Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Banshchikov, Symbolic-numerical analysis of the necessary stability conditions for the relative equilibria of an orbital gyrostat , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 5–16

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.201>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 13:27:55

УДК 519.688:531.36

СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ГИРОСТАТА

© 2020 А. В. Банщиков

*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия*

E-mail: bav@icc.ru

Поступила в редакцию 30.10.2019 г.; после доработки 30.10.2019 г.;
принята к публикации 09.04.2020 г.

С помощью разработанного на базе системы компьютерной алгебры «Mathematica» программного обеспечения исследована динамика вращательного движения по круговой орбите спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил. В символьном виде на компьютере построены линеаризованные уравнения возмущённого движения в окрестности относительного равновесия системы и получены необходимые условия его устойчивости. При параметрическом анализе полученных неравенств рассмотрен один из случаев, когда вектор гиростатического момента системы находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции. Найденные области устойчивости имеют аналитический вид или графическое представление в виде 2D-изображений.

Ключевые слова: орбитальный гиростат, устойчивость положений равновесия, символьно-численное моделирование, прикладное программное обеспечение, компьютерная алгебра.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.201

ВВЕДЕНИЕ

Исследование вопросов устойчивости, стабилизации нелинейных или линеаризованных моделей механических систем часто приводит к задаче параметрического анализа полученных условий (неравенств). При параметрическом анализе важно иметь возможность оценки области значений параметров, при которых обеспечивается требуемое состояние (свойство) системы. Для моделей, имеющих высокую размерность и/или содержащих много параметров, получать аналитические результаты весьма затруднительно. На этом этапе анализа нам может помочь использование функций символьно-численного моделирования системы компьютерной алгебры (СКА), а также соответствующее программное обеспечение, разработанное на базе СКА.

Твёрдое тело с зафиксированной в нем осью вращающегося с постоянной относительной угловой скоростью маховика, уравновешенного статически и динамически, является стационарным гиростатом. Гиростат движется в центральном ньютоновском поле сил вокруг притягивающего центра так, что его центр масс перемещается по кеплеровой круговой орбите с постоянной угловой скоростью. Пренебрегаем взаимным влиянием вращения системы вокруг центра масс и перемещением последнего по орбите; это так называемая ограниченная постановка задачи орбитального движения. Задача имеет свою предысторию (см. обзор [1]) и до настоящего времени интересует исследователей. Основное внимание авторов было уделено поиску относительных положений равновесия (для различных вариантов расположения оси

вращения маховика в корпусе гиростата) и получению достаточных условий их устойчивости по Ляпунову из анализа обобщённого интеграла энергии. Однако получение и анализ необходимых условий устойчивости относительных равновесий был выполнен лишь для случая расположения вектора гиросtatического момента системы вдоль какой-либо главной центральной оси инерции системы (см., например, [2]).

1. ПОСТРОЕНИЕ СИМВОЛЬНОЙ МОДЕЛИ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Для описания движения системы вводятся две правые прямоугольные системы координат с полюсами в центре масс системы: $OZ_1Z_2Z_3$ — орбитальная система координат (ОСК) и жёстко связанная с корпусом гиростата СК $Oz_1z_2z_3$, оси которой направлены по главным центральным осям инерции гиростата. Для определения взаимного расположения осей OZ_k и Oz_j используются направляющие косинусы, задаваемые самолётными углами α, β, γ (см., например, [1]); A, B, C — моменты инерции системы относительно осей Oz_1, Oz_2, Oz_3 ; h_j — проекции (на соответствующую ось) вектора постоянного гиросtatического момента системы, делённые на ω (модуль орбитальной угловой скорости).

Рассмотрим положение относительного равновесия (состояния покоя корпуса гиростата относительно ОСК $\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = 0$) в общем виде:

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta = \beta_0 = \text{const}, \quad \gamma = \gamma_0 = \text{const}. \quad (1)$$

С помощью разработанного программного комплекса (ПК) [3], описание которого приведено в [4, 5], в символьном виде на компьютере получены: (а) кинетическая и потенциальная энергии системы; (б) нелинейные уравнения движения гиростата в форме Лагранжа второго рода; (в) условия существования равновесия (1).

Если в уравнениях движения гиростата приравнять нулю производные по времени всех входящих в них обобщённых координат, то получим систему уравнений, определяющую относительные равновесия. Выпишем эти уравнения (условия (в)):

$$\begin{aligned} & \sin 2\alpha_0(2(2A - B - C) \cos^2 \beta_0 - (B - C)(\cos 2\beta_0 - 3) \cos 2\gamma_0) \\ & \quad + 4(B - C) \cos 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0 = 0, \\ & (B + C - 2A + (B - C) \cos 2\gamma_0) \sin 2\beta_0(5 - 3 \cos 2\alpha_0) \\ & \quad + 6(B - C) \cos \beta_0 \sin 2\alpha_0 \sin 2\gamma_0 + 8(\sin \beta_0(h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) - h_1 \cos \beta_0) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (B - C)(\sin 2\gamma_0(3 \cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 - 3 \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \beta_0) \\ & \quad + 3 \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \cos 2\gamma_0) + 2 \cos \beta_0(h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0) = 0. \end{aligned}$$

Необходимые условия устойчивости положений равновесия можно получить по уравнениям возмущённого движения в первом приближении.

Представим углы α, β, γ в возмущённом движении в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma},$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ — малые отклонения от равновесия (1).

Линеаризованные уравнения возмущённого движения в окрестности (1) имеют следующий вид:

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0, \quad (3)$$

где $q = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})^T$ — вектор отклонений обобщённых координат от невозмущённого движения (1); M — положительно определённая симметричная матрица кинетической энергии;

G — кососимметричная матрица гироскопических сил; K — симметричная матрица потенциальных сил. Матрицы M , G , K определяются следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & 0 \\ M_{13} & 0 & M_{33} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} \\ -G_{12} & 0 & G_{23} \\ -G_{13} & -G_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{11} &= A \sin^2 \beta_0 + (B \cos^2 \gamma_0 + C \sin^2 \gamma_0) \cos^2 \beta_0, & M_{22} &= B \sin^2 \gamma_0 + C \cos^2 \gamma_0, \\ M_{12} &= (B - C) \cos \beta_0 \sin \gamma_0 \cos \gamma_0, & M_{13} &= A \sin \beta_0, & M_{33} &= A, & \det M &= ABC \cos^2 \beta_0 > 0, \\ G_{12} &= \sin 2\beta_0 (A - B \cos^2 \gamma_0 - C \sin^2 \gamma_0) + \sin \beta_0 (h_3 \sin \gamma_0 - h_2 \cos \gamma_0) + h_1 \cos \beta_0, \\ G_{13} &= -\cos \beta_0 (\cos \beta_0 (B - C) \sin 2\gamma_0 + h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0), \\ G_{23} &= -\cos \beta_0 (A + (C - B) \cos 2\gamma_0) - h_3 \sin \gamma_0 + h_2 \cos \gamma_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= 3(\cos 2\alpha_0((4A - 2(B + C)) \cos^2 \beta_0 \\ &\quad - (B - C)(\cos 2\beta_0 - 3) \cos 2\gamma_0))/4 + 3(C - B) \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0, \end{aligned}$$

$$K_{12} = 3 \cos \beta_0 ((B \cos^2 \gamma_0 + C \sin^2 \gamma_0 - A) \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 + (B - C) \cos 2\alpha_0 \sin 2\gamma_0/2),$$

$$K_{13} = 3(B - C)(4 \cos 2\alpha_0 \sin \beta_0 \cos 2\gamma_0 + \sin 2\alpha_0 (\cos 2\beta_0 - 3) \sin 2\gamma_0)/4,$$

$$\begin{aligned} K_{22} &= ((2A - B - C + (C - B) \cos 2\gamma_0)(3 \cos 2\alpha_0 - 5) \cos 2\beta_0 \\ &\quad + 3(C - B) \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0)/4 + h_1 \sin \beta_0 + (h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) \cos \beta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{23} &= (B - C)(6 \sin 2\alpha_0 \cos \beta_0 \cos 2\gamma_0 \\ &\quad + (3 \cos 2\alpha_0 - 5) \sin 2\beta_0 \sin 2\gamma_0)/4 - (h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0) \sin \beta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{33} &= (B - C)(\cos 2\gamma_0(10 \cos^2 \beta_0 - 3 \cos 2\alpha_0 (\cos 2\beta_0 - 3)) \\ &\quad - 12 \sin 2\alpha_0 \sin \beta_0 \sin 2\gamma_0)/4 + (h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) \cos \beta_0. \end{aligned}$$

Все производные в (3) вычисляются по безразмерному времени $\tau = \omega t$.

Характеристическое уравнение системы (3)

$$\det(M\lambda^2 + G\lambda + K) = v_3\lambda^6 + v_2\lambda^4 + v_1\lambda^2 + v_0 = 0$$

содержит λ только в чётных степенях. Устойчивость нулевого решения уравнений (3) имеет место, когда все корни относительно λ^2 , являясь простыми, будут вещественными отрицательными числами. Алгебраические условия, обеспечивающие указанные свойства корней (необходимые условия устойчивости), представляют собой систему неравенств (см. [6])

$$\begin{aligned} v_3 &\equiv \det M > 0, & v_2 &> 0, & v_1 &> 0, & v_0 &\equiv \det K > 0, \\ \text{Dis} &\equiv v_2^2 v_1^2 - 4v_1^3 v_3 - 4v_2^3 v_0 + 18v_3 v_2 v_1 v_0 - 27v_0^2 v_3^2 > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Первое условие в (4) всегда выполняется в силу положительной определённости матрицы кинетической энергии. Отметим, что если хотя бы одно из условий (4) имеет строго противоположное неравенство, тогда по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [7] следует неустойчивость системы (3).

Подчеркнём, что символьная линеаризация нелинейных уравнений движения в окрестности (1) (т. е. получение в аналитическом виде элементов матриц M , G , K из линеаризованной модели (3)), вычисление коэффициентов v_i , $i = \overline{0, 3}$, и дискриминанта Dis из (4) также выполнены с помощью ПК [3].

2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Аналитическое или численное определение всех положений равновесия спутника-гиростата в ОСК подробно изложено в [8] для общего случая ($h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 \neq 0$, $A \neq B \neq C$) или для частных случаев в [9]. В зависимости от влияния гиросtatического момента в работах представлена бифуркационная картина положений равновесия и найдено их число. В [10] разработан новый геометрический подход к изучению структуры множества относительных равновесий в зависимости от величины гиросtatического момента и других параметров системы.

Выпишем некоторые частные решения системы (2), при которых вектор гиросtatического момента находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции спутника.

В случае 1 ($h_1 = 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 \neq 0$) существуют положения равновесия:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = 0, \quad \beta = \beta_0 = 0, \\ \gamma &= \gamma_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_2 \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 (h_3 + 4(B - C) \sin \gamma_0) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = \pi/2, \quad \beta = \beta_0 = 0, \\ \gamma &= \gamma_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_2 \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 (h_3 + (B - C) \sin \gamma_0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае 2 ($h_3 = 0$, $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$) имеются положения равновесия:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = 0, \quad \gamma = \gamma_0 = 0, \\ \beta &= \beta_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_2 \sin \beta_0 - \cos \beta_0 (h_1 + (A - B) \sin \beta_0) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = \pi/2, \quad \gamma = \gamma_0 = 0, \\ \beta &= \beta_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_2 \sin \beta_0 - \cos \beta_0 (h_1 + 4(A - B) \sin \beta_0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае 3 ($h_2 = 0$, $h_1 \neq 0$, $h_3 \neq 0$) имеются положения равновесия:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = 0, \quad \gamma = \gamma_0 = \pi/2, \\ \beta &= \beta_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_1 \cos \beta_0 + \sin \beta_0 (h_3 + (A - C) \cos \beta_0) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = \pi/2, \quad \gamma = \gamma_0 = \pi/2, \\ \beta &= \beta_0 = \text{const} \quad \text{такая, что} \quad h_1 \cos \beta_0 + \sin \beta_0 (h_3 + 4(A - C) \cos \beta_0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Положения равновесия (5) и (7) представлены в [1]; (6) и (8) — это класс равновесных ориентаций соответственно в случаях $h_1 = 0$, $a_{31}^2 = 1$ и $h_3 = 0$, $a_{33} = 0$ из [9]; равновесия (9), (10) принадлежат соответственно группе решений I и III из [11].

Замечание. Условия положительной определённости матрицы потенциальных сил K на решениях (5), (7) совпадают с достаточными условиями устойчивости, приведёнными в [1], а на решениях (9), (10) с полученными и исследованными в [11].

Приведём подтверждение этого факта, например, для равновесия (9). Матрица потенциальных сил на этом равновесии имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 3(A \cos^2 \beta_0 + C \sin^2 \beta_0 - B) & 0 & 3(C - B) \sin \beta_0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 3(C - B) \sin \beta_0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$K_{22} = (C - A) \cos 2\beta_0 + h_1 \sin \beta_0 - h_3 \cos \beta_0, \quad K_{33} = 3(C - B) - \cos \beta_0(h_3 + (B - C) \cos \beta_0).$$

Если в матрицу (11) подставить h_1 (или h_3), выраженное из уравнения в (9):

$$h_1 = \operatorname{tg} \beta_0((C - A) \cos \beta_0 - h_3), \quad (12)$$

тогда условия положительной определённости матрицы (11) будут иметь следующий вид:

$$A \cos^2 \beta_0 + C \sin^2 \beta_0 - B > 0, \quad (C - A) \cos^2 \beta_0 - h_3 / \cos \beta_0 > 0,$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_0(2 \cos \beta_0(B - C)((A - C) \cos 2\beta_0 + 7A - 8B + C) \\ + 2h_3((A - C) \cos 2\beta_0 + A - 2B + C)) < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Если в достаточные условия из [11, с. 70] подставить $x_1 = a_{23} = -\cos \beta_0$, а также значение h_1 из (12), тогда преобразованные условия устойчивости совпадут с условиями (13).

Получение и анализ необходимых условий устойчивости относительных равновесий по уравнениям первого приближения выполнен ранее автором для вытянутого $B = A > C$ (см. [12]) и сплюснутого $B > A = C$ (см. [13]) осесимметричных орбитальных гиростатов, когда вектор гиростатического момента системы лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В качестве примера рассмотрим параметрический анализ необходимых условий устойчивости (4) для случая 3: $h_2 = 0$, $h_1 \neq 0$, $h_3 \neq 0$.

Не нарушая общности, пусть $h_i > 0$, $i = 1, 3$, и для определённости $B > A > C$.

Введём безразмерные параметры

$$H_1 \equiv h_1/B; \quad H_3 \equiv h_3/B; \quad J_A \equiv A/B; \quad J_C \equiv C/B; \quad p_c \equiv \cos \beta_0; \quad p_s \equiv -\sin \beta_0. \quad (14)$$

Значения параметров лежат в интервалах

$$\begin{aligned} H_i > 0, \quad i = 1, 3; \quad 1/2 < J_A < 1, \quad 1 - J_A < J_C < J_A; \quad -1 < p_c < 1, \\ p_c \neq 0, \quad p_s = \pm \sqrt{1 - p_c^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ограничения на параметры J_A , J_C следуют из условий $B > A > C > 0$, $B < A + C$. При значениях $p_c = 0$ (или $p_s = 0$) из уравнений в (9), (10) следует $h_3 = 0$ (или $h_1 = 0$), что противоречит условиям $h_1 > 0$, $h_3 > 0$.

3.1. Необходимые условия устойчивости положения равновесия (10)

Начнём исследование с положения равновесия (10). Используя (14), разрешим уравнение из (10) относительно H_1 :

$$H_1 = p_s(4(J_A - J_C) + H_3/p_c). \quad (16)$$

С учётом обозначений (14) и выражения (16), уравнения (3) имеют матрицы

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} J_C p_c^2 + J_A p_s^2 & 0 & -J_A p_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -J_A p_s & 0 & J_A \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} 0 & -2(J_C - J_A)p_c p_s & 0 \\ 2(J_C - J_A)p_c p_s & 0 & (J_C - J_A - 1)p_c - H_3 \\ 0 & H_3 + (J_A - J_C + 1)p_c & 0 \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} 3(1 - J_A p_c^2 - J_C p_s^2) & 0 & 3(J_C - 1)p_s \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 3(J_C - 1)p_s & 0 & K_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$K_{22} = 4(J_C - J_A)p_c^2 - H_3/p_c, \quad K_{33} = (1 - J_C)(1 - 2(p_c^2 - p_s^2)) - H_3 p_c.$$

Параметр p_s входит в коэффициенты характеристического уравнения системы только в чётных степенях. Исключим его, учитывая $p_c^2 + p_s^2 = 1$. Выпишем эти коэффициенты, зависящие от четырёх параметров J_A , J_C , p_c , H_3 , в явной форме:

$$v_3 \equiv \det M = J_A J_C p_c^2;$$

$$\begin{aligned} v_2 &= H_3^2(p_c^2(J_C - J_A) + J_A) + H_3 p_c(J_A(1 + 6J_A - 7J_C) - p_c^2(1 + 6J_A - 2J_C)(J_A - J_C)) \\ &\quad + p_c^2(3(3J_A - 1)J_C^2 + (3 - 2J_A(1 + 9J_A))J_C + 3(1 + 3J_A)J_A^2) \\ &\quad - p_c^4(J_A - J_C)(9J_A^2 - 6J_A(J_C - 1) + (J_C - 1)(J_C + 3)); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= H_3^2(4p_c^2(J_C - J_A) + J_A - 3J_C + 3) + H_3 p_c(3 - 22J_A J_C \\ &\quad - 24J_C + 3J_A^2 + 19J_A + 21J_C^2 - p_c^2(6J_A - 26J_C + 19)(J_A - J_C)) \\ &\quad + p_c^4(J_A - J_C)(6J_A(5J_C - 7) + 9J_A^2 - 31J_C^2 + 34J_C - 3) \\ &\quad - 3p_c^2(J_C - 1)(J_A(3 - 18J_C) + 9J_A^2 + J_C(9J_C - 2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 \equiv \det K &= 3(H_3 + 4p_c^3(J_A - J_C))(H_3(p_c^2(J_C - J_A) - J_C + 1) \\ &\quad + p_c(J_C - 1)(J_A(4p_c^2 - 3) - 4(p_c^2 - 1)J_C - 1)). \end{aligned}$$

Дискриминант Dis кубического уравнения из (4) является полиномом восьмой степени относительно H_3 с коэффициентами, зависящими сложным образом от параметров J_A , J_C , p_c . Этот полином в явном аналитическом виде, в силу громоздкости, не представлен.

В соответствии с теоремами Томсона — Тета — Четаева [7] изучение вопросов об устойчивости равновесий начинается с анализа матрицы потенциальных сил. С помощью функции СКА «Mathematica»

$$\text{Reduce} \left[\{1/2 < J_A < 1, 1 - J_A < J_C < J_A, -1 < p_c < 1, p_c \neq 0, H_3 > 0, \right.$$

$$\left. 1 - J_A p_c^2 - J_C(1 - p_c^2) > 0, 4(J_C - J_A)p_c^2 - H_3/p_c > 0, \det K > 0\}, \{J_A, J_C, p_c, H_3\}, \text{Reals} \right],$$

предназначенной для нахождения символьного (аналитического) решения системы неравенств, получены условия положительной определённости матрицы K из (17). В силу громоздкости этого решения его представление здесь опущено. Анализ полученного решения позволяет сделать следующий вывод.

Утверждение 1. Матрица потенциальных сил (17) для равновесия (10) при значениях параметров из (15) может быть положительно определённой только на интервале $-1 < p_c < 0$.

Другими словами, принимая во внимание замечание из разд. 2, можно утверждать, что область выполнения достаточных условий устойчивости равновесия (10) при $B > A > C$ существует для значения β_0 из интервала $\pi/2 < \beta_0 < 3\pi/2$ ($\beta_0 \neq \pi$).

Получить аналитическое решение для всей системы неравенств (4) (с коэффициентами v_i , $i = \overline{0, 3}$, из (18)) не удаётся в силу большого числа параметров и сложности анализируемых полиномиальных выражений. Поэтому, для упрощения исследования, перейдём к символьно-численному анализу при фиксированных значениях некоторых параметров.

Найдём графическое решение системы неравенств (4) для двух вариантов фиксированных значений параметров:

- 1) параметры $J_A = 2/3$, $J_C = 1/2$ фиксированы, а параметры p_c , H_3 являются искомыми;
- 2) параметры $p_c = -1/\sqrt{2}$, $H_3 = 1$ фиксированы, а условия на параметры J_A , J_C необходимо получить.

Используя функцию *RegionPlot* (из системы «Mathematica»), предназначенную для графического 2D-представления решения системы неравенств, построим области необходимых условий устойчивости в плоскости параметров p_c , H_3 для варианта 1 (или J_A , J_C для варианта 2):

$$\text{RegionPlot}[-1 < p_c < 1 \wedge p_c \neq 0 \wedge H_3 > 0 \wedge v_0 > 0 \wedge v_1 > 0 \wedge v_2 > 0 \wedge \text{Dis} > 0, \\ \{p_c, -1, 1\}, \{H_3, 0, 8/5\}];$$

$$\text{RegionPlot}[1/2 < J_A < 1 \wedge 1 - J_A < J_C < J_A \wedge v_0 > 0 \wedge v_1 > 0 \wedge v_2 > 0 \wedge \text{Dis} > 0, \\ \{J_A, 1/2, 1\}, \{J_C, 0, 1\}].$$

Полученные результаты показаны заштрихованными участками на рисунке.

Области необходимых условий устойчивости:
(а) для варианта (1), (б) для варианта (2)

Отметим, что более тёмная часть полученных областей на рисунке принадлежит области достаточных условий устойчивости, где матрица K положительно определена.

3.2. О гироскопической стабилизации положения равновесия (9)

Представим (12) через параметры (14): $H_1 = p_s((J_A - J_C) + H_3/p_c)$. Учитывая последнее соотношение и обозначения (14), матрица (11) потенциальных сил принимает вид

$$K = \begin{pmatrix} 3(J_A p_c^2 + J_C p_s^2 - 1) & 0 & 3(1 - J_C)p_s \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 3(1 - J_C)p_s & 0 & K_{33} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где

$$K_{22} = (J_C - J_A)p_c^2 - H_3/p_c, \quad K_{33} = 3(J_C - 1) - p_c(H_3 + (1 - J_C)p_c).$$

Коэффициенты характеристического уравнения (после исключения параметра p_s) имеют вид

$$\begin{aligned} v_2 &= H_3^2(p_c^2(J_C - J_A) + J_A) + H_3 p_c(p_c^2(2J_C - 1)(J_A - J_C) - J_A(J_C - 1)) \\ &\quad + p_c^2(J_A(p_c^2(1 - J_C)J_C + J_C - 3) + 3J_A^2 + J_C(J_C - 1)(p_c^2 J_C + 3)); \\ v_1 &= H_3^2(2p_c^2(J_A - J_C) + J_A + 3(J_C - 1)) + H_3 p_c(3J_A^2(2p_c^2 - 1) \\ &\quad - J_A(4p_c^2(J_C + 1) + J_C - 4) - J_C(2p_c^2 + 3)(J_C - 2) - 3) \\ &\quad + 3p_c^2(J_C - 1)(3J_A + J_C - 3) - p_c^4(J_A - J_C)(3J_A(J_C - 2) + 4J_C^2 - 10J_C + 6)); \quad (20) \\ v_3 &\equiv \det M = J_A J_C p_c^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 \equiv \det K &= 3(p_c^3(J_C - J_A) - H_3)(H_3(1 - J_C + p_c^2(J_C - J_A)) \\ &\quad - p_c(J_C - 1)(4(1 - J_A) + (J_C - J_A)(p_c^2 - 1))). \end{aligned}$$

Главный диагональный минор первого порядка матрицы (19) на интервалах (15) отрицателен. Следовательно, матрица K не является положительно определённой и равновесие (9) будет неустойчиво.

Известно, что если положение равновесия неустойчиво при потенциальных силах, то из теоремы Томсона — Тета — Четаева о влиянии гироскопических сил [7] следует, что гироскопическая стабилизация возможна только для систем с чётной степенью неустойчивости. Чётность (нечётность) степени неустойчивости по Пуанкаре определяется положительностью (отрицательностью) определителя матрицы потенциальных сил.

Поставим вопрос о возможности гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия (9) при условии $\det K > 0$. Множество в пространстве параметров, удовлетворяющее последнему неравенству, определяет область с чётной степенью неустойчивости:

$$\begin{aligned} 1/2 < J_A < 1 \wedge 1 - J_A < J_C < J_A \wedge -1 < p_c < 0 \\ \wedge p_c^3(J_C - J_A) < H_3 < \frac{p_c(J_C - 1)(4(1 - J_A) + (J_C - J_A)(p_c^2 - 1))}{1 - J_C + p_c^2(J_C - J_A)}. \end{aligned}$$

Для определения свойства гироскопической стабилизации необходимо найти, в какой части области с чётной степенью неустойчивости выполняются оставшиеся неравенства (4) (кроме $v_3 \equiv \det M > 0$, $v_0 \equiv \det K > 0$). Вместо решения этой системы неравенств сначала рассмотрим более простую задачу. Символьное решение системы неравенств, определяющих положительность коэффициентов характеристического уравнения из (20), получено с помощью функции

$$\begin{aligned} \text{Reduce}[\{1/2 < J_A < 1, 1 - J_A < J_C < J_A, -1 < p_c < 1, \\ p_c \neq 0, H_3 > 0, \det K > 0, v_1 > 0, v_2 > 0\}, \{J_A, J_C, p_c, H_3\}, \text{Reals}] \end{aligned}$$

и имеет ответ: FALSE. Очевидно, что полная система неравенств (4) также будет несовместна. В результате можно сформулировать следующее

Утверждение 2. Неустойчивое равновесие (9) для параметров из интервалов (15) не может быть стабилизировано гироскопическими силами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогии с параметрическим анализом, представленным выше, необходимые условия устойчивости для положений равновесия (5)–(8) также были исследованы. Отметим, что при других условиях на моменты инерции гиростата (в рассмотренном случае $B > A > C$) можно ввести новые параметры и повторить анализ, применяя эти же функции (*Reduce*, *RegionPlot*, *RegionPlot3D*) символьно-численного моделирования.

Вообще говоря, необходимые условия не гарантируют устойчивость по Ляпунову в целом, а только для тех частей области устойчивости, где выполняется условие теоремы Лагранжа [7]. В представленном выше анализе это более тёмные области, полученные на рисунке. Однако получение необходимых условий устойчивости позволяет, например, рассмотреть возможность гироскопической стабилизации неустойчивой системы под действием потенциальных сил. Как показано в [12, 13], для осесимметричного гиростата такая стабилизация некоторых неустойчивых положений равновесия иногда может быть реализована за счёт подходящего выбора гиросtatического момента и значений параметров из определённых областей.

Отличительной особенностью представленных исследований является то, что практически все вычисления на компьютере проводились в символьном или символьно-численном виде, к тому же дифференциальные уравнения движения и коэффициенты характеристического уравнения получены в автоматическом режиме с помощью созданного ПК на базе СКА «Mathematica».

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ АН СССР, 1978. Т. 11. С. 5–224. (Итоги науки и техники).
2. Анчев А. А., Атанасов В. А. Анализ необходимых и достаточных условий устойчивости равновесий спутника-гиростата // Космические исследования. 1990. Т. 28, вып. 6. С. 831–836.
3. Банщиков А. В., Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016618253 от 25.07.2016. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).
4. Банщиков А. В. Анализ динамики механических систем большой размерности средствами компьютерной алгебры // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 15–27.
5. Банщиков А. В., Бурлакова Л. А., Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 6. С. 3–18.
6. Козлов В. В. О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 390–397.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
8. Гутник С. А., Сантуш Л., Сарычев В. А., Силва А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента; положения равновесия и их устойчивость // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 142–155.
9. Гутник С. А., Сарычев В. А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования стационарных движений спутника-гиростата // Программирование. 2017. № 2. С. 35–44.

10. Чайкин С. В. Множество относительных равновесий стационарного орбитального несимметричного гиростата // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 1. С. 116–121.
11. Сарычев В. А., Мирер С. А., Дегтярев А. А. Динамика спутника-гиростата с вектором гиросtatического момента в главной плоскости инерции // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 1. С. 61–74.
12. Банщиков А. В., Чайкин С. В. Анализ устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата средствами символично-численного моделирования // Космические исследования. 2015. Т. 53, № 5. С. 414–420.
13. Банщиков А. В. Параметрический анализ условий гироскопической стабилизации относительных равновесий сплюснутого осесимметричного гиростата // Мат. моделирование. 2016. Т. 28, № 4. С. 33–42.

UDC 519.688:531.36

SYMBOLIC-NUMERICAL ANALYSIS OF THE NECESSARY STABILITY CONDITIONS FOR THE RELATIVE EQUILIBRIA OF AN ORBITAL GYROSTAT

© 2020 A. V. Banshchikov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
ul. Lermontova 134, PO Box 292, Irkutsk 664033, Russia*

E-mail: bav@icc.ru

Received 30.10.2019, revised 30.10.2019, accepted 09.04.2020

Abstract. Using the software developed on the basis of the computer algebra system “Mathematica”, we study the rotational motion along the circular orbit of a satellite-gyrost in a Newtonian central field of forces. The linearized equations of a perturbed motion in the vicinity of the relative equilibrium of the system are constructed on a computer in symbolic form, and the necessary stability conditions are obtained for the equilibrium. Implementing the parametric analysis of the derived inequalities, we consider one of the cases when the vector of the gyrostatic moment of the system lies in one of the planes formed by the principal central axes of inertia. The obtained stability regions have an analytical form or a graphical representation as 2D images.

Keywords: orbital gyrost, equilibrium stability, symbolic-numerical simulation, applied software, computer algebra.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.201

REFERENCES

1. Sarychev V.A. Voprosy orientatsii iskusstvennykh sputnikov [Questions of orientation of artificial satellites]. *Issledovanie kosmicheskogo prostranstva*, Moscow: VINITI AN SSSR, 1978, Vol. 11, pp. 5–224 (in Russian).
2. Anchev A.A., Atanasov V.A. Analiz neobkhodimyykh i dostatochnyykh uslovii ustoychivosti ravnovesii sputnika-girostata [Analysis of necessary and sufficient conditions for stability of equilibria of a satellite-gyrost]. *Kosmicheskie issledovaniya* [Space Researches], 1990, Vol. 28, vyp. 6, pp. 831–836 (in Russian).
3. Banshchikov A.V., Irtegov V.D., Titorenko T.N. *Programmnyi kompleks dlya modelirovaniya v simvol'nom vide mekhanicheskikh sistem i elektricheskikh tsepei* [Bundled Software For Modeling In Symbolic Form Of Mechanical Systems And Electric Circuits]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlya EVM No. 2016618253 ot 25.07.2016. Federal'naya sluzhba po intellektual'noi sobstvennosti (ROSPATENT) [State registration certificate No. 2016618253 issued on July 25, 2016 by the Federal Service on Intellectual Property (ROSPATENT)] (in Russian).
4. Banshchikov A.V. Analiz dinamiki mekhanicheskikh sistem bol'shoi razmernosti sredstvami komp'yuternoi algebrы [Analysis of dynamics of high-dimension mechanical systems by using a computer algebra system]. *Sib. zhurn. industr. matematiki*, 2009, Vol. 12, No. 3, pp. 15–27 (in Russian).
5. Banshchikov A.V., Burlakova L.A., Irtegov V.D., Titorenko T.N. Simvol'nye vychisleniya v modelirovanii i kachestvennom analize dinamicheskikh sistem [Symbolic computation in modeling and qualitative analysis of dynamical systems]. *Vychisl. tekhnologii*, 2014, Vol. 19, No. 6, pp. 3–18 (in Russian).

6. Kozlov V.V. Stabilization of the unstable equilibria of charges by intense magnetic fields. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, Vol. 61, No. 3, pp. 377–384.
7. Chetaev N.G. *Ustoichivost' dvizheniya. Raboty po analiticheskoi mekhanike* [Stability of Motion. Studies in Analytical Mechanics]. Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1962 (in Russian).
8. Gutnik S.A., Santush L., Sarychev V.A., Silva A. Dynamics of a Gyrostat Satellite Subjected to the Action of Gravity Moment. Equilibrium Attitudes and Their Stability. *J. Comp. Syst. Sci. Internat.*, 2015, Vol. 54, No. 3, pp. 469–482.
9. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Application of Computer Algebra Methods for Investigation of Stationary Motion of a Gyrostat Satellite. *Program. Comput. Softw.*, 2017, Vol. 43, No. 2, pp. 90–97.
10. Chaikin S.V. The Set of Relative Equilibria of a Stationary Orbital Asymmetric Gyrostat. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 1, pp. 30–35.
11. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Dynamics of a gyrostat satellite with the vector of gyrostatic moment in the principal plane of inertia. *Cosmic Research*, 2008, Vol. 46, No. 1, pp. 60–73.
12. Banshchikov A.V., Chaikin S.V. Analysis of the stability of relative equilibria of a prolate axisymmetric gyrostat by symbolic-numerical modeling. *Cosmic Research*, 2015, Vol. 53, No. 5, pp. 378–384.
13. Banshchikov A.V. Parametricheskii analiz uslovii giroskopicheskoi stabilizatsii otnositel'nykh ravnovesii splusnutogo osesimmetrichnogo girostata [Parametric analysis of conditions of gyroscopic stabilization of the relative equilibria of an oblate axisymmetric gyrostat]. *Mat. modelirovanie* [Math. Modeling], 2016, Vol. 28, No. 4, pp. 33–42 (in Russian).