C_{14} \delta.$$

Следствием этих оценок являются сходимости при $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u_\delta &\rightarrow u_0 \quad \text{слабо в } H^1_{\partial\Omega\gamma}(\Omega^{\gamma_c})^2, \\ u_\delta &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega')^2, \\ v_\delta &\rightarrow v_0 \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Кроме того, справедливо неравенство $\int_\omega p(v_\delta)\varepsilon(v_\delta) \leq C_{15}\delta$, из которого следует, что предельная функция v_0 в области ω является функцией пространства инфинитезимальных жестких перемещений $R(\omega)$, $v_0 = \rho_0 \in R(\omega)$:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \{\varrho \mid \varrho = Dx + C, x = (x_1, x_2) \in \omega\}, \\ D &= \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2), \quad d, c^1, c^2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество K_0 ,

$$K_0 = \{(\bar{u}, \bar{\rho}) \in H^1_{\partial\Omega\setminus\gamma}(\Omega_{\gamma_c})^2 \times R(\omega) \mid \bar{u} = \bar{\rho} \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b; \bar{u}^- = \bar{\rho}, [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c\}.$$

Выберем тестовой функцией в (21) функцию $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0$, $\bar{u} = 0$ в Ω' . Тогда вариационное неравенство примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta)\varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \frac{1}{\delta} \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta)\varepsilon(u_\delta) \\ - \frac{1}{\delta} \int_\omega p(v_\delta)\varepsilon(v_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) - \int_\omega g(\bar{\rho} - v_\delta) \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь, основываясь на сходимостях (23) и учитывая, что $v_0 = \rho_0$ в области ω , можно осуществить переход к нижнему пределу в (20) и (24) при $\delta \rightarrow 0$ и получить предельную вариационную задачу следующего вида.

ЗАДАЧА 8. Найти функцию $(u_0, \rho_0) \in K_0$ такую, что

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_0)\varepsilon(\bar{u} - u_0) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_0) - \int_\omega g(\bar{\rho} - \rho_0) \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0. \quad \square$$

Задача 8 описывает равновесие двуслойной конструкции, которая состоит из упругой пластины с трещиной и жесткой пластины, которой соответствует область ω . Постановка задачи в дифференциальном виде, эквивалентная на классе гладких функций вариационной задаче 8, заключается в следующем.

ЗАДАЧА 9. Найти такие функции $u_0 = (u_{01}, u_{02})$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u_0)\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho_0 \in R(\omega)$, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \sigma = A\varepsilon(u_0) \text{ в } \Omega_{\gamma_c}, \\ u_0 &= 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \gamma, \quad u_0 = \rho_0 \text{ на } \gamma_a \cup \gamma_b, \\ u_0^- &= \rho_0, \quad [u_{0\nu}] \geq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\nu^+[u_{0\nu}] = 0 \text{ на } \gamma_c, \\ - \int_{\gamma_a} [\sigma\nu]\bar{\rho} + \int_{\gamma_b} \sigma\nu \cdot \bar{\rho} - \int_{\gamma_c} [\sigma\nu]\bar{\rho} &= \int_\omega g\bar{\rho} \quad \text{для всех } \bar{\rho} \in R(\omega). \end{aligned}$$

3.2. Предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$. Пусть модули упругости a_{ijkl}^δ в области Ω^{γ_c} зависят от δ следующим образом:

$$a_{ijkl}^\delta = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в } \Omega, \\ \delta a_{ijkl} & \text{в } \Omega'. \end{cases}$$

Пусть внешние нагрузки, действующие на верхний слой, отсутствуют, $g = 0$. Тогда вариационная задача при каждом фиксированном δ примет следующий вид.

ЗАДАЧА 10. Найти функцию $(u_\delta, v_\delta) \in \bar{K}$ такую, что

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) + \delta \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(\bar{u} - u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(\bar{v} - v_\delta) \geq 0$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{K}$. (25)

Теорема 4. В семействе задач типа 10 можно осуществить предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя поочередно функции $(2u_\delta, 2v_\delta)$ и $(0, 0)$ вместо тестовой в (25), получим

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) + \delta \int_{\Omega'} \sigma(u_\delta) \varepsilon(u_\delta) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f u_\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) = 0. \quad (26)$$

Добавим в (26) слагаемые $\pm \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2$, где α — положительный малый параметр. Тогда, учитывая цепочку неравенств, справедливую при $\delta > \delta_0$:

$$\frac{1}{\delta} \int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) + \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2 \geq \frac{1}{\delta} \left(\int_{\omega} p(v_\delta) \varepsilon(v_\delta) + \alpha \int_{\gamma_a} (v_\delta)^2 \right) \geq \frac{1}{\delta} C_{16} \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2}^2,$$

получим оценки, равномерные по $\delta \in (\delta_0, \infty)$:

$$\|u_\delta\|_{H_{\partial\Omega\gamma_c}^1(\Omega_{\gamma_c})^2} \leq C_{17}, \quad \frac{1}{\delta} \|v_\delta\|_{H^1(\omega)^2}^2 \leq C_{18}, \quad \|u_\delta\|_{H^1(\Omega')^2}^2 \leq C_{19}/\delta.$$

Основываясь на установленных оценках, заключаем, что при $\delta \rightarrow \infty$ выполняются следующие сходимости:

$$\begin{aligned} u_\delta &\rightarrow u_\infty \quad \text{слабо в } H_{\partial\Omega\gamma_c}^1(\Omega_{\gamma_c})^2, \\ u_\delta &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } H^1(\Omega')^2, \\ \frac{1}{\sqrt{\delta}} v_\delta &\rightarrow v_\infty \quad \text{слабо в } H^1(\omega)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим множество вида $K_\infty = \{\bar{u} \in H_{\partial\Omega\gamma}^1(\Omega_{\gamma_c})^2 \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c\}$. Выберем такую функцию $\bar{u} \in K_\infty$, что $\bar{u} = \bar{v}$ на $\gamma_a \cup \gamma_b$ и $\bar{u}^- = \bar{v}$ на γ_c , $\bar{v} \in H^1(\omega)^2$, и продолжим ее нулем в область Ω' , тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив эту функцию в качестве тестовой в (25), перейдем к пределу в задаче 10 при $\delta \rightarrow \infty$ на основе (27) и получим следующую формулировку предельной задачи.

ЗАДАЧА 11. Найти функцию $u_\infty \in K_\infty$ такую, что

$$\int_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_\infty) \varepsilon(\bar{u} - u_\infty) - \int_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_\infty) \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in K_\infty.$$

Предельная задача описывает равновесие упругой пластины с трещиной, выходящей на внешнюю границу. В смысле достаточно гладких решений задача 11 эквивалентна следующей дифференциальной задаче.

ЗАДАЧА 12. Найти функции $u_\infty = (u_{\infty 1}, u_{\infty 2})$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u_\infty)\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma &= f, \quad \sigma = A\varepsilon(u_\infty) \text{ в } \Omega_{\gamma_c}, \\ u_\infty &= 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \gamma, \quad \sigma\nu = 0 \text{ на } \gamma_b, \\ [u_{\infty\nu}] &\geq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu[u_{\infty\nu}] = 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0 \text{ на } \gamma_c. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача, описывающая равновесие двуслойной упругой конструкции с трещиной. Приведены дифференциальная и вариационная формулировки задачи, эквивалентные на классе гладких функций. С помощью метода фиктивных областей доказана разрешимость исследуемой задачи. Установлено, что при стремлении модулей упругости верхнего слоя к нулю решение предельной задачи равновесия описывает поведение упругой пластины с трещиной; при стремлении модулей упругости верхнего слоя к бесконечности предельная задача является задачей равновесия конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев при наличии трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. Khludnev A. M., Sokolowski J. Modelling and Control in Solid Mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1997.
3. Саврук М. П., Кравец В. С. Влияние подкрепляющих накладок на распределение напряжений в пластинах с трещинами // Прикл. механика. 1993. Т. 29, № 3. С. 48–55.
4. Землянова А. Ю., Сильвестров В. В. Задача о подкреплении пластины с вырезом при помощи двумерной накладки // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, № 1. С. 43–55.
5. Васильева Ю. О., Сильвестров В. В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. математика и механика. 2011. № 6. С. 1017–1037.
6. Khludnev A. M., Leugering G. R. Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusion // Z. Angew. Math. Mech. 2011. V. 91, N 2. P. 125–137.
7. Gaudiello A., Khludnev A. M. Crack on the boundary of two overlapping domains // Z. Angew. Math. Phys. 2010. V. 61, N 2. P. 341–356.
8. Пяткина Е. В. Оптимальное управление размером слоя в задаче о равновесии упругих тел с налегающими областями // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 75–84.
9. Рудой Е. М., Казаринов Н. А., Слесаренко В. Ю. Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 77–90.
10. Хлуднев А. М. О равновесии двуслойной упругой конструкции с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 144–153.
11. Freddi L., Roubicek T., Zanini C. Quasistatic delamination of sandwich-like Kirchhoff—Love plates // J. Elast. 2013. V. 113. P. 219–250.
12. Пяткина Е. В. Контактная задача для двух пластин одинаковой формы, склеенных вдоль одного берега трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 79–92.

13. Попова Т. С. Задача о контакте двух вязкоупругих пластин // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, № 2. С. 60–92.
14. Khludnev A. M., Tani A. Unilateral contact problems for two inclined elastic bodies // Europ. J. Mech. A/Solids. 2008. V. 27, N 3. P. 365–377.
15. Неустроева Н. В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.
16. Неустроева Н. В. Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 51–64.
17. Ротанова Т. А. О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 107–118.
18. Степанов В. Д., Хлуднев А. М. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1350–1364.
19. Попова Т. С. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини для вязкоупругих тел // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 1. С. 105–121.
20. Алексеев Г. В., Хлуднев А. М. Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 2. С. 15–29.
21. Лазарев Н. П. Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жестким препятствием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 1. С. 91–104.
22. Николаева Н. А. Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа — Лява // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 78–90.
23. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 10 июля 2019 г.

После доработки 10 июля 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Фанкина Ирина Владимировна
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, 15
630090 г. Новосибирск
E-mail: fankina.iv@gmail.com