Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Domnich, M. A. Artemov, O. Yu. Shishkina, On the boundary value problem for a model of nonisothermal flows of a non-Newtonian fluid, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 1, 58–69

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.106>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 17:15:13

УДК 517.958

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 А. А. Домнич^a, М. А. Артёмов^b, О. Ю. Шишкина^c

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, г. Воронеж 394018, Россия

E-mails: ^aandomnich@inbox.ru, ^bartemov_m_a@mail.ru, ^cshishkina_oyu@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.2019 г.; после доработки 05.12.2019 г.;
принята к публикации 05.12.2020 г.

Исследуются стационарная модель, описывающая течение неньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от скорости деформаций, и теплоперенос в ограниченной трёхмерной области. Рассматриваемая модель представляет собой связанную сильно нелинейную систему уравнений в частных производных относительно поля скоростей, температуры и давления. На границе области течения ставится условие прилипания и линейное краевое условие типа Робена для температуры. Дается операторная трактовка задачи. На основе свойств d -монотонных операторов и принципа неподвижной точки Лере — Шаудера доказано существование слабых решений при естественных допущениях относительно данных модели. Показано, что множество решений ограничено и замкнуто.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, теплоперенос, d -монотонные операторы, принцип неподвижной точки Лере — Шаудера, слабые решения, теорема существования.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.106

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается стационарная модель движения и теплопереноса в нелинейно-вязкой жидкой среде, целиком заполняющей ограниченную трёхмерную область Ω с непроницаемой неподвижной границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$:

$$\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \operatorname{Div}_{\mathbf{x}}[\nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|)\mathcal{E}(\mathbf{u})] + \nabla_{\mathbf{x}}\pi = \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - k \nabla_{\mathbf{x}}^2 T = g(\mathbf{x}, T) \quad \text{в } \Omega \quad (3)$$

при следующих краевых условиях:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = -\chi T \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость течения жидкости в точке $\mathbf{x}$ из области Ω , $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций с компонентами: $\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 3}$, $T(\mathbf{x})$ — температура, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, T)$ — внешние объёмные силы, действующие на жидкость, $\pi(\mathbf{x})$ — давление, $\nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) > 0$ — коэффициент вязкости, зависящий от второго инварианта тензора скоростей деформаций, $k > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\chi > 0$ — коэффициент теплообмена на

стенках сосуда Ω , $g(\mathbf{x}, T)$ — мощность тепловых источников, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$. Дифференциальные операторы $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$, $\operatorname{Div}_{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\mathbf{x}}$ и $\nabla_{\mathbf{x}}^2$ определены по формулам

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \operatorname{Div}_{\mathbf{x}} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_{i1}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_{i2}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_{i3}}{\partial x_i} \right)^T, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \frac{\partial \omega}{\partial x_3} \right)^T, \quad \nabla_{\mathbf{x}}^2 \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2},$$

где $\omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{U}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

В частном случае, когда предполагается, что вязкость среды постоянна, т. е. $\nu \equiv \nu_0$, и $\mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \equiv -\beta T \mathbf{g}$, где β — коэффициент температурного расширения, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, система (1)–(3) сводится к классическим стационарным уравнениям Навье — Стокса — Буссинеска. Принятая в работе реологическая модель, в которой вязкость является функцией скорости сдвига, применяется при изучении течений таких сред, как расплавы и растворы полимеров, суспензии, глинистые растворы, масляные краски и расплавы стали [1].

При заданных ν , $\mathbf{f}$, k , g , χ условимся называть граничную задачу (1)–(4) *задачей 1*. В рамках данной работы основной нашей целью является обоснование разрешимости задачи 1 в обобщённой (слабой) постановке. Доказательство теоремы существования проводится следующим образом. Сначала рассматривается вспомогательная система нелинейных уравнений с числовым параметром $\alpha \in [0, 1]$ и выводятся априорные оценки решений этой системы, не зависящие от выбора α . Затем даётся трактовка новой задачи в виде однопараметрического операторного уравнения и изучаются свойства возникающих при этом операторов; в частности, показано, что при разумных допущениях относительно исходных данных модели один из операторов является d -монотонным, а другой — вполне непрерывным. Это позволяет применить принцип неподвижной точки Лере — Шаудера и сделать вывод о существовании слабых решений задачи 1 в декартовом произведении соболевских пространств. Кроме того, установлено, что множество всех слабых решений ограничено и замкнуто в подходящих функциональных пространствах.

Основополагающие математические результаты для различных типов моделей движения нелинейно-вязких сред получены в [1], где рассматриваются исключительно изотермические течения (стационарные и нестационарные), а в качестве методов построения решений соответствующих краевых и начально-краевых задач используются схемы Галёркина, Ритца и Фаэдо — Галёркина. Эти результаты получили своё развитие на случай уравнений с нелокальными граничными условиями, согласно которым жидкость проскальзывает по непроницаемой твёрдой границе [2], а также при изучении задач оптимального граничного управления течением нелинейно-вязкой жидкости [3] и моделей вязкопластических сред Бингама [4, 5].

Отметим также, что имеется обширная литература, посвящённая математическому анализу уравнений движения и теплопереноса в жидкости с постоянной вязкостью $\nu = \text{const}$. Упомянем здесь лишь некоторые работы в этом направлении, отсылая интересующегося читателя к библиографиям в приведённом ниже списке литературы. В [6] рассматривается линейаризованная задача о конвекции несжимаемой вязкой жидкости, протекающей через ограниченный сосуд. Вопросы оптимизации и управления течением теплопроводной жидкости изучаются в [7–11]. Задача Коши для эволюционной системы уравнений Эйлера — Буссинеска, описывающей потоки идеальной ($\nu \equiv 0$) неравномерно нагретой жидкости, исследована в [12]. Стационарная модель неизоотермического течения слабоконцентрированного водного раствора полимеров рассматривается в [13].

2. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 1 И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде всего введём ряд обозначений и функциональных пространств, необходимых для описания решений задачи 1. Как обычно, $\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty)$ и $\mathbb{R}^n$ обозначает n -мерное евклидово пространство. Мы будем использовать пространства Лебега $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, а также пространство Соболева $H^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W_2^1(\Omega)$. Соответствующие классы вектор-функций $\mathbf{w}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ обозначаются теми же символами, но с применением жирного шрифта, т. е.

$$\mathbf{L}^p(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega),$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

При решении задачи 1 в пространстве $H^1(\Omega)$ удобно использовать норму

$$\|\omega\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} \omega|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} |\omega|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

которая эквивалентна стандартной H^1 -норме, вычисляемой по формуле

$$\|\omega\| = \left(\int_{\Omega} |\omega|^2 + |\nabla_{\mathbf{x}} \omega|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Введём также обозначения:

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \mathbf{v} \subset \Omega, \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \equiv 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{замыкание } \mathcal{V} \text{ в пространстве } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Пространство $\mathbf{V}$ является гильбертовым со скалярным произведением, определяемым для произвольных вектор-функций $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ равенством

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathcal{E}(\mathbf{v}) : \mathcal{E}(\mathbf{w}) d\mathbf{x},$$

где символ «:» означает свёртку (скалярное произведение) тензоров по двум индексам. Применяя неравенство Корна (см., например, [1, гл. I, § 2]), можно убедиться в том, что данное определение корректно, причём норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}}}$ эквивалентна той норме, которая естественным образом индуцируется из пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

В качестве основного пространства, в котором мы будем искать решения задачи 1, возьмём декартово произведение $\mathbf{V} \times H^1(\Omega)$ с max-нормой:

$$(\mathbf{v}, \omega)_{\mathbf{V} \times H^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}, \|\omega\|_{H^1(\Omega)}\}.$$

На данные модели налагаются шесть условий:

- (i) функция $\nu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна, ограничена сверху, и существует константа ν_0 такая, что $0 < \nu_0 \leq \nu(\tau)$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$;
- (ii) с некоторой положительной константой l_0 выполнено неравенство

$$\nu(t)t - \nu(s)s \geq l_0(t - s)$$

для любых $t, s \in \mathbb{R}_+$ таких, что $t \geq s$;

- (iii) функции $f_i(\cdot, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$, и $g(\cdot, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы при любом $y \in \mathbb{R}$;
- (iv) функции $f_i(\mathbf{x}, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$, и $g(\mathbf{x}, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны при п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$;
- (v) существуют функция $f_0 \in L^2(\Omega)$ и константа $F_0 > 0$ такие, что $|\mathbf{f}(\mathbf{x}, y)| \leq f_0(\mathbf{x}) + F_0|y|^2$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$;
- (vi) существует функция $g_0 \in L^2(\Omega)$ такая, что $|g(\mathbf{x}, y)| \leq g_0(\mathbf{x})$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Замечание 1. Условие (ii) выполнено для всякой дифференцируемой функции $\nu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такой, что $\frac{d\nu}{d\tau} \geq 0$ и $\nu(\tau) \geq \nu_0 > 0$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$. Действительно, ввиду теоремы Лагранжа о среднем значении имеем

$$\nu(t)t - \nu(s)s = \left[\frac{d\nu}{d\tau} \right]_{\tau=\zeta} (\zeta + \nu(\zeta)) (t - s) \geq \nu_0(t - s)$$

для произвольных $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t > s$, и некоторого числа $\zeta \in [s, t]$.

Замечание 2. Требования (i) и (ii), предъявляемые к функции вязкости ν , являются менее обременительными по сравнению с теми условиями, что используются в [1, с. 53] при вариационной формулировке задачи о изотермическом течении нелинейно-вязкой жидкости. Очевидно, что ньютоновская жидкость с вязкостью $\nu \equiv \nu_0$ удовлетворяет (i) и (ii) с $l_0 = \nu_0$.

Слабая постановка задачи 1. Найти пару функций $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{V} \times H^1(\Omega)$ такую, что

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (5)$$

$$-\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i T \frac{\partial S}{\partial x_i} d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} S d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} T S d\sigma = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) S d\mathbf{x} \quad (6)$$

для любых пробных функций $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и $S \in H^1(\Omega)$.

Определение. Всякое решение системы (5), (6) будем называть слабым решением задачи 1.

Через Σ обозначим совокупность всех слабых решений задачи 1.

Основные результаты статьи сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. Если выполнены допущения (i)–(vi), то:

- (а) задача 1 разрешима в классе слабых решений, т. е. $\Sigma \neq \emptyset$;
- (б) множество слабых решений Σ ограничено в пространстве $\mathbf{V} \times H^1(\Omega)$, и всякая пара $(\mathbf{u}, T) \in \Sigma$ удовлетворяет энергетическим равенствам:

$$\int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad (7)$$

$$k \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} T|^2 d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} |T|^2 d\sigma = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) T d\mathbf{x}; \quad (8)$$

- (в) множество Σ замкнуто в пространстве $\mathbf{L}^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, где показатель p может быть выбран произвольным образом из отрезка $[1, 6]$.

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 4.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие три предложения.

Предложение 1. Пусть $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство, $\mathbf{E}^*$ — сопряжённое к $\mathbf{E}$ пространство, $\mathbf{A}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$ — непрерывный оператор, и с некоторой положительной константой C_0 выполнено неравенство

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq C_0 (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}} - \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}})^2 \quad (9)$$

при любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$. Тогда оператор $\mathbf{A}$ обратим и оператор $\mathbf{A}^{-1}: \mathbf{E}^* \rightarrow \mathbf{E}$ непрерывен.

Доказательство. Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ строго монотонен. В самом деле, из неравенства (9) вытекает, что $\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq 0$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$. При этом если $\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} = 0$, то будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\ &= 2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right), \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{2} \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} + 2 \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{2} \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\ &= 2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right), \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} + 2 \left\langle \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \right\rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \\ &\geq 2C_0 \left(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}} - \left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} \right\|_{\mathbf{E}} \right)^2 + 2C_0 \left(\left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} \right\|_{\mathbf{E}} - \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}} \right)^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2} \right\|_{\mathbf{E}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}}.$$

В гильбертовом пространстве последние соотношения влекут равенство $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, в справедливости которого нетрудно убедиться, например, с помощью тождества параллелограмма.

Заметим, что оператор $\mathbf{A}$ коэрцитивен. В самом деле, полагая в (9) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, получаем

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq \langle \mathbf{A}(\mathbf{0}), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} + C_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}^2 \geq -\|\mathbf{A}(\mathbf{0})\|_{\mathbf{E}^*} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}} + C_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}^2 = \gamma(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}},$$

где $\gamma(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -\|\mathbf{A}(\mathbf{0})\|_{\mathbf{E}^*} + C_0 \tau$ и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \gamma(\tau) = +\infty$.

Возьмём теперь последовательность $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$ такую, что $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}_0$ в пространстве $\mathbf{E}$ и

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_n) - \mathbf{A}(\mathbf{u}_0), \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \rightarrow 0 \quad (10)$$

при $n \rightarrow \infty$. В силу свойства (9), из сходимости (10) следует, что $\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{E}} \rightarrow \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{E}}$. Как известно, в гильбертовом пространстве из сходимостей $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}_0$ и $\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{E}} \rightarrow \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{E}}$ вытекает сильная сходимость $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}_0$. Тем самым установлено, что оператор $\mathbf{A}$ обладает (S)-свойством [16, гл. III, § 1].

С учётом установленных выше свойств оператора $\mathbf{A}$ для доказательства предложения 1 достаточно применить теорему 2.2 из [16, гл. III, § 2]. $\square$

Замечание 3. Соотношение (9) представляет собой частный случай условия d -монотонности. Легко видеть, что это условие является менее жёстким, чем требование сильной монотонности:

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}} \geq C_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{E}}^2$$

для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$.

Следуя [14], приведём основополагающее утверждение о неподвижной точке вполне непрерывного оператора.

Предложение 2 (принцип Лере — Шаудера). Пусть $\mathbf{F}$ — сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbf{K}: \mathcal{B}[\mathbf{0}, r] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{F}$ — вполне непрерывный оператор, где $\mathcal{B}[\mathbf{0}, r] \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbf{F} \mid \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{F}} \leq r\}$. Предположим, что $\mathbf{K}(\mathbf{v}, 0) = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{B}[\mathbf{0}, r]$. Тогда выполнено по крайней мере одно из двух следующих утверждений:

- 1) оператор $\mathbf{K}(\cdot, 1)$ имеет неподвижную точку в шаре $\mathcal{B}[\mathbf{0}, r]$;
- 2) существуют элемент $\mathbf{v}_* \in \partial\mathcal{B}[\mathbf{0}, r]$ и число $\alpha_* \in [0, 1]$ такие, что $\mathbf{v}_* = \mathbf{K}(\mathbf{v}_*, \alpha_*)$.

Сформулируем теперь результаты М. А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции, действующего в пространствах Лебега [15].

Предложение 3. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и функция $\mathfrak{F}: G \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим трём условиям:

- 1) функция $\mathfrak{F}(\cdot, y): G \rightarrow \mathbb{R}$ измерима для любого $y \in \mathbb{R}$,
- 2) функция $\mathfrak{F}(\mathbf{x}, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна для п. в. $\mathbf{x} \in G$,
- 3) существуют константы $p_1 \geq 1$, $p_2 \geq 1$, $b > 0$ и функция $a \in L^{p_2}(G)$ такие, что

$$|\mathfrak{F}(\mathbf{x}, y)| \leq a(\mathbf{x}) + b|y|^{p_1/p_2}$$

для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\mathbf{x} \in G$.

Тогда оператор суперпозиции $\Phi_{\mathfrak{F}}$, определённый по формуле $\Phi_{\mathfrak{F}}[w](\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}(\cdot, w(\cdot))$, непрерывен и ограничен как отображение из $L^{p_1}(G)$ в $L^{p_2}(G)$.

Подробное доказательство данного утверждения имеется в монографии [15, гл. I, § 2].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим вспомогательную задачу: требуется найти пару функций $(\mathbf{u}, T)$ из пространства $\mathbf{V} \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющую двум равенствам:

$$-\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (11)$$

$$-\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i T \frac{\partial S}{\partial x_i} d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} S d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} TS d\sigma = \alpha \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) S d\mathbf{x} \quad \text{для любого } S \in H^1(\Omega), \quad (12)$$

где α — параметр, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Прежде всего выведем априорные оценки решений системы (11), (12). Предположим, что пара $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{V} \times H^1(\Omega)$ удовлетворяет (11), (12) при некотором $\alpha \in [0, 1]$. Полагая в равенстве (11) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, получаем

$$-\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (13)$$

Первое слагаемое в левой части (13) равно нулю. Действительно, используя интегрирование по частям и тождество $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \equiv 0$ в Ω , получаем

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial x_i} d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|)|\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x},$$

откуда с помощью предположений (i), (v) и неравенства Коши — Буняковского выводим, что

$$\begin{aligned} \nu_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq \int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|)|\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} (f_0 + F_0|T|^2)|\mathbf{u}| d\mathbf{x} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} + F_0 \left(\int_{\Omega} |T|^4 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \|f_0\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + F_0 \|T\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что существуют постоянные $C_1(\Omega)$ и $C_2(\Omega)$ такие, что

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C_1(\Omega) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}, \quad \|T\|_{L^4(\Omega)} \leq C_2(\Omega) \|T\|_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому (14) можно продолжить следующим образом:

$$\nu_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C_1(\Omega) \|f_0\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + F_0 C_1(\Omega) C_2^2(\Omega) \|T\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}},$$

откуда следует, что

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C_1(\Omega)}{\nu_0} \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{F_0 C_1(\Omega) C_2^2(\Omega)}{\nu_0} \|T\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (15)$$

Положим теперь в (12) $S = T$, тогда получаем

$$-\alpha \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i T \frac{\partial T}{\partial x_i} d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} T|^2 d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} |T|^2 d\sigma = \alpha \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) T d\mathbf{x}. \quad (16)$$

Первое слагаемое в левой части последнего равенства равно нулю. В самом деле, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, с учётом тождества $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \equiv 0$ в Ω получаем, что

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i T \frac{\partial T}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial |T|^2}{\partial x_i} d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} |T|^2 d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) |T|^2 d\mathbf{x} = 0$$

и, стало быть, равенство (16) преобразуется к виду

$$k \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} T|^2 d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} |T|^2 d\sigma = \alpha \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) T d\mathbf{x}. \quad (17)$$

Из (17) с помощью допущения (vi) и неравенства Коши — Буняковского выводим, что

$$\begin{aligned} \min\{k, \chi\} \|T\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq k \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} T|^2 d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} |T|^2 d\sigma = \alpha \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) T d\mathbf{x} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |g_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |T|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq C_3(\Omega) \|g_0\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|T\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_3(\Omega)}{\min\{k, \chi\}} \|g_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (18)$$

Учитывая это неравенство, из (15) нетрудно вывести следующую оценку:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C_1(\Omega)}{\nu_0} \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{F_0 C_1(\Omega) C_2^2(\Omega) C_3^2(\Omega)}{\nu_0 \min\{k^2, \chi^2\}} \|g_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (19)$$

Займёмся теперь операторной трактовкой задачи (11), (12). Для этого введём ряд операторов:

$$\begin{aligned} A_1: \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}^*, \quad \langle A_1(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ A_2: H^1(\Omega) &\rightarrow [H^1(\Omega)]^*, \quad \langle A_2(T), S \rangle_{[H^1(\Omega)]^* \times H^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} k \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} S \, d\mathbf{x} + \chi \int_{\partial\Omega} T S \, d\sigma, \\ A: \mathbf{V} \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}^* \times [H^1(\Omega)]^*, \quad A(\mathbf{u}, T) \stackrel{\text{def}}{=} (A_1(\mathbf{u}), A_2(T)), \\ \tilde{K}_1: \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}^*, \quad \langle \tilde{K}_1(\mathbf{u}, T), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, T) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \tilde{K}_2: \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) &\rightarrow [H^1(\Omega)]^*, \\ \langle \tilde{K}_2(\mathbf{u}, T), S \rangle_{[H^1(\Omega)]^* \times H^1(\Omega)} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i T \frac{\partial S}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, T) S \, d\mathbf{x}, \\ \tilde{K}: \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}^* \times [H^1(\Omega)]^*, \quad \tilde{K}(\mathbf{u}, T) \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{K}_1(\mathbf{u}, T), \tilde{K}_2(\mathbf{u}, T)), \\ J: \mathbf{V} \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{L}^4(\Omega) \times L^4(\Omega), \quad J(\mathbf{u}, T) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{u}, T), \\ K_{\alpha}: \mathbf{V} \times H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{V}^* \times [H^1(\Omega)]^*, \quad K_{\alpha}(\mathbf{u}, T) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\tilde{K} \circ J)(\mathbf{u}, T), \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что система (11), (12) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\mathbf{u}, T) = K_{\alpha}(\mathbf{u}, T). \quad (20)$$

Изучим свойства операторов A и K_{α} . Используя допущение (ii), получаем, что

$$\begin{aligned} &(\nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) \mathcal{E}(\mathbf{w})) : (\mathcal{E}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}(\mathbf{w})) \\ &= \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\mathbf{w}) - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) \mathcal{E}(\mathbf{u}) : \mathcal{E}(\mathbf{w}) + \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) |\mathcal{E}(\mathbf{w})|^2 \\ &\geq \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})|^2 - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})| |\mathcal{E}(\mathbf{w})| - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})| |\mathcal{E}(\mathbf{w})| + \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) |\mathcal{E}(\mathbf{w})|^2 \\ &= \{\nu(|\mathcal{E}(\mathbf{u})|) |\mathcal{E}(\mathbf{u})| - \nu(|\mathcal{E}(\mathbf{w})|) |\mathcal{E}(\mathbf{w})|\} (|\mathcal{E}(\mathbf{u})| - |\mathcal{E}(\mathbf{w})|) \geq l_0 (|\mathcal{E}(\mathbf{u})| - |\mathcal{E}(\mathbf{w})|)^2 \end{aligned}$$

для любых $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Отсюда следует неравенство

$$\langle A_1(\mathbf{u}) - A_1(\mathbf{w}), \mathbf{u} - \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} \geq l_0 (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} - \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}})^2.$$

Воспользовавшись предложением 1, приходим к выводу, что оператор A_1 непрерывно обратим. Это же верно и для оператора A_2 , в чём нетрудно убедиться, замечая, что

$$\langle A_2(T), T \rangle_{[H^1(\Omega)]^* \times H^1(\Omega)} \geq \min\{k, \chi\} \|T\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

и используя классическую лемму Лакса — Мильграма [17, гл. I, § 1.3.1]. Следовательно, непрерывно обратим и оператор A , причём имеет место соотношение

$$A^{-1}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = (A_1^{-1}(\mathbf{h}_1), A_2^{-1}(\mathbf{h}_2)), \quad (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \in \mathbf{V}^* \times [H^1(\Omega)]^*.$$

Далее, заметим, что оператор J вполне непрерывен в силу теоремы Реллиха — Кондрашова о компактности вложения (см., например, [17, гл. II, § 2.6.1]). Кроме того, ввиду допущений (iii)–(vi) из предложения 3 вытекает, что оператор $\tilde{K}$ непрерывен. Тем самым установлено, что оператор $K_\alpha = \alpha \tilde{K} \circ J$ (а вместе с ним и оператор $A^{-1} \circ K_\alpha$) является вполне непрерывным.

Применив A^{-1} к обеим частям уравнения (20), получаем

$$(\mathbf{u}, T) = (A^{-1} \circ K_\alpha)(\mathbf{u}, T).$$

Принимая во внимание равенство $A^{-1} \circ K_0 = \mathbf{0}$ и выведенные ранее априорные оценки (18) и (19), которые справедливы для любых решений (20), с помощью принципа Лере — Шаудера (см. предложение 2) приходим к выводу о том, что уравнение

$$(\mathbf{u}, T) = (A^{-1} \circ K_1)(\mathbf{u}, T)$$

имеет решение $(\mathbf{u}_0, T_0)$ в некотором шаре

$$\mathbf{B}[(\mathbf{0}, 0), r] \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{v}, \omega) \mid (\mathbf{v}, \omega) \in \mathbf{V} \times H^1(\Omega), \|(\mathbf{v}, \omega)\|_{\mathbf{V} \times H^1(\Omega)} < r\}$$

с достаточно большим радиусом r , например,

$$r = \max \left\{ \frac{C_1(\Omega)}{\nu_0} \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{F_0 C_1(\Omega) C_2^2(\Omega) C_3^2(\Omega)}{\nu_0 \min\{k^2, \chi^2\}} \|g_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \frac{C_3(\Omega)}{\min\{k, \chi\}} \|g_0\|_{L^2(\Omega)} \right\} + 1.$$

Очевидно, что $A(\mathbf{u}_0, T_0) = K_1(\mathbf{u}_0, T_0)$ и пара функций $(\mathbf{u}_0, T_0)$ является слабым решением задачи 1. Таким образом, $\Sigma \neq \emptyset$ и пункт (а) теоремы 1 доказан.

Ограниченность множества Σ в пространстве $\mathbf{V} \times H^1(\Omega)$ легко усматривается из оценок (18) и (19). Подставляя $\alpha = 1$ в (5) и (6), получаем требуемые равенства (7) и (8).

Наконец, докажем пункт (в) теоремы 1. Во-первых, заметим, что в силу теоремы вложения Соболева [17, гл. II, § 2.6.1] имеет место вложение $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при любом $p \in [1, 6]$. Поэтому $\Sigma \subset \mathbf{L}^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$.

Рассмотрим последовательность пар $\{(\mathbf{u}_n, T_n)\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ такую, что при $n \rightarrow \infty$ имеют место следующие сходимости:

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ по норме } \mathbf{L}^p(\Omega), \quad T_n \rightarrow \bar{T}_0 \text{ по норме } L^p(\Omega) \quad (21)$$

для некоторой пары $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0)$ из пространства $\mathbf{L}^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Покажем, что $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0) \in \Sigma$.

Так как множество Σ ограничено в $\mathbf{V} \times H^1(\Omega)$, а $A^{-1} \circ K_1 : \mathbf{V} \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{V} \times H^1(\Omega)$ — вполне непрерывный оператор, то существуют вектор-функция $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ и функция $\hat{T} \in H^1(\Omega)$ такие, что

$$(A^{-1} \circ K_1)(\mathbf{u}_{n_m}, T_{n_m}) \rightarrow (\hat{\mathbf{u}}, \hat{T}) \text{ по норме } \mathbf{V} \times H^1(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (22)$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_m\}_{m=1}^\infty$.

С другой стороны, нам известно, что $(\mathbf{u}_{n_m}, T_{n_m})$ — слабое решение задачи 1 и, значит,

$$A(\mathbf{u}_{n_m}, T_{n_m}) = K_1(\mathbf{u}_{n_m}, T_{n_m}) \text{ для любого } m \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Применив к обеим частям последнего равенства A^{-1} , из (22) выводим, что

$$(\mathbf{u}_{n_m}, T_{n_m}) \rightarrow (\hat{\mathbf{u}}, \hat{T}) \text{ по норме } \mathbf{V} \times H^1(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Сравнивая (21) и (24), получаем, что $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{T}) \in \mathbf{V} \times H^1(\Omega)$. Затем, используя (24), переходим к пределу при $m \rightarrow \infty$ в равенстве (23); это даёт

$$A(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0) = K_1(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0).$$

Следовательно, справедливо включение $(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{T}_0) \in \Sigma$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.
2. Кузьмин М. Ю. О математической модели движения нелинейно-вязкой жидкости с условием проскальзывания на границе // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 53–62.
3. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model // Int. J. Differ. Equ. 2016. V. 2016. Article ID 9428128; URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/9428128>
4. Артёмов М. А., Скобанева А. В. Об оптимальном управлении в модели жёстко-вязко-пластической среды с граничными условиями Дирихле // Сиб. электрон. мат. известия. 2017. Т. 14. С. 1463–1471; URL: <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.126>
5. Baranovskii E. S. On flows of Bingham-type fluids with threshold slippage // Adv. Math. Phys. 2017. V. 2017. Article ID 7548328; URL: <https://doi.org/10.1155/2017/7548328>
6. Крейн С. Г., Чан Тху Ха. Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1153–1158.
7. Алексеев Г. В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
8. Фурсиков А. В., Эмануилов Ю. С. Точная управляемость уравнений Навье — Стокса и Буссинеска // Успехи мат. наук 1999. Т. 54, № 3. С. 93–146.
9. Алексеев Г. В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепло-массопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
10. Алексеев Г. В., Хлуднев А. М. Устойчивость решений экстремальных задач граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 5–18.
11. Mallea-Zepeda E., Lenés E., Valero E. Boundary control problem for heat convection equations with slip boundary condition // Math. Probl. Eng. 2018. V. 2018. Article ID 7959761; URL: <https://doi.org/10.1155/2018/7959761>
12. Li Z. Global well-posedness of the 2D Euler-Boussinesq system with stratification effects // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40, N 14. P. 5212–5221
13. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions // Mathematics. 2019. V. 7, N 7. Article ID 611; URL: <https://doi.org/10.3390/math7070611>
14. Isac G. Leray–Schauder Type Alternatives, Complementarity Problems and Variational Inequalities. N. Y.: Springer Science+Business Media, 2006.
15. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
17. Necas J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Berlin: Springer-Verl., 2012.

UDC 517.958

ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MODEL OF NONISOTHERMAL FLOWS OF A NON-NEWTONIAN FLUID

© 2020 A. A. Domnich^a, M. A. Artemov^b, O. Yu. Shishkina^c*Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh 394018, Russia*E-mails: ^aandomnich@inbox.ru, ^bartemov_m_a@mail.ru, ^cshishkina_oyu@mail.ru

Received 14.10.2019, revised 09.12.2019, accepted 05.12.2020

Abstract. Under study is a stationary model describing non-Newtonian fluid flows with the viscosity dependent on the strain rate and the heat transfer in a bounded 3D domain. This model is a strongly nonlinear system of coupled partial differential equations for the velocity field, temperature, and pressure. On the boundary of the flow domain, the system is supplemented with a no-slip condition and a linear Robin-type boundary condition for the temperature. An operator formulation of this boundary-value problem is proposed. Using the properties of d -monotone operators and the Leray–Schauder Fixed Point Theorem, we prove the existence of weak solutions under natural conditions for the data of the model. It is also shown that the solutions set is bounded and closed.

Keywords: non-Newtonian fluid, heat transfer, d -monotone operator, fixed point, weak solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.106

REFERENCES

1. Litvinov V.G. *Dvizhenie nelineino-vyazkoi zhidkosti* [Motion of nonlinear-viscous fluid]. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. Kuz'min M.Yu. O matematicheskoi modeli dvizheniya nelineino-vyazkoi zhidkosti s usloviem proskal'zyvaniya na granitse [About a mathematical model of motion of a nonlinear-viscous fluid with a slipping condition at the boundary]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2007, No. 5, pp. 53–62 (in Russian).
3. Baranovskii E.S., Artemov M.A. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model. *Internat. J. Differential Equations*, 2016, Article ID 9428128 (2016).
4. Artemov A.A., Skobaneva A.V. Ob optimal'nom upravlenii v modeli zhestko-vyazko-plasticheskoi sredy s granichnymi usloviyami Dirikhle [On optimal control in a model of rigid-viscoplastic media with dirichlet boundary conditions]. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, Vol. 14, pp. 1463–1471 (in Russian).
5. Baranovskii E.S. On flows of Bingham-Type fluids with threshold slippage. *Adv. Math. Phys.*, 2017, Article ID 7548328.
6. Krein S.G., Kha Ch.T. Zadacha protekaniya neravnomerno nagretoi vyazkoi zhidkosti [The flow problem of a nonuniformly heated viscous liquid]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1989, Vol. 29, No. 8, pp. 1153–1158 (in Russian).
7. Alekseev G.V. Razreshimost' statsionarnykh zadach granichnogo upravleniya dlya uravnenii teplovoi konveksii [Solvability of stationary boundary control problems for equations of thermal convection]. *Siberian Math. J.*, 1998, Vol. 39, Np. 5, pp. 844–858.
8. Fursikov A.V., Emanuilov Yu.S. Tochnaya upravlyaemost' uravnenii Nav'e — Stoksa i Bussineska [Exact controllability of Navier–Stokes and Boussinesq equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1999, Vol. 54, No. 3, pp. 93–146 (in Russian).

9. Alekseev G.V. Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations. *Siberian Math. J.*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 811-827.
10. Alekseev G.V., Khludnev A.M. Stability of solutions to extremal boundary control problems for stationary equations of thermal convection. *J. Appl. Indust. Math.*, 2010, Vol. 5, No. 1, pp. 1-13.
11. Mallea-Zepeda E., Lenés E., Valero E. Boundary control problem for heat convection equations with slip boundary condition. *Math. Probl. Eng.*, 2018, Article ID 7959761 (2018).
12. Li Z. Global well-posedness of the 2D Euler–Boussinesq system with stratification effects. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2017, Vol. 40, No. 14, pp. 5212-5221.
13. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*, 2019, Vol. 7, No. 7, Article ID 611.
14. Isac G. Leray–Schauder type alternatives. *Complementarity Problems and Variational Inequalities*. New York: Springer-Verl., 2006.
15. Krasnosel'skii M.A. *Topologicheskie metody v teorii nelineinykh integral'nykh uravnenii* [Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations]. Moscow: Gostekhizdat, 1956 (in Russian).
16. Gaevskii Kh., Greger K., Zakharias K. *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations]. Moscow: Mir, 1978 (in Russian).
17. Necas J. *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Berlin: Springer-Verl., 2012.