Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. V. Firsov, A. N. Prokudin, A. A. Burenin, Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Volume 22, Number 4, 121–133

DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.412>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.147.182.235

April 26, 2023, 08:28:22

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ*)

С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин, А. А. Буренин

Изучается процесс производства необратимых деформаций во вращающемся цилиндре, изготовленном из материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Принимается, что до достижения заданной предельной угловой скорости цилиндр с жестким включением вращается ускоренно, а после замедленно. За счет изменяющихся сил инерции необратимые деформации первоначально растут в форме деформаций ползучести, а с увеличением угловой скорости вращения и выхода напряженных состояний на поверхность текучести зарождается и развивается область пластического течения. После возникает разгружающая упругопластическая граница: область течения при продвижении данной граничной поверхности по объему уменьшается. Упругопластические границы оказываются местом, где включается (или отключается) механизм быстрого и интенсивного производства необратимых деформаций — пластическое течение. Приводятся и обсуждаются результаты расчетов изменяющихся со временем деформаций и напряжений, включая остаточные напряжения и их релаксации.

Ключевые слова: вращение цилиндра, малые деформации, вязкопластичность, ползучесть, плоская деформации, обобщенная плоская деформация, плоское напряженное состояние.

DOI 10.33048/sivjim.2019.22.412

ВВЕДЕНИЕ

Расчеты напряжений во вращающихся дисках и валах относятся к классическим задачам механики деформируемых твердых тел и включаются в монографии и учебники [1–6]. Так, С. П. Тимошенко впервые предложил рассчитывать распределения напряжений в форме решения соответствующей краевой задачи теории упругости [4]. Для упругих тел данную задачу можно считать принципиально решенной после того, как А. И. Лурье получил общее решение этой задачи с произвольной зависимостью упругого потенциала от инвариантов тензора конечных деформаций [5]. Необратимое деформирование материала вращающегося цилиндра в рамках жесткопластического анализа рассмотрел впервые А. Надаи [6], а в условиях ползучести Ю. Н. Работнов [2]. Упругопластическое деформирование впервые было рассмотрено в [7], но построенное решение, как позже было показано [8], имело неисправимый изъян, заключающийся в том, что не обеспечивалась непрерывность перемещений на упругопластической границе. В отечественной учебно-методической литературе последнее обстоятельство называют «ошибкой Шевченко» [9]. Проявляется такая ошибка в попытках получить решение упругопластических задач в скоростях без должного отслеживания выполнения требования непрерывности перемещений на упругопластических границах. Позднее различные задачи об упругопластическом деформировании вращающихся цилиндров и дисков рассматривались

*) Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-00414-19-00.

неоднократно [10–13]. В [14–16] изучались необратимые деформации в цилиндре в качестве следствия его вращения с учетом не только упругопластических, но и вязких свойств материала.

Здесь рассмотрим модельную задачу, наделив материал вращающегося с переменной угловой скоростью цилиндра с жестким включением упругими, вязкими и пластическими свойствами так, чтобы вязкость проявлялась всегда и всюду в форме деформаций ползучести, включая также области возникающего пластического течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть слой материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами занимает область, ограниченную круговыми цилиндрическими поверхностями $r = R_1$ и $r = R_2$, $R_2 > R_1$. Рассмотрим случаи, когда такой слой длинный (бесконечно длинный) либо длина его является малой. Это позволит рассматривать одномерный случай деформирования: плоское деформированное и плоское напряженное состояние соответственно. Область $r < R_1$ полагается абсолютно жесткой. Полагаем, что выбранный таким способом цилиндр с центральным жестким включением вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. При этом $\omega(0) = 0$ и первоначально цилиндр вращается ускоренно до достижения некоторой наибольшей скорости $\omega_{\max}$, после чего замедленно, до полной остановки. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) одномерность процесса деформирования за счет вращения цилиндра (или диска) означает, что единственной независимой переменной оказывается r . Далее эту координату будем использовать в безразмерной форме:

$$\xi = r/R_2, \quad \xi_0 = R_1/R_2, \quad 0 < \xi_0 \leq \xi \leq 1.$$

Деформации во вращающемся теле считаем малыми и складывающимися из обратимых и необратимых. Ненулевыми в рассматриваемом случае будут только компоненты d_{rr} , $d_{\varphi\varphi}$ и d_{zz} тензора полных деформаций:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\xi}, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz}. \quad (1)$$

Здесь e_{rr} , $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz} — компоненты тензора обратимых (упругих) деформаций; p_{rr} , $p_{\varphi\varphi}$, p_{zz} — необратимые деформации; $u = u_r/R_2$ — безразмерное перемещение. Обратимые деформации задают напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} . В случае плоских деформируемых состояний эти зависимости запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= \sigma_{rr}/\sigma_\tau = (\alpha + 2\beta)(u, \xi - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_\tau = \alpha(u, \xi - p_{rr}) + (\alpha + 2\beta)(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + \alpha(d_{zz} - p_{zz}), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \sigma_{zz}/\sigma_\tau = \alpha(u, \xi - p_{rr}) + \alpha(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}) + (\alpha + 2\beta)(d_{zz} - p_{zz}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_τ — предел текучести; $\alpha = \lambda\sigma_\tau^{-1}$, $\beta = \mu\sigma_\tau^{-1}$; λ , μ — параметры Ламе в законе Гука для упругой среды.

В случае плоских напряженных состояний (в случае диска) зависимости напряжений от обратимых деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{2\alpha}{\alpha + 2\beta}(u, \xi + \xi^{-1}u - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + 2\beta(u, \xi - p_{rr}), \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \frac{2\alpha}{\alpha + 2\beta}(u, \xi + \xi^{-1}u - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + 2\beta(\xi^{-1}u - p_{\varphi\varphi}), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматривая цилиндр бесконечно длинным, в (2) принимаем $d_{zz} = 0$, что и задает плоские деформированные состояния. Иногда рассматривают случай так называемых обобщенных плоских состояний, когда d_{zz} находят согласно принимаемому ограничению на распределение σ_{zz} :

$$2\pi \int_{\xi_0}^1 \xi \tilde{\sigma}_{zz} d\xi = 0. \quad (4)$$

Подстановка $\tilde{\sigma}_{zz}$ из (2) в (4) приводит к следующей зависимости:

$$d_{zz} = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \xi \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) + p_{zz} \right) d\xi - \frac{2\alpha}{\alpha + 2\beta} \frac{u(1) - \xi_0 u(\xi_0)}{1 - \xi_0^2}. \quad (5)$$

Будем считать угловое ускорение малым настолько, чтобы имела возможность пренебречь силой инерции, определяемой вращательным ускорением. Это упрощающее предположение позволяет рассматриваемой задаче оставаться одномерной. Единственное уравнение равновесия примет в таком случае форму

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\xi} = -\xi \psi^2, \quad \psi^2 = \frac{R_2^2}{\sigma_\tau} \rho \omega^2, \quad (6)$$

где ρ — плотность среды; ω — скорость вращения среды.

После подстановки в (6) компонент напряжений из (2) для случая плоских деформируемых состояний или обобщенных плоских деформированных состояний получаем дифференциальное уравнение для компоненты $u_r = u(\xi, \tilde{t})$ перемещений:

$$u_{,\xi\xi} + \xi^{-1} u_{,\xi} - \xi^{-2} u = 2\xi^{-1} \frac{\beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + p_{rr,\xi} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi \psi^2}{\alpha + 2\beta}. \quad (7)$$

В данном дифференциальном уравнении время t является независимым параметром, т. е. в любой фиксированный (рассматриваемый) момент времени уравнение (7) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Аналогично для случая плоских напряженных состояний, следуя (3) и (6), получим уравнение

$$u_{,\xi\xi} + \xi^{-1} u_{,\xi} - \xi^{-2} u = \frac{1}{2\xi} \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + p_{rr,\xi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p_{\varphi\varphi,\xi} - \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} \frac{\xi \psi^2}{4}. \quad (8)$$

2. МЕХАНИЗМ НАКОПЛЕНИЯ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматриваются два механизма накопления необратимых деформаций — пластичность и ползучесть. В нашем случае формулы для определения ненулевых компонент тензора необратимых деформаций примут вид

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^v, \quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^v, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p$ — скорости деформаций пластичности; $\varepsilon_{rr}^v, \varepsilon_{\varphi\varphi}^v, \varepsilon_{zz}^v$ — скорости деформаций ползучести. Если в рассматриваемой области напряжения не достигли предела текучести, то скорости деформаций пластичности равны нулю.

Для расчета скоростей деформации ползучести использовалась теория типа течения [2]. Рассмотрим ее наиболее простую и часто используемую вариацию — степенной закон Нортона. В качестве меры напряжений $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ возьмем интенсивность напряжений. В итоге получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma^2 &= \frac{3}{2}((\sigma_{rr} - \sigma)^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma)^2), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (10)$$

где B и n — параметры ползучести для среды.

Используя соотношения (10), а также введя безразмерную переменную по времени $\tilde{t} = t/t^*$, где t^* — продолжительность всего процесса деформирования, получим в итоге соотношения для определения скорости деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^v &= \varepsilon_{rr}^v t^* = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^v = \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^v &= \frac{3}{2} \tilde{B} n \tilde{\Sigma}^{n-2} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{B} = \sigma_\tau^{n-1} B t^*, \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma / \sigma_\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Скорости деформаций пластического течения так же, как и скорости деформаций ползучести, определяются уровнем и распределением по деформируемому телу напряжений. В качестве пластического потенциала принимаем обобщенный потенциал Мизеса в форме

$$\begin{aligned} f(\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{zz}^p) &= (\sigma_{rr} - \sigma - \eta \varepsilon_{rr}^p)^2 \\ &+ (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma - \eta \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma - \eta \varepsilon_{zz}^p)^2 - \frac{2}{3} \sigma_\tau^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Пластическое течение происходит в условиях $f = 0$. Ассоциированный закон пластического течения запишем в виде

$$\varepsilon_{rr}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad \varepsilon_{zz}^p = \theta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \quad \theta > 0. \quad (13)$$

После подстановки (12) в (13) получим выражение для скоростей. Для нахождения неизвестного коэффициента θ подставим полученные скорости в (12). Подставив найденное значение коэффициента в формулы скорости пластического течения, в итоге получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rr}^p &= \varepsilon_{rr}^p t^* = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}), \\ \tilde{\varepsilon}_{zz}^p &= \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{\tilde{\Sigma} - 1}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\tau t^*}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует отметить, что при использовании модели вязкопластичности интенсивности напряжений могут принимать значения больше предела текучести $\tilde{\Sigma} > 1$. При этом мы по-прежнему будем находиться на поверхности нагружения (12). Из-за ненулевых значений скоростей пластической деформации (14) при $\tilde{\Sigma} > 1$ также будет происходить смещение поверхности нагружения (12), которая при уменьшении скоростей до нуля вернется в положение $\tilde{\Sigma} = 1$.

3. ПАРАМЕТРЫ РАСЧЕТА

Данная система уравнений в частных производных разрешалась методом конечных разностей. Полученная на таком пути конечно-разностная схема расчетов тестировалась решениями частных задач данного класса, где имеются аналитические решения. К последним относятся задачи об упругом деформировании [14], установившемся вязкопластическом течении [15] и установившейся ползучести [16].

Функцию $\psi(t)$ из (6), обозначающую скорость вращения, зададим в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{\max}\left(1 - \cos\left(\pi\frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_1}\right)\right), & 0 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_1; \\ \psi_{\max}, & \tilde{t}_1 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_2; \\ \frac{1}{2}\psi_{\max}\left(1 + \cos\left(\pi\frac{\tilde{t} - \tilde{t}_2}{\tilde{t}_3 - \tilde{t}_2}\right)\right), & \tilde{t}_2 \leq \tilde{t} < \tilde{t}_3; \\ 0, & \tilde{t}_3 \leq \tilde{t} \leq 1, \end{cases} \quad (15)$$

где $\tilde{t} = t/t^*$ — безразмерное время; $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$ — назначаемые безразмерные моменты времени. Для удобства дальнейшего обращения дадим названия приведенным временным интервалам. Первая фаза: $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_1$ — нагрузка; вторая фаза: $\tilde{t}_1 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_2$ — выдержка; третья фаза: $\tilde{t}_2 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_3$ — разгрузка; четвертая фаза: $\tilde{t}_3 < \tilde{t} \leq 1$ — релаксация.

Таким образом, параметрами задачи наряду с теми, что задают конструктивную геометрию ξ_0 и свойства материала $\alpha, \beta, \tilde{\eta}, \sigma_\tau, \tilde{B}, n$, оказываются и отнесенные к t^* безразмерные, моменты времени $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3$. При этом $\psi_{\max}$ играет роль интенсивности задаваемого воздействия на материал, а t^* — временное распределение такого воздействия. Остановимся на влиянии последних на эволюцию напряженно-деформированных состояний и итоговое распределение остаточных напряжений.

При проведении расчетов постоянные материала и геометрические размеры зададим следующие:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,02 \text{ м}; \quad R_2 = 0,1 \text{ м}; \quad \rho = 7700 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 240,942 \text{ ГПа}; \\ \mu &= 76,087 \text{ ГПа}; \quad B = 4,1 \cdot 10^{-22} \text{ с}^{-1} \cdot \text{Па}^{1-n}; \\ n &= 3; \quad \sigma_\tau = 30 \text{ МПа}; \quad \eta = 84 \text{ ГПа}. \end{aligned}$$

Такие параметры отвечают некоторым конструктивным маркам стали. Безразмерные параметры в этом случае примут значения

$$\xi_0 = 0,2; \quad \alpha = 8031,4; \quad \beta = 2536,2; \quad \tilde{B} = 3,69 \cdot 10^{-7} t^*; \quad \tilde{\eta} = 2800/t^*.$$

Временные назначаемые параметры принимаем следующими:

$$\tilde{t}_1 = 0,015; \quad \tilde{t}_2 = 0,965; \quad \tilde{t}_3 = 0,98.$$

Протяженность процесса менялась от одной секунды до десяти часов с промежуточными значениями $t^* = 10 \text{ с}$, $t^* = 1 \text{ мин}$, $t^* = 10 \text{ мин}$ и $t^* = 1 \text{ час}$.

4. ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЦИЛИНДР С ОСЕВЫМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть часть $r < R_1$ ($\xi < \xi_0$) вращающегося цилиндра является недеформируемой (жесткой). Граничными условиями в этом случае будут требования, чтобы

$$u(\xi_0, \tilde{t}) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rr}(1, \tilde{t}) = 0. \quad (16)$$

Расчеты показывают, что пластическое течение в деформируемой части материала цилиндра неизменно начинается с граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Скорость вращения, при которой впервые выполняется условие пластического течения, вычисляется из соотношения $\tilde{\Sigma} = 1$, следующего из (9)–(14). Значения такой скорости оказываются меньше тех значений, которые получаются в том случае, когда ползучесть материала не учитывается, что, впрочем, предсказуемо, так как ползучесть снижает уровень напряженных состояний.

При выбранных параметрах материала и геометрии в составе цилиндра получаем, что для обеспечения начала пластического течения необходимо принять: $\psi_{\max} > 2,2$ в случае плоских деформируемых состояний; $\psi_{\max} > 1,82$ — в случае обобщенных плоских деформируемых состояний; $\psi_{\max} > 1,66$ — при плоских напряженных состояниях. Далее в расчетах в качестве $\psi_{\max}$ принимались значения больше приведенных с той целью, чтобы область пластического течения заведомо присутствовала, а также чтобы наблюдалось повторное пластическое течение там, где это возможно. В случае плоских деформируемых состояний принималось $\psi_{\max} = 4$; обобщенных плоских $\psi_{\max} = 2$; при плоских напряженных $\psi_{\max} = 1,7$. Рассмотрим три данных случая.

4.1. Плоские деформируемые состояния.

Пластичность. Для сравнения первоначально отметим основные качественные особенности решения задачи без учета ползучести материала. Примем в соотношении (9) скорости деформаций ползучести равными нулю: $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$.

Пусть $t^* = 1$ час. При указанных параметрах задачи область пластического течения развивается от внутренней границы деформируемого слоя $\xi = \xi_0$. Упругопластическая граница продвигается к внешней граничной поверхности $\xi = 1$. При продолжающемся увеличении угловой скорости вращения уже на внешней граничной поверхности $\xi = 1$ зарождается и продвигается внутрь деформируемого слоя новая упругопластическая граница. Со временем они сталкиваются, и область пластического течения охватывает весь деформируемый цилиндрический слой. Впоследствии интенсивности напряжений плавно снижаются за счет накопления необратимых деформаций и в итоге достигают значения $\tilde{\Sigma} = 1$. На этой поверхности, располагающейся в районе места соединения упругопластических границ, рождаются одновременно две разгружающие упругопластические границы, быстро достигающие границ слоя $\xi = \xi_0$ и $\xi = 1$.

При разгрузке, когда угловая скорость вращения уменьшается, происходит повторное (обратное) пластическое течение. Оно возникает на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$ и развивается, охватывая область, примыкающую к этой граничной поверхности. Исчезновение области пластического течения связано с разгружающей упругопластической границей, возникающей в некоторый последующий момент времени в месте остановившейся первоначальной упругопластической границы и распространяющейся к границе $\xi = \xi_0$ деформируемого материала.

Отмечаемые качественные особенности решения являются результатами расчетов, когда $t^* = 1$ час. Они так же соответствуют расчетам для случая $t^* = 10$ часов. В случаях $t^* = 10$ мин, $t^* = 1$ мин и $t^* = 10$ с наблюдаются небольшие отличия при повторном пластическом течении. В случае $t^* = 1$ с разгружающие упругопластические границы образуются только на стадии разгрузки, что приводит к меньшим значениям накопленных необратимых деформаций и соответственно к распространению повторного пластического течения на меньшую область. Итоговые распределения интенсивностей напряжений представлены на рис. 1.

При больших значениях $\psi_{\max}$ при повторном пластическом течении может возникнуть вторая упругопластическая граница, движущаяся от внешней граничной поверхности $\xi = 1$ внутрь области. Также при дальнейшем увели-

Рис. 1. Распределение интенсивности напряжений в задаче плоской деформации в момент максимального распространения области повторного пластического течения при снятии нагрузки;
 Σ^{pl} — интенсивности напряжений без учета ползучести;
 Σ^{10m} — интенсивности напряжений с учетом ползучести при $t^* = 10$ мин, Σ^{1h} — 1 час, Σ^{10h} — 10 часов

чении $\psi_{\max}$ наблюдается столкновение двух границ, и повторное пластическое течение распространяется на весь деформируемый слой.

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в этом случае. Примем, что скорости деформаций ползучести в формуле (9) определяются из соотношений (11).

При случаях $t^* \leq 10$ мин в условиях активного процесса, когда угловая скорость увеличивается, качественные и количественные результаты практически совпадают с предыдущим случаем. Значения деформаций и напряжений остаются близкими к рассчитанным ранее. Но уже на стадии выдержки ($\tilde{t}_1 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_2$), когда $\psi = \psi_{\max}$, в месте, рядом с тем, где произошло слияние продвигавшихся навстречу друг другу упругопластических границ, происходит разрыв области пластического течения. Зарождаются две разгружающие упругопластические границы, движущиеся в противоположные стороны. При выходе разгружающих упругопластических границ на граничные поверхности цилиндрического слоя пластическая область исчезает, и течение прекращается. В отличие от предыдущего случая этот эффект наблюдается раньше. Стоит отметить, что в случае $t^* = 1$ с ползучесть практически не оказывает влияния в течение всего процесса.

Если увеличить время t^* до 1 часа, то возникающие на границах слоя упругопластические границы при заданных параметрах задачи уже не сталкиваются, оставляя область, где отсутствует пластическое течение. Это связано с уменьшением уровня напряжений за счет их релаксации. Возникающие на местах остановки этих упругопластических границ новые разгружающие упругопластические границы, продвигаясь обратно к границам слоя, приводят к исчезновению пластических областей. Происходит это при первой стадии нагрузки ($\tilde{t} < \tilde{t}_1$). На момент начала второй стадии выдержки пластическое течение в среде уже практически отсутствует. Если $\tilde{t} = 10$ часов, то успевает образоваться только одна пластическая область в окрестности граничной поверхности $\xi = \xi_0$, которая впоследствии подобным же образом исчезает за счет возникновения в месте остановки упругопластической границы новой разгружающей упругопластической границы, которая движется к граничной поверхности $\xi = \xi_0$ и достигает ее еще до окончания стадии нагрузки.

Следует отметить, что в момент начала разгрузки $\tilde{t} = \tilde{t}_2$ интенсивности напряжений по всему деформируемому слою оказываются практически одинаковыми. Однако значения их разные при разных t^* . При 10 секундах интенсивности напряжений по слою примерно одинаковы и $\tilde{\Sigma} = 0,95$; при одной минуте $\tilde{\Sigma} = 0,7$; при 10 минутах $\tilde{\Sigma} = 0,2$; при одном часе $\tilde{\Sigma} = 0,04$, и, наконец, при

10 часах $\tilde{\Sigma} = 0,004$. Подобные значения указывают на степень релаксации напряжений за счет процесса ползучести. С другой стороны, максимальные изменения в накопленных необратимых деформациях (достигаемые на поверхности $\xi = \xi_0$), несмотря на такие значительные отличия в интенсивностях напряжений, отличаются не намного (не более чем в два раза), что показано на рис. 2.

Рис. 2. Распределение компонент тензора необратимых деформаций в задаче плоской деформации в случае $t^* = 10$ часов в момент времени $\tilde{t} = \tilde{t}_2$ при максимальном значении необратимых деформаций;

p_{ij}^{pl} — необратимые деформации в случае решения задачи без учета ползучести, p_{ij}^{cr} — с учетом ползучести

Во всех случаях с уменьшением скорости вращения наблюдается повторное (обратное) пластическое течение. Оно первоначально возникает у граничной поверхности $\xi = \xi_0$ деформируемого слоя, и область повторного пластического течения тем больше, чем большим выбрано t^* . Впоследствии область повторного пластического течения может развиваться и от свободной границы слоя $\xi = 1$ (в случаях $t^* = 10$ мин и $t^* = 1$ час). Когда $t^* = 10$ часов, то возникающая при $\xi = \xi_0$ упругопластическая граница, распространяясь по материалу, успевает остановиться прежде, чем на свободной границе $\xi = 1$ могла бы зародиться другая область повторного пластического течения. В месте ее остановки возникает новая, теперь разгружающая упругопластическая граница, распространяющаяся в направлении поверхности $\xi = \xi_0$. При достижении этой поверхности область повторного пластического течения исчезает. При дальнейшей выдержке при $\psi = 0$ напряжения продолжают релаксировать. Также постепенно уменьшаются значения необратимых деформаций и перемещений. На рис. 1 представлены распределения интенсивностей напряжений в моменты времени, когда области повторного пластического течения достигали своих максимальных размеров.

4.2. Обобщенные плоские деформируемые состояния.

Пластичность. Исключим влияние ползучести, полагая $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$. Рассмотрим случай $t^* = 1$ час. Область пластического течения впервые зарождается на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Упругопластическая граница продвигается к внешней граничной поверхности $\xi = 1$, но она останавливается, не доходя до границы. Впоследствии интенсивности напряжений плавно снижаются во всей области пластического течения и достигают значения $\tilde{\Sigma} = 1$. В этот момент на месте остановившейся упругопластической границы зарождается разгружающая упругопластическая граница, распространяющаяся внутрь деформируемого слоя, и быстро достигает внутренней границы слоя $\xi = \xi_0$.

При разгрузке не появляется область повторного пластического течения. Следует отметить, что даже увеличение значения $\psi_{\max}$ не позволяет добиться появления повторного пластического течения. Но при увеличении $\psi_{\max}$ область пластического течения может распространиться на весь цилиндрический слой. Однако в отличие от случая плоских деформированных состояний в слое после распространения упругопластической границы до свободной границы слоя $\xi = 1$ не наблюдается уменьшения интенсивности напряжений. Они остаются $\Sigma > 1$ во всей области пластического течения, что, в свою очередь, означает, что пластическое течение в слое не останавливается. При больших значениях t^* это приводит к быстрому накоплению больших необратимых деформаций, что непозволительно для рассматриваемой модели.

Отмечаемые качественные особенности характерны для всех рассматриваемых значений t^* , за исключением случая $t^* = 1$ с. В этом случае граница пластического течения не успевает распространиться до своего максимального положения до начала стадии разгрузки, что сказывается на накопленных необратимых деформациях и соответственно приводит к меньшим значениям остаточных напряжений. Также отметим, что в случае $t^* = 10$ с разгружающая упругопластическая граница появляется только на стадии разгрузки ($\tilde{t}_2 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_3$). Однако результаты расчетов в остальном совпадают с предыдущими результатами. Интенсивности напряжений в моменты времени $\tilde{t}_2$ и $\tilde{t}_4$ приведены на рис. 3.

Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений в задаче обобщенной плоской деформации при $t^* = 1$ час в моменты времени $\tilde{t}_2$ и $\tilde{t}_4$; Σ^{pl} — без ползучести, Σ^{cr} — с учетом ползучести

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в данном случае. Скорости деформаций ползучести зададим в соответствии с (11). Зарождение области пластического течения также происходит на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Упругопластическая граница продвигается в направлении свободной граничной поверхности $\xi = 1$. Однако она останавливается раньше, чем в рассмотренном ранее случае. Причем чем больше рассматриваемый промежуток времени, тем на меньшую область распространяется пластическое течение, за исключением случая $t^* = 1$ с, когда пластическая граница не успевает достигнуть своего максимального положения до начала стадии разгрузки.

Также после остановки упругопластической границы на ее месте рождается разгружающая упругопластическая граница и движется в направлении внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$, но останавливается, не достигнув внутренней граничной поверхности. После остановки разгружающей упругопластической границы напряжения во всем слое перестают изменяться. В оставшейся области пластического течения интенсивности напряжений

$\tilde{\Sigma} > 1$, что приводит к постоянному пластическому течению, что в свою очередь, приводит к очень интенсивному накоплению необратимых деформаций (рис. 4) и увеличению перемещений. В случаях $t^* = 1$ мин и $t^* = 10$ с разгружающая граница не успевает остановиться до начала стадии разгрузки.

Рис. 4. Распределение компонент тензора остаточных необратимых деформаций в задаче обобщенной плоской деформации в случае $t^* = 1$ час;

p_{ij}^{pl} — необратимые деформации в случае решения задачи без учета ползучести, p_{ij}^{cr} — с учетом ползучести

4.3. Плоские напряженные состояния.

ПЛАСТИЧНОСТЬ. Исключим влияние ползучести: $\varepsilon_{rr}^v = \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \varepsilon_{zz}^v = 0$. Рассмотрим случай $t^* = 1$ час. При указанных параметрах задачи область пластического течения зарождается на внутренней граничной поверхности слоя $\xi = \xi_0$ и движется в сторону свободной границы $\xi = 1$. В определенный момент времени в окрестности внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$ происходит разрыв области пластического течения. В месте разрыва рождаются две разгружающие упругопластические границы, одна из которых движется в направлении внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$, в то время как вторая движется в направлении исходной упругопластической границы внутрь деформируемого слоя. В это время исходная граница продолжает свое движение к свободной границе $\xi = 1$. В определенный момент времени движение всех упругопластических границ приостанавливается и происходит плавное уменьшение интенсивностей напряжений внутри пластических областей до значения $\tilde{\Sigma} = 1$. При достижении данного значения на месте исходной упругопластической границы рождается разгружающая граница, и происходит постепенное схлопывание двух пластических областей (две разгружающие границы движутся навстречу друг другу, в то время как третья движется к внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$). В итоге на месте первоначального разрыва области пластического течения интенсивности напряжений принимают немного меньшее значение, чем в окрестности области разрыва. Также подобное поведение приводит к более интенсивному накоплению необратимых деформаций в окрестности внутренней границы по сравнению с местом, где произошел разрыв области пластического течения.

При разгрузке не появляется области повторного (обратного) пластического течения. При увеличении максимальной скорости вращения $\psi_{\max}$ первичная упругопластическая граница продвигается все ближе к свободной граничной поверхности $\xi = 1$. При больших значениях максимальной скорости, когда упругопластическая граница достигает свободной границы, при движении этой границы все еще наблюдается образование разрыва в области пластического течения. Однако спустя некоторое время образовавшиеся разгружающие упругопластические границы останавливаются, и на их месте зарождаются нагру-

жающие упругопластические границы, которые начинают движение навстречу друг другу. Спустя некоторое время эти две упругопластические границы сталкиваются, и разделенные ранее пластические области снова соединятся вместе. При дальнейшем увеличении максимальной скорости вращения $\psi_{\max}$ образование данного разрыва не наблюдается. При этом хотя необратимые деформации принимают большие значения, но в них уже не наблюдается такого резкого перепада в районе внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. При подобных значениях $\psi_{\max}$ в деформируемом слое накапливаются значительные необратимые деформации, однако повторного пластического течения по прежнему не наблюдается.

Распределения интенсивностей напряжений в конце стадии выдержки ($\tilde{t} = \tilde{t}_2$) и в конце рассматриваемого процесса деформирования ($\tilde{t} = \tilde{t}_4$) приведены на рис. 5.

Рис. 5. Распределение интенсивности напряжений в задаче плоского напряженного состояния при $t^* = 1$ час в моменты времени $\tilde{t}_2$ и $\tilde{t}_4$; Σ^{pl} — без ползучести, Σ^{cr} — с учетом ползучести

Ползучесть. Изучим влияние ползучести материала на его деформирование в данном случае. Зададим скорости деформаций ползучести в соответствии с формулой (11). Как и в рассмотренном случае, упругопластическая граница рождается на внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$ и продвигается в сторону свободной границы $\xi = 1$. Однако она останавливается значительно раньше, и на ее месте образуется разгружающая упругопластическая граница,двигающаяся в направлении внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Пройдя небольшое расстояние, она останавливается. С этого момента компоненты тензора напряжений перестают изменяться во всем деформируемом слое. Также при ползучести происходит перераспределение напряжений во время движения упругопластической границы. Это приводит к увеличению значений интенсивности напряжений $\tilde{\Sigma} > 1$ в области пластического течения, а в особенности в окрестности внутренней граничной поверхности $\xi = \xi_0$. Вследствие этого не наблюдается образования разрыва в области пластического течения. Также при $\tilde{\Sigma} > 1$ пластическое течение не останавливается до начала стадии разгрузки, что, в свою очередь, приводит к более интенсивному накоплению необратимых деформаций в этой области и быстрому росту перемещений. Таким образом, распределение необратимых деформаций в деформируемом слое имеет схожий характер независимо от того, учитываем мы деформации ползучести или нет. Сильное отличие заключается лишь в величине данных деформаций (рис. 6).

Рис. 6. Распределение компонент тензора остаточных необратимых деформаций в задаче плоского напряженного состояния в случае $t^* = 1$ час;
 p_{ij}^{pl} — необратимые деформации в случае решения задачи без учета ползучести, p_{ij}^{cr} — с учетом ползучести

Такое поведение характерно для случая $t^* = 1$ час. При $t^* = 10$ мин до начала стадии разгрузки не успевает завершиться процесс перераспределения напряжений в деформируемом слое. При $t^* = 1$ мин разгружающая граница только успевает подойти к своей конечной позиции. При меньших значениях t^* не успевает образоваться даже разгружающая упругопластическая граница.

При разгрузке не наблюдается повторного (обратного) пластического течения. После разгрузки интенсивности напряжений при ползучести меньше таковых в задаче без учета ползучести. При дальнейшей выдержке при $\psi = 0$ происходит постепенная релаксация напряжений. Необратимые деформации и перемещения при этом остаются неизменными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что деформации ползучести приводят к значительному снижению напряжений в цилиндрическом слое со значительными ограничениями на перемещения (в нашем случае это задача плоской деформации цилиндрического слоя с жестким включением) при ненулевых напряжениях, т. е. как в условиях нагружения, так и при разгрузке. При нагружке необратимые деформации и перемещения после достижения определенного значения практически перестают расти, в то время как при разгрузке их значения постепенно уменьшаются. Однако с увеличением продолжительности процесса увеличивается область повторного пластического течения во время снятия приложенной нагрузки.

В цилиндрическом слое с большей степенью свободы по перемещениям при нагрузке ползучесть приводит к небольшому перераспределению напряжений в слое (их оттоку от свободной границы слоя $\xi = 1$ к внутренней границе $\xi = \xi_0$) и непрерывному росту перемещений и необратимых деформаций. Причем в случае небольших увеличений максимальной скорости вращения сверх критической (при которой начинается пластическое течение) происходит резкое увеличение скорости роста необратимых деформаций. Что касается релаксации напряжений после снятия нагрузки, оно происходит, но с малой скоростью. При этом перемещения остаются, можно сказать, неизменными, когда необратимые деформации еле заметно уменьшаются. Следует отметить, что перераспределение напряжений при ползучести в таких задачах приводит к уменьшению области пластического течения. Также увеличиваются интенсивности напряжений на внутренней границе ($\tilde{\Sigma}$ хоть не сильно, но все же

больше единицы), что приводит к постоянному протеканию пластического течения в такой области. В то время как без учета ползучести, при использовании модели вязкопластичности, интенсивность напряжений со временем достигает предела текучести ($\Sigma = \sigma_T$ или $\tilde{\Sigma} = 1$), и пластическое течение прекращается (за исключением случая, когда пластическое течение распространяется на всю область).

ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1979.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
5. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
6. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. V. 1. N. Y.: McGraw Hill, 1950.
7. Hodge P. G., Balaban M. Elastic-plastic analysis of a rotating cylinder // Internat. J. Mech. Sci. 1962. V. 4, N 6. P. 465–476; DOI 10.1016/S0020-7403(62)80008-3
8. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Z. Angew. Math. Phys. 1984. V. 35, N 5. P. 601–617; DOI 10.1007/BF00952107
9. Ивлев Д. Д. Три дискуссии по механике // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2007. Т. 54, № 4. С. 115–123.
10. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mech. 1983. V. 50, N 1–2. P. 1–8; DOI 10.1007/BF01170437
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // Internat. J. Solids and Structures. 1991. V. 27, N 11. P. 1461–1476; DOI 10.1016/0020-7683(91)90042-E
12. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Internat. J. Engng. Sci. 1997. V. 35, N 3. P. 253–267; DOI 10.1016/S0020-7225(96)00085-7
13. Kamal S. M., Dixit U. S., Roy A., Liu Q., Silberschmidt V. V. Comparison of plane-stress, generalized-plane-strain and 3D FEM elastic-plastic analyses of thick-walled cylinders subjected to radial thermal gradient // Internat. J. Mech. Sci. 2017. V. 131–132. P. 744–752; DOI 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.034
14. Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // Известия Алт. гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2018. Т. 102, № 4. С. 114–117; DOI 10.14258/izvasu(2018)4-21
15. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // Дальневосточный мат. журн. 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260.
16. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ. Сер. Механика предельного состояния. 2018. Т. 35, № 1. С. 63–73.

Поступила в редакцию 26 июня 2019 г.

После доработки 26 июня 2019 г.

Принята к публикации 5 сентября 2019 г.

Фирсов Сергей Викторович

Прокудин Александр Николаевич

Буренин Анатолий Александрович

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

ул. Металлургов, 1

681005 г. Комсомольск-на-Амуре

E-mail: firsov.s.new@yandex.ru; sunbeam_85@mail.ru; burenin@iacp.dvo.ru