Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. M. Blokhin, B. V. Semisalov, Simulation of the stationary nonisothermal MHD flows of polymeric fluids in channels with interior heating elements, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 17–40

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.202>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.91.87.62

April 26, 2023, 13:48:00

УДК 519.632.4:532.135

РАСЧЁТ СТАЦИОНАРНЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ МГД ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ С ВНУТРЕННИМИ НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

© 2020 А. М. Блохин^{1,3a}, Б. В. Семисалов^{2,3b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,

²Федеральный исследовательский центр информационных
и вычислительных технологий,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,

³Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^ablokhin@math.nsc.ru , ^bvibis@ngs.ru

Поступила в редакцию 13.09.2019 г.; после доработки 05.12.2019 г.;
принята к публикации 05.12.2019 г.

На основе реологической мезоскопической модели Покровского — Виноградова, уравнений нерелятивистской магнитной гидродинамики и уравнения теплопроводности с диссипативными членами получена замкнутая связанная система нелинейных уравнений в частных производных, описывающая течения растворов и расплавов линейных полимеров с учётом реологии и наведённой анизотропии, а также механических, температурных и электромагнитных воздействий. Параметры уравнений установлены по данным механических испытаний с современными материалами и устройствами, используемыми в области аддитивных технологий (3D печати). Дана постановка задач о стационарных течениях полимерной жидкости в каналах с сечениями круговой и эллиптической форм с тонкими включениями — нагревательными элементами. Показано, что при определённых значениях параметров полученные уравнения допускают три стационарных решения высокого порядка гладкости. Именно такие гладкие решения обеспечивают бездефектное аддитивное производство. Для их поиска использован алгоритм на основе приближений без насыщения, метода коллокаций и метода установления. Исследована зависимость распределений скорости и температуры жидкости от градиента давления в канале.

Ключевые слова: полимерная жидкость, мезоскопическая модель, неизотермические МГД течения, диссипация тепла, нелинейная краевая задача, множественность решений, метод без насыщения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.202

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], растворы и расплавы линейных полимеров являются нелинейными вязкоупругими средами. В статье приведена модель динамики таких сред, которая является модификацией известной реологической мезоскопической модели Покровского — Виноградова [1–3], описывающей с высокой степенью достоверности сложную реологию и наведённую анизотропию растворов и расплавов полимеров. В разд. 1 приведены уравнения модели с безразмерными переменными, учитывающей также влияние температурных и электромагнитных полей, что является принципиальным для решения задач многих прикладных областей, в частности

задач, связанных с развитием и совершенствованием технологий аддитивного производства (3D печати) изделий на полимерной основе.

Естественным первым шагом на пути изучения описанной модели является нахождение характерных режимов стационарного течения полимеров, близких по своим качественным особенностям к известным течениям Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса (см. [4] и разд. 2). Именно такие режимы течений возникают при непрерывной подаче чернил в каналах печатающих устройств. Важно отметить, что при определённых значениях параметров в силу нелинейности модель допускает множественность стационарных гладких решений (см. разд. 3). Как правило, каналы имеют круговое или эллиптическое сечение и включают внутренние нагревательные элементы. Постановке краевых задач в таких областях посвящён разд. 4.

Идентификация параметров построенной модели и поставленных задач проведена по данным механических испытаний с современными материалами и устройствами, используемыми в аддитивных технологиях. Такие данные удалось получить из источников [5–15]; их сводная таблица, а также краткое резюме приведены в приложении. Для численного решения нелинейных краевых задач с заданными параметрами использован нелокальный метод без насыщения [16, 17], основанный на применении приближений Чебышёва и Фурье. Метод позволяет проводить расчёты с малыми затратами памяти и машинного времени и контролем погрешности в задачах с решениями высокой гладкости [18, 19]. Графики численных решений и комментарии к ним, а также исследование свойств течения в зависимости от градиента давления в канале приведены в разд. 5.

1. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПОКРОВСКОГО — ВИНОГРАДОВА

Следуя монографиям [1, 2, 4, 20–22] и статьям [23, 24], запишем уравнения модифицированной реологической модели Покровского — Виноградова, которая описывает неизотермические магнитогидродинамические (далее МГД) течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости и учитывает диссипацию тепла. Эти уравнения в безразмерной форме в прямоугольной Декартовой системе координат (x, y, z) выглядят следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \left(P + \frac{\sigma_m \|\mathbf{H}^2\|}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}(Y\Pi) + \sigma_m(\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{H} + \operatorname{Ga}(Y - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{u} + b_m \Delta_{x,y,z} \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y - 2a_{13} u_z + \mathfrak{L}_{11} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2a_{12} v_x - 2A_2 v_y - 2a_{23} v_z + \mathfrak{L}_{22} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{da_{33}}{dt} - 2a_{13} w_x - 2a_{23} w_y - 2A_3 w_z + \mathfrak{L}_{33} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{da_{12}}{dt} + w_z a_{12} - A_1 v_x - A_2 u_y - v_z a_{13} - u_z a_{23} + \mathfrak{L}_{12} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{da_{13}}{dt} - w_y a_{12} - A_1 w_x - A_3 u_z + v_y a_{13} - u_y a_{23} + \mathfrak{L}_{13} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{da_{23}}{dt} + u_x a_{23} - A_2 w_y - A_3 v_z - w_x a_{12} - v_x a_{13} + \mathfrak{L}_{23} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{\operatorname{Pr}} (\Delta_{x,y,z} Y + AY\Phi + A_m \Phi_m). \quad (11)$$

Здесь t — время; u, v, w — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ в декартовой системе координат x, y, z ; L, M, N — компоненты вектора напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}$; P — давление; a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, — компоненты симметрического тензора анизотропии Π второго ранга; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — столбцы симметрической матрицы $\Pi = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; $\|\mathbf{a}_i\|^2 = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$; $\text{div}(Y\Pi) = (\text{div}(Y\mathbf{a}_1), \text{div}(Y\mathbf{a}_2), \text{div}(Y\mathbf{a}_3))^T$; $Y = T/T_0$, T — температура, $T_0 = 293,15 \text{ K} = 20^\circ \text{ C}$ — температура окружающей среды; $\mathfrak{L}_{ij} = (K_I a_{ij} + \beta(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j))/\bar{\tau}_0(Y)$, $i, j = 1, 2, 3$; $K_I = W^{-1} + \frac{\bar{k}}{3}I$, $\bar{k} = k - \beta$, $I = (a_{11} + a_{22} + a_{33})$ — первый инвариант тензора анизотропии Π , $A_i = a_{ii} + W^{-1}$, $i = 1, 2, 3$; k, β , $0 < \beta < 1$, — феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (величина β учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число k — его размеры [1]; $\bar{\tau}_0 = \frac{J(Y)}{Y}$, $J(Y) = \exp\left(-\bar{E}_A \frac{Y-1}{Y}\right)$; $\text{Re} = \rho u_H l / \eta_0^*$ — число Рейнольдса, $\rho = \text{const}$ — плотность среды; $W = \tau_0^* u_H / l$ — число Вайсенберга; η_0^* , τ_0^* — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при $T = T_0$ [1, 5]; Φ, Φ_m — диссипативные функции (см. замечание 2); $\Delta_{x,y,z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{y,z}\right)$ — оператор Лапласа; $\Delta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}\mathbf{H} = (\Delta_{x,y,z}L, \Delta_{x,y,z}M, \Delta_{x,y,z}N)^T$; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)$, где для произвольных вектор-функций $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ вектор $(\mathbf{q}, \nabla)\mathbf{s}$ имеет вид

$$(\mathbf{q}, \nabla)\mathbf{s} = \left(q_1 \frac{\partial s_1}{\partial x} + q_2 \frac{\partial s_1}{\partial y} + q_3 \frac{\partial s_1}{\partial z}, q_1 \frac{\partial s_2}{\partial x} + q_2 \frac{\partial s_2}{\partial y} + q_3 \frac{\partial s_2}{\partial z}, q_1 \frac{\partial s_3}{\partial x} + q_2 \frac{\partial s_3}{\partial y} + q_3 \frac{\partial s_3}{\partial z}\right)^T;$$

$\text{Ga} = \text{Ra} / \text{Pr}$, $\bar{E}_A = E_A / T_0$; число Релея Ra , число Прандтля Pr и энергия активации E_A описаны в [4]; A, A_m — коэффициенты диссипации уравнения теплопроводности (11); $\sigma_m = \mu_0 H_0^2 / (\rho u_H^2)$ — коэффициент магнитного давления; $b_m = 1 / \text{Re}_m$, $\text{Re}_m = \sigma_e \mu_0 u_H l$ — магнитное число Рейнольдса; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, σ_e — электропроводность среды.

Система (1)–(11) записана в безразмерном виде, где время t ; координаты x, y, z ; компоненты вектора скорости u, v, w ; давление P ; компоненты вектора напряжённости магнитного поля L, M, N ; компоненты тензора анизотропии a_{ij} отнесены к l/u_H , $l, u_H, \rho u_H^2, H_0, W/3$ соответственно, где l — характерная длина, u_H — характерная скорость, H_0 — характерная величина напряжённости магнитного поля.

Большинство из параметров модели, описанных выше, удалось идентифицировать по результатам механических испытаний с полимерными материалами и устройствами 3D печати. Эти значения со ссылками на источники и комментариями приведены в приложении.

Замечание 1. Магнитогидродинамические уравнения (1)–(11) выведены с привлечением системы уравнений Максвелла [20, 21], причём вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ берётся в виде $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. На самом деле справедлива более общая формула [25, 26]:

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} = (1 + \chi) \mu_0 \mathbf{H}, \quad (12)$$

где μ — магнитная проницаемость, χ — магнитная восприимчивость, причём

$$\chi = \chi_0 / Y, \quad (13)$$

χ_0 — магнитная восприимчивость при $T = T_0 (= 293,15 \text{ K})$.

Замечание 2. Следуя [27], используем бинарную тензорную операцию «:» для задания диссипативных функций Φ, Φ_m в уравнении (11):

$$\Phi = \Pi : \nabla \mathbf{u} := \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) a_{12}$$

$$+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) a_{13} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) a_{23} + a_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m = \sigma_m \Pi_m : \nabla \mathbf{u} := \sigma_m \sum_{i,j=1}^3 L_i L_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sigma_m \left\{ L_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) L_1 L_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) L_1 L_3 + L_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) L_2 L_3 + L_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь $u_1(= u)$, $u_2(= v)$, $u_3(= w)$ и $L_1(= L)$, $L_2(= M)$, $L_3(= N)$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ и напряжённости $\mathbf{H}$ в декартовой системе координат $x_1(= x)$, $x_2(= y)$, $x_3(= z)$; $\Pi_m = (L_i L_j)$, $i, j = 1, \dots, 3$.

Замечание 3. В соответствии с [28, 29] систему (1)–(11) следует дополнить краевыми условиями для компонент вектора скорости (условия прилипания на стенке канала), для температуры и компонент магнитного поля на стенках канала. Ниже будут получены разрешающие уравнения для указанных переменных в каналах с сечениями в форме эллипса и круга с внутренними нагревательными элементами. Для каждой задачи будет дан конкретный вид граничных условий.

Как и в работах [28, 29], будем искать частное решение исходной системы (1)–(11) следующего вида:

$$\begin{aligned} v = w &\equiv 0, \quad u = \hat{u}(y, z), \\ P &= \hat{P}(x, y, z) = \mathcal{S}(y, z) - \hat{A}x, \\ a_{ij} &= \hat{a}_{ij}(y, z), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad Y = \hat{Y}(y, z). \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, будем считать, что $M = N = 0$, $L = \hat{L}(y, z)$. Такая ситуация реализуется при обмотке канала электрическим проводом или при погружении его в катушку.

Решение (16) соответствует стационарному течению полимерной жидкости в канале с прямоугольным сечением под действием постоянного перепада давления $\widehat{\Delta P}$ вдоль оси канала (см. рис. 1). Здесь

$$\hat{P}_x = -\hat{A} (= \text{const}) = \frac{1}{\text{Re}} \{ (\hat{Y} \hat{a}_{12})_y + (\hat{Y} \hat{a}_{13})_z \} + \text{Ga}(Y - 1) + \hat{L} \hat{L}_x, \quad \hat{A} = \frac{\widehat{\Delta P}}{\rho u_H^2 h}, \quad \hat{L}_x = 0,$$

где $\left(-\frac{\widehat{\Delta P}}{\rho u_H^2} \right)$ — безразмерный перепад давления на отрезке h , причём размерная величина $\widehat{\Delta P} > 0$. Для определения функций $\hat{u}$, $\mathcal{S}$, $\hat{a}_{ij}$, $\hat{Y}$ (см. (16)) из (3)–(11) получим следующие соотношения:

$$(\hat{Y} \hat{a}_{12})_y + (\hat{Y} \hat{a}_{13})_z = -\hat{D} = -\text{Re}[\hat{A} + \text{Ga}(\hat{Y} - 1)], \quad (17)$$

$$\mathcal{S}_y = \frac{1}{\text{Re}} [(\hat{Y} \hat{a}_{22})_y + (\hat{Y} \hat{a}_{23})_z] - \sigma_m \hat{L} \hat{L}_y, \quad \mathcal{S}_z = \frac{1}{\text{Re}} [(\hat{Y} \hat{a}_{23})_y + (\hat{Y} \hat{a}_{33})_z] - \sigma_m \hat{L} \hat{L}_z, \quad (18)$$

$$\Delta_{y,z} \hat{L} = 0, \quad (19)$$

$$K_f \hat{a}_{11} + \beta \|\hat{\mathbf{a}}_1\|^2 = 2\bar{\tau}_0(\hat{Y})(\hat{a}_{12} \hat{u}_y + \hat{a}_{13} \hat{u}_z), \quad (20)$$

$$K_f \hat{a}_{22} + \beta \|\hat{\mathbf{a}}_2\|^2 = 0, \quad K_f \hat{a}_{33} + \beta \|\hat{\mathbf{a}}_3\|^2 = 0, \quad (21)$$

$$K_f \hat{a}_{12} + \beta(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2) = \bar{\tau}_0(\hat{Y})(\hat{A}_2 \hat{u}_y + \hat{a}_{23} \hat{u}_z), \quad (22)$$

$$K_f \hat{a}_{13} + \beta(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_3) = \bar{\tau}_0(\hat{Y})(\hat{A}_3 \hat{u}_z + \hat{a}_{23} \hat{u}_y), \quad (23)$$

$$K_{\hat{I}}\hat{a}_{23} + \beta(\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3) = 0, \quad (24)$$

$$\Delta_{y,z}\hat{Y} + A\hat{Y}\hat{\Phi} = 0. \quad (25)$$

Здесь $K_{\hat{I}} = W^{-1} + \bar{k}/3\hat{I}$, $\hat{I} = \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{33}$, $\hat{A}_i = W^{-1} + \hat{a}_{ii}$, $i = 2, 3$; $\hat{\Phi} = \hat{u}_y\hat{a}_{12} + \hat{u}_z\hat{a}_{13}$.

Обращаем внимание, что в такой постановке в соответствии с (15) $\hat{\Phi}_m = 0$. Ниже крышечки над переменными, означающие, что мы работаем в классе решений вида (16), опущены.

Замечание 4. На рис. 1 вектор $\mathbf{g} = -g_a(1, 0, 0)^T$, где g_a — значение ускорения свободного падения. Величина g_a входит в определение числа Рэлея Ra, а соответствующий вектор — в последнее слагаемое уравнения (3).

Рис. 1. Канал с прямоугольным сечением

2. ВЫВОД РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В [28] были получены следующие соотношения на компоненты тензора анизотропии:

$$a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 0, \quad a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} = 0, \quad a_{23}^2 - a_{22}a_{33} = 0. \quad (26)$$

С учётом (26) перепишем (22), (23) в виде

$$\tilde{K}_I a_{12} = \bar{\tau}_0(A_2 u_y + a_{23} u_z), \quad \tilde{K}_I a_{13} = \bar{\tau}_0(A_3 u_z + a_{23} u_y),$$

т. е.

$$u_y = \mathcal{K} Y a_{12}, \quad u_z = \mathcal{K} Y a_{13}. \quad (27)$$

Здесь $\tilde{K}_I = K_I + \beta I$, $\mathcal{K} = \frac{W \tilde{K}_I}{J(1 + W\sigma)}$, $\sigma = a_{22} + a_{33}$, $I = a_{11} + \sigma$.

Из уравнения (24) с учётом (26) получаем

$$a_{23} = -\frac{\beta a_{12} a_{13}}{K_I + \beta \sigma}. \quad (28)$$

Складывая первое и второе уравнения (21) и учитывая (26), будем иметь

$$K_I \sigma + \beta(\sigma^2 + \mu^2) = 0, \quad \mu^2 = a_{12}^2 + a_{13}^2. \quad (29)$$

Из (28), (29) следует $a_{23} = \sigma \frac{a_{12} a_{13}}{\mu^2}$. Поскольку $a_{22} a_{33} = a_{23}^2$ и $a_{22} + a_{33} = \sigma$, то

$$a_{22} = \sigma \frac{a_{12}^2}{\mu^2}, \quad a_{33} = \sigma \frac{a_{13}^2}{\mu^2}. \quad (30)$$

Вычитая из (20) соотношения (29) и полагая $\tilde{K}_I \neq 0$, имеем

$$a_{11} = \sigma + \frac{2W\mu^2}{1+W\sigma}, \quad I = 2\left(\sigma + \frac{W\mu^2}{1+W\sigma}\right). \quad (31)$$

Наконец, используя соотношения (27) и выражения для $\bar{\tau}_0$, приходим к нелинейному уравнению для определения μ :

$$\tilde{K}(\mu^2)\mu = \Lambda := \bar{\tau}_0\lambda, \quad (32)$$

где $\lambda^2 = u_y^2 + u_z^2$, $\tilde{K}(\mu^2) = \mathcal{K}(\mu^2)J = \frac{W\tilde{K}_I(\mu^2)}{1+W\sigma(\mu^2)}$. Таким образом, для определения $\mu(\Lambda)$ из (32) необходимо прежде всего найти решения $\sigma(\mu^2)$ нелинейного уравнения (29). Исследование этих решений приведём ниже, но прежде сформулируем краевую задачу для поиска скорости течения u в канале с прямоугольным сечением (см. рис. 1).

С учётом (27) из (17) следует

$$(Ju_y/\tilde{K})_y + (Ju_z/\tilde{K})_z = -D. \quad (33)$$

Соотношение (32) определяет зависимость $\mu = \mu(\Lambda)$. Следовательно, переписывая уравнение (33) по аналогии с [28], сформулируем краевую задачу для скорости u :

$$\hat{a}u_{yy} - 2\hat{b}u_{yz} + \hat{c}u_{zz} + \hat{d}u_y + \hat{e}u_z = -D\tilde{K}, \quad u = 0 \text{ при } (y, z) \in \partial\Omega, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 1 - u_y^2\mathcal{L}, \quad \hat{c} = 1 - u_z^2\mathcal{L}, \quad \hat{b} = u_y u_z \mathcal{L}, \\ \hat{d} &= (1 - \Delta)\frac{Y_y}{Y} - \Delta\bar{E}_A\frac{Y_y}{Y^2}, \quad \hat{e} = (1 - \Delta)\frac{Y_z}{Y} - \Delta\bar{E}_A\frac{Y_z}{Y^2}, \\ \mathcal{L} &= \frac{1 - \Delta}{\lambda^2}, \quad \Delta = \frac{\Lambda}{\mu}\mu_\Lambda. \end{aligned}$$

Дифференцируя соотношение (32) по Λ , используя (31) и выражения для $\tilde{K}$, находим

$$\begin{aligned} \mu_\Lambda &= \frac{1}{\tilde{K}_\mu\mu + \tilde{K}}, \quad \tilde{K} = \frac{1 + W\sigma + 2W(\bar{k}/3 + \beta)(\sigma(1 + W\sigma) + W\mu^2)}{(1 + W\sigma)^2}, \\ \tilde{K}_\mu &= \frac{W\sigma_\mu}{(1 + W\sigma)^2}[2(\bar{k}/3 + \beta) - 1] + \frac{4W^2\mu}{(1 + W\sigma)^3}(\bar{k}/3 + \beta)[W\sigma - W\mu\sigma_\mu + 1]. \end{aligned}$$

Здесь функция $\sigma = \sigma(\mu^2)$ может иметь три ветви (конкретные выражения приведены ниже). Подставляя выражения этих ветвей в выражение для $\tilde{K}$, а его, в свою очередь, в уравнение (32), можно составить громоздкое нелинейное уравнение для записи функции μ через Λ . В аналитическом виде это уравнение разрешить не удаётся. Однако если решение нелинейного уравнения (34) искать с помощью итерационного метода, то для выражения $\mu^{[n]}$ на n -й итерации естественно воспользоваться уравнением (32):

$$\mu^{[n]} = \frac{\bar{\tau}_0\lambda}{\tilde{K}((\mu^{[n-1]})^2)}. \quad (35)$$

Задачу (34) необходимо дополнить краевыми задачами для температуры и магнитного поля. С учётом (25)–(27) получаем

$$\Delta_{y,z}Y + AY\lambda\mu = 0. \quad (36)$$

Уравнение для L остаётся прежним (см. (19)). Граничные условия для этих уравнений сформулированы в следующем разделе.

После расчёта распределений $u(y, z)$, $Y(y, z)$, $L(y, z)$, из уравнений (27), (30), (31) и соотношения $a_{23} = \sigma \frac{a_{12}a_{13}}{\mu^2}$ находим распределения компонент тензора анизотропии Π , и, наконец, распределение давления находится с использованием (18).

3. АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (34)

Вернёмся теперь к поиску решений $\sigma(\mu^2)$ уравнения (29), фигурирующих в формулах для $\tilde{K}$ и $\tilde{K}_\mu$. Подставляя в (29) выражения для K_I , с учётом $\sigma = a_{22} + a_{33}$ после преобразований получаем уравнение третьей степени:

$$\begin{aligned} a\sigma^3 + b\sigma^2 + c\sigma + d &= 0, \quad \sigma \neq -1/W, \\ a &= \tilde{\beta}W, \quad b = \tilde{\beta} + 1, \quad c = W^{-1} + W\mu^2\tilde{\beta}, \quad d = \beta\mu^2, \quad \tilde{\beta} = 2\bar{k}/3 + \beta. \end{aligned} \quad (37)$$

Следуя формулам Кардано для решения кубических уравнений, введём обозначения

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}, \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

После преобразований получаем $p = \mu^2 - \mathcal{A}$, $q = \mathcal{B}\mu^2 + \mathcal{C}$, где

$$\mathcal{A} = \frac{1 - \tilde{\beta} + \tilde{\beta}^2}{3\tilde{\beta}^2W^2}, \quad \mathcal{B} = \frac{3\beta - \tilde{\beta} - 1}{3W\tilde{\beta}}, \quad \mathcal{C} = \frac{(1 + \tilde{\beta})(\tilde{\beta} - 2)(2\tilde{\beta} - 1)}{27W^3\tilde{\beta}^3}.$$

Далее нас будут интересовать только вещественные корни уравнения (37). При $Q > 0$ существует единственный вещественный корень:

$$\sigma_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{Q}} - b/3a;$$

при $Q = 0$ имеются два корня:

$$\sigma_1 = -\sqrt[3]{4q} - b/3a, \quad \sigma_2 = \sqrt[3]{q/2} - b/3a;$$

при $Q < 0$ имеются три вещественных корня:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -2\cos\alpha \sqrt[6]{q^2/4 - Q} - b/(3a), \quad \sigma_{2,3} = -\sqrt[6]{q^2/4 - Q}(-\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha) - b/(3a), \\ \alpha &= \arctg(2\sqrt{-Q}/q)/3. \end{aligned}$$

Здесь и ниже модули поставлены для выполнения условия непрерывной зависимости корней уравнения (37) от Q в окрестности точки $Q = 0$.

В первом случае несложно рассчитать, что

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\mu} = \sigma'_1 = \frac{(\mathcal{Q}'/\sqrt{Q} - q')(\sqrt{Q} + q/2)^{2/3} - (\mathcal{Q}'/\sqrt{Q} + q')(\sqrt{Q} - q/2)^{2/3}}{6(Q - q^2/4)^{2/3}}.$$

В третьем случае

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\mu} = \sigma'_1 = \frac{-2^{2/3}}{3\sqrt{-Q}|(q^2 - 4Q)^{5/6}|}((q\sin\alpha - 2\sqrt{-Q}\cos\alpha)\mathcal{Q}' + (q\sqrt{-Q}\cos\alpha - 2Q\sin\alpha)q'),$$

$$\frac{\partial \sigma_{2,3}}{\partial \mu} = \sigma'_{2,3} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{2}\sqrt{-Q}|(q^2 - 4Q)^{5/6}|} (\pm(\sqrt{3}\cos\alpha \pm \sin\alpha)(2Qq' - qQ') + (\cos\alpha \mp \sqrt{3}\sin\alpha)(2Q' - qq')\sqrt{-Q}),$$

где для σ_2 выбираем верхний знак из знаков $\pm$, $\mp$, для σ_3 — нижний;

$$q' = \frac{\partial q}{\partial \mu} = -2\mu \frac{1 - 3\beta + \tilde{\beta}}{3\tilde{\beta}W},$$

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial \mu} = \frac{\mu}{27\tilde{\beta}^4 W^4} \{27\beta^2 \tilde{\beta}^2 \mu^2 W^2 + \tilde{\beta}(1 + \tilde{\beta}\mu^2 W^2)[\tilde{\beta}(\tilde{\beta}(6\mu^2 W^2 - 1) + 4) - 1] - \beta(1 + \tilde{\beta})[\tilde{\beta}(2\tilde{\beta}(9\mu^2 W^2 - 1) + 5) - 2]\}.$$

Для того чтобы определить, какой из указанных трёх вариантов реализуется, обозначим $M = \mu^2 \geq 0$ и рассмотрим функцию

$$Q(M) = 1/27M^3 + (\mathcal{B}^2/4 - \mathcal{A}/9)M^2 + (\mathcal{A}^2/9 + \mathcal{BC}/2)M + (\mathcal{C}^2/4 - \mathcal{A}^3/27).$$

Корни M_1, M_2, M_3 уравнения $Q(M) = 0$ можно также определить с помощью формул Кардано. Количество действительных корней и их положения определяют области положительных и отрицательных Q , т. е. количество решений исходного уравнения (37). Используя выражение дискриминанта $\tilde{\Delta}$ уравнения $Q(M) = 0$, можно рассчитать, сколько действительных корней имеет это уравнение. Здесь

$$\tilde{\Delta} = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4^3}{2^4 3^{12} \tilde{\beta}^{12} W^{12}}, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = 2\bar{k}/3, \quad a_3 = \beta - 1, \quad a_4 = (1 + \tilde{\beta})^3 - 9\beta(1 + (\tilde{\beta} - 1)\tilde{\beta}).$$

Замечание 5. Неравенство $\tilde{\Delta} < 0$ означает, что $M_1 \in \mathbb{R}$, $M_2 = \overline{M_3} \in \mathbb{C}$. Здесь и далее использован тот факт, что $M_2 M_3 \in \mathbb{R}$ и $M_2 M_3 \geq 0$. Равенство $\tilde{\Delta} = 0$ означает, что корни $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}$ и два из этих значений совпадают. Неравенство $\tilde{\Delta} > 0$ означает, что $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}$. Далее для таких $\tilde{\Delta}$ будем считать, что $M_1 < M_2 < M_3 \in \mathbb{R}$.

Приходим к следующим случаям.

Случай 1. Уравнение (37) имеет единственное решение во всех точках Ω , если: 1) $\tilde{\Delta} < 0$ и $M_1 < 0$ или 2) $\tilde{\Delta} \geq 0$ и $M_1 \leq M_2 \leq M_3 < 0$.

Случай 2. Уравнение (37) имеет единственное решение в тех точках Ω , где μ достаточно мало ($0 \leq \mu^2 < M_2$) или достаточно велико ($\mu^2 > M_3$), и неединственное решение во всех остальных точках, если $\tilde{\Delta} \geq 0$ и $M_1 \leq 0 < M_2 \leq M_3$.

Случай 3. Уравнение (37) имеет различные решения в тех точках Ω , где μ достаточно мало ($0 \leq \mu^2 \leq M_1$) или $M_2 \leq \mu^2 \leq M_3$, и единственное решение в остальных точках, если: 1) $\tilde{\Delta} < 0$ и $M_1 > 0$ или 2) $\tilde{\Delta} \geq 0$ и $0 < M_1 \leq M_2 \leq M_3$.

Случай 4. Уравнение (37) имеет различные решения в тех точках Ω , где μ достаточно мало ($0 \leq \mu^2 \leq M_3$), и единственное решение в остальных точках, если $\tilde{\Delta} \geq 0$ и $M_1 \leq M_2 \leq 0 < M_3$.

Отметим, во-первых, что $Q(M) \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$. Во-вторых, в силу условий прилипания на стенках канала в окрестности углов прямоугольного канала Ω скорость u , её производные, а значит, и значения λ близки к нулю. Единственным корректным с физической точки зрения решением уравнения (32) при $\lambda = 0$ является $\mu = 0$. Таким образом, в предположении непрерывности компонент тензора напряжений в области решения задачи есть точки со значениями $\mu = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}$, сколь угодно близкими к нулю.

Учитывая неравенства случаев 1–4 и формулы Виета для решений уравнения 3-й степени, приходим к следующим условиям для определения правой части и коэффициентов краевой задачи (34).

Далее сохраняется прежняя нумерация случаев 1–4, описанных выше для уравнения (37), но теперь эти утверждения будут сформулированы для правой части и коэффициентов уравнения (34).

Случай 1'. Правая часть и коэффициенты уравнения (34) определяются однозначно, если: 1) $\tilde{\Delta} < 0$ и $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - 27\mathcal{C}^2/4 < 0$ или 2) $\tilde{\Delta} \geq 0$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 &= 3\mathcal{A} - 27\mathcal{B}^2/4 < 0, \\ \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 &= 3\mathcal{A}^2 + 27\mathcal{B}\mathcal{C}/2 > 0, \quad \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - 27\mathcal{C}^2/4 < 0.\end{aligned}$$

Случай 2'. Правая часть и коэффициенты уравнения (34) определяются однозначно в классе непрерывных функций, но могут иметь бесконечное множество значений в классе разрывных функций, если $\tilde{\Delta} \geq 0$ и $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - 27\mathcal{C}^2/4 \leq 0$ и при этом либо

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A} - 27\mathcal{B}^2/4 \geq 0,$$

либо

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A}^2 + 27\mathcal{B}\mathcal{C}/2 < 0.$$

Прокомментируем этот случай. Если значения λ во всех точках Ω настолько малы, что значения μ находятся в окрестности нулевого решения (32), $\mu^2 < \mathcal{M}_2$, то правая часть и коэффициенты уравнения (34) определяются однозначно с использованием выражения $\sigma_1(\mu^2)$. В противном случае в области Ω возникают точки, где для определения правой части и коэффициентов можно использовать любое из выражений $\sigma_{1,2,3}(\mu^2)$, и тогда мы имеем бесконечное множество вариантов определения коэффициентов и правой части (34) в классе разрывных функций (задача с многозначным оператором) и единственный вариант в классе непрерывных функций, соответствующий ветви $\sigma_1(\mu^2)$.

Случай 3'. Правая часть и коэффициенты уравнения (34) определяются неоднозначно в классе как непрерывных, так и разрывных функций, если $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - 27\mathcal{C}^2/4 > 0$ и при этом либо $\tilde{\Delta} < 0$, либо $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A} - 27\mathcal{B}^2/4 > 0$, $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A}^2 + 27\mathcal{B}\mathcal{C}/2 > 0$.

В этом случае при достаточно малых λ имеются три различных варианта задания непрерывных правой части и коэффициентов уравнения (34) по значениям $\sigma_{1,2,3}(\mu^2)$. Если же в некоторой точке Ω значения λ оказались больше некоторого порогового значения λ^* (этот факт определяется неравенством $\mu^2 > \mathcal{M}_1$), то правая часть и коэффициенты уравнения (34) в окрестности этой точки определяются однозначно по решению $\sigma_1(\mu^2)$. В силу того, что в области Ω всегда есть точки со значениями $\mathcal{M}$, сколь угодно близкими к нулю, множество значений дифференциального оператора уравнения (34) имеет мощность континуума. Отметим также, что при фиксированном распределении температуры $Y(y, z)$ значение λ^* соответствует некоторому пороговому значению градиента давления $\hat{A}^*$, при превышении которого градиенты скорости становятся достаточно большими, чтобы решение μ уравнения (32) оказалось на достаточном расстоянии от нулевого решения этого же уравнения при $\lambda = 0$, конкретно на расстоянии, большем $\sqrt{\mathcal{M}_1}$. Из этого легко сделать вывод, что при $\hat{A} < \hat{A}^*$ в классе непрерывных функций имеется три варианта записи разрешающего уравнения (34), при $\hat{A} > \hat{A}^*$ вариант всего один.

Случай 4'. Правая часть и коэффициенты уравнения (34) определяются неоднозначно в классе как непрерывных, так и разрывных функций, если $\tilde{\Delta} \geq 0$, $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - 27\mathcal{C}^2/4 \geq 0$ и при этом либо $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A} - 27\mathcal{B}^2/4 \leq 0$, либо $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = 3\mathcal{A}^2 + 27\mathcal{B}\mathcal{C}/2 < 0$.

Этот случай аналогичен предыдущему за тем исключением, что факт превышения порогового значения λ^* определяется неравенством $\mu^2 > \mathcal{M}_3$.

В завершение исследования множества значений оператора задачи (34) отметим, что

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = \mathcal{A}^3 - \frac{27\mathcal{C}^2}{4} = \frac{(\tilde{\beta} - 1)^2}{4W^6\tilde{\beta}^4} \geq 0.$$

Это означает, что реализуются только случаи 3 или 4.

Замечание 6. Отметим, что вопрос о единственности решений квазилинейных эллиптических уравнений является трудным и может быть решён только в отдельных частных случаях. В данной работе строгий анализ существования и единственности решений задачи (34), (36), (19) при использовании выражений $\sigma_{1,2,3}(\mu)$ не проводился. Однако в численных экспериментах при использовании σ_1 и σ_3 удалось получить два различных приближённых решения (см. разд. 5.1). Чтобы понять, какое из этих решений реализуется при стационарном течении полимерной жидкости на практике, необходим дополнительный анализ устойчивости каждого полученного решения, причём в исходной пространственной постановке.

Замечание 7. При $\bar{k} = 0$ вместо уравнения (37) несложно получить квадратное уравнение для σ . Корни этого уравнения легко находятся: $\sigma = \pm\sqrt{1 - q^2} - 1/(2\tilde{W})$, $q^2 = (2\tilde{W}\mu)^2 < 1$, $\tilde{W} = \beta W$. В таком случае выражение для $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{K}}/J, \quad \tilde{\mathcal{K}} = \frac{2\beta(\rho\sqrt{1 - q^2} + 1)}{(\rho + \sqrt{1 - q^2})^2}, \quad \rho = 2\beta - 1, \quad |\rho| < 1.$$

После громоздких выкладок, проведённых в [28], для случая $\bar{k} = 0$ получено

$$\Delta = \frac{(1 - \varkappa^2\tilde{t}^2)(1 + \tilde{t}^2)}{Q}, \quad Q = 1 - \varkappa^2\tilde{t}^4 - \frac{6\rho}{1 - \rho}\tilde{t}^2 + 4\Lambda\frac{\tilde{t}(1 - \tilde{t}^2)}{1 - \rho},$$

где $\tilde{t} = \tilde{g} \pm \sqrt{\tilde{g}^2 - 1}$, $\tilde{g} > 1$, при этом $\tilde{g} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Lambda^2}}{2\Lambda}$, $\Lambda = \sqrt{1 - \rho^2}W\Lambda$, $\varkappa = \sqrt{\frac{1 + \rho}{1 - \rho}}$.

В таком случае $\sigma = -\frac{(\varkappa t)^2}{\beta W(1 + (\varkappa t)^2)}$.

4. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КАНАЛАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И КРУГОВОГО СЕЧЕНИЙ С НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

4.1. Канал с эллиптическим сечением

Рассмотрим течение в цилиндрическом канале $\tilde{\Omega}$ с эллиптическим сечением и тонким нагревательным элементом эллиптической формы с теми же фокусами, что у внешней границы канала (рис. 2, а).

Предполагается, что внутренняя стенка канала (внутренний эллипс) изготовлена из вещества, который является парамагнетиком, например из алюминия или вольфрама, для которого магнитная восприимчивость $\chi_{0H} > 0$. На поверхности внутреннего эллипса присутствует обмотка, причём на единицу длины (1 м в СИ) приходится n витков. В таком случае внутри канала возникает магнитное поле с единственной ненулевой компонентой вектора напряжённости L (см. (16)).

Рис. 2. Сечения канала эллиптической формы с нагревательным элементом (а) и канала, образованного двумя цилиндрами с расстоянием d между осями (б)

Запишем задачу (34) в эллиптических координатах α, γ :

$$y = \delta \operatorname{ch} \alpha \sin \gamma, \quad z = \delta \operatorname{sh} \alpha \cos \gamma, \quad (38)$$

где $\delta = \sqrt{1 - r_1^2}$ (2δ — фокусное расстояние), $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. В силу (38) имеем

$$y_\alpha = -z_\gamma = \delta \operatorname{sh} \alpha \sin \gamma, \quad z_\alpha = y_\gamma = \delta \operatorname{ch} \alpha \cos \gamma, \quad y_{\alpha\alpha} = -y_{\gamma\gamma} = y, \quad y_{\alpha\gamma} = z. \quad (39)$$

$$u_y = Ru_\alpha + Qu_\gamma, \quad u_z = Qu_\alpha - Ru_\gamma. \quad (40)$$

Здесь

$$R = \frac{y_\alpha}{y_\alpha^2 + y_\gamma^2} = \frac{\delta \operatorname{sh} \alpha \sin \gamma}{g^2}, \quad Q = \frac{y_\gamma}{y_\alpha^2 + y_\gamma^2} = \frac{\delta \operatorname{ch} \alpha \cos \gamma}{g^2}, \quad g^2 = \delta^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \cos^2 \gamma).$$

В силу (40) получим

$$\lambda^2 = u_y^2 + u_z^2 = \frac{1}{g^2} (u_\alpha^2 + u_\gamma^2). \quad (41)$$

С учётом (40) последовательно находим

$$\begin{aligned} u_{yy} &= R^2 u_{\alpha\alpha} + 2RQ u_{\alpha\gamma} + Q^2 u_{\gamma\gamma} + (RR_\alpha + QR_\gamma) u_\alpha + (RQ_\alpha + QQ_\gamma) u_\gamma, \\ u_{zz} &= Q^2 u_{\alpha\alpha} - 2RQ u_{\alpha\gamma} + R^2 u_{\gamma\gamma} + (QQ_\alpha - RR_\gamma) u_\alpha + (RR_\gamma - QR_\alpha) u_\gamma, \end{aligned} \quad (42)$$

при этом

$$R_\alpha = Q_\gamma = \frac{\delta^2 y (\cos^2 \gamma - \operatorname{sh}^2 \alpha)}{g^4}, \quad R_\gamma = -Q_\alpha = \frac{\delta^2 z (\operatorname{ch}^2 \alpha + \sin^2 \gamma)}{g^4}.$$

Аналогично находим

$$u_{yz} = RQ u_{\alpha\alpha} + (Q^2 - R^2) u_{\alpha\gamma} - RQ u_{\gamma\gamma} + (RQ_\alpha + QQ_\gamma) u_\alpha - (RR_\alpha + QR_\gamma) u_\gamma. \quad (43)$$

С учётом (42), (43) квазилинейное уравнение (34) примет следующий вид:

$$\tilde{a} u_{\alpha\alpha} - 2\tilde{b} u_{\alpha\gamma} + \tilde{c} u_{\gamma\gamma} + \tilde{d} u_\alpha + \tilde{e} u_\gamma = -D\hat{K}, \quad (44)$$

где

$$\tilde{a} = \hat{a} R^2 + \hat{c} Q^2 - 2\hat{b} RQ = \frac{1}{g^2} - \frac{u_\alpha^2}{g^4} \mathcal{L}, \quad \tilde{c} = \hat{a} Q^2 + \hat{c} R^2 + 2\hat{b} RQ = \frac{1}{g^2} - \frac{u_\gamma^2}{g^4} \mathcal{L},$$

$$\tilde{b} = \hat{b}(Q^2 - R^2) + RQ(\hat{c} - \hat{a}) = \frac{u_\alpha u_\gamma}{g^4} \mathcal{L},$$

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= (\hat{a} - \hat{c})(RR_\alpha + QR_\gamma) - 2\hat{b}(QR_\alpha - RR_\gamma) + R\hat{d} + Q\hat{e} \\ &= \frac{\mathcal{L}}{g^2} [(R_\gamma Q - R_\alpha R)(u_\alpha^2 - u_\gamma^2) - 2(R_\gamma R + R_\alpha Q)u_\alpha u_\gamma] + \frac{(1 - \Delta)Y - \Delta}{(Yg)^2} Y_\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= (\hat{a} - \hat{c})(QR_\alpha - RR_\gamma) + 2\hat{b}(RR_\alpha + QR_\gamma) + Q\hat{d} - R\hat{e} \\ &= \frac{\mathcal{L}}{g^2} [(R_\gamma R + R_\alpha Q)(u_\alpha^2 - u_\gamma^2) + 2(R_\gamma Q - R_\alpha R)u_\alpha u_\gamma] + \frac{(1 - \Delta)Y - \Delta}{(Yg)^2} Y_\gamma, \end{aligned}$$

при этом

$$R_\gamma Q - R_\alpha R = \frac{\delta^2}{g^4} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha, \quad R_\gamma R + R_\alpha Q = \frac{\delta^2}{g^4} \sin \gamma \cos \gamma.$$

Уравнение (44) необходимо дополнить уравнением теплопроводности (оно выводится из (36) на основе замены (38) и формул (39)–(41)):

$$Y_{\alpha\alpha} + Y_{\gamma\gamma} + (Ag\mu\sqrt{u_\alpha^2 + u_\gamma^2})Y = 0. \quad (45)$$

Уравнение для L принимает вид

$$L_{\alpha\alpha} + L_{\gamma\gamma} = 0. \quad (46)$$

Область решения уравнений (44)–(46) расположена между конфокальными эллипсами с малыми полуосями $r_0 < r_1$ (см. рис. 2, а), поэтому $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, где в соответствии с (38) $\alpha_{0,1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r_{0,1}}{1 - r_{0,1}} \right)$. Таким образом, будем искать решения уравнения (44)–(46) в классе достаточно гладких 2π -периодических по переменной γ функций, удовлетворяющих на стенках канала условиям прилипания для скорости

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \alpha_1 \quad (47)$$

и неоднородным условиям Дирихле для температуры и магнитного поля

$$Y(\alpha_0, \gamma) = \psi_0^Y(\gamma), \quad Y(\alpha_1, \gamma) = \psi_1^Y(\gamma), \quad (48)$$

$$L(\alpha_0, \gamma) = \psi_0^L(\gamma), \quad L(\alpha_1, \gamma) = \psi_1^L(\gamma). \quad (49)$$

Здесь $\psi_{0,1}^{Y,L}(\gamma)$ — заданные распределения температур и магнитных полей на внутренней и внешней стенках. При пропускании тока I_H по обмотке внутреннего канала в соответствии с [25, 26, 30] $\psi_0^L(\gamma) \equiv nI_H/H_0$ (H_0 — характерное значение напряжённости для обезразмеривания). В предположении, что канал находится во внешнем магнитном поле, сонаправленном с осью канала с напряжённостью $\mathbf{H}_0 = (L_0(\alpha, \gamma), 0, 0)$, и внешняя стенка канала имеет малую толщину, получаем $\psi_1^L(\gamma) = L_0(\alpha_1, \gamma)$. С использованием закона Кюри (см. [25, 26, 30, 31]) можно выразить температуру на внутренней стенке через её намагниченность m : $\psi_0^Y(\gamma) \equiv \chi H_0 n I_H / m$ (см. замечание 1). Функция $\psi_1^Y(\gamma)$ определяется внешним температурным полем. В наших расчётах будем полагать $\psi_1^Y(\gamma) \equiv T_0/T_0 = 1$.

Отметим, что при малых значениях r_0 в точках $\alpha = r_0$, $\gamma = \pi/2$ и $\alpha = r_0$, $\gamma = 3\pi/2$ (точки А и В на рис. 2, а) функция g , стоящая в знаменателях коэффициентов уравнения (44), принимает малые значения. Если умножить уравнение (44) на g^6 , то получим уравнение с малым параметром g^2 при старших производных. Это означает, что в окрестностях указанных точек решения этого уравнения могут иметь существенные особенности.

Замечание 8. Отметим, что в соответствии с рассуждениями разд. 3 вследствие гладкости границы рассматриваемого канала минимальные значения λ и μ могут быть сколь угодно велики, но они, как и раньше, пропорциональны градиенту давлений. При малых градиентах λ и μ малы, потому в классе непрерывных функций возможны три варианта записи уравнения (44), соответствующие σ_1 , σ_2 , σ_3 . При увеличении давления (когда в области $\tilde{\Omega}$ появляются точки с положительными и отрицательными значениями Q) остаётся единственный вариант записи (44) с непрерывными коэффициентами и правой частью и континуальное множество вариантов в классе разрывных функций. При дальнейшем росте градиента давления значения Q становятся положительными во всей области Ω , тогда остаётся единственный вариант записи (44) как в классе гладких, так и в классе разрывных функций.

4.2. Канал с сечением в форме круга

Поставим задачу о течении полимерной жидкости в канале $\hat{\Omega}$, образованном двумя цилиндрами радиусов $0 < r_0 < 1$ и $r_1 = 1$ с параллельными осями, отстоящими друг от друга на расстоянии d , $0 \leq d < 1 - r_0$. На рис. 2, б показано поперечное сечение канала. Мы предполагаем, как и в предыдущей постановке, что внутренняя стенка канала (в данном случае цилиндр) обмотана тонкой электропроводкой с числом витков n на единицу длины, пропускающей ток силы I_H .

Перейдём в уравнении (34) к биполярной системе координат. В рамках данного пункта обозначаем биполярные координаты (α, γ) :

$$\begin{aligned} y &= \delta_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}, \quad z = \delta_0 \frac{\sin \gamma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma}, \\ \delta_0 &= 1 - r_0^2/\nu, \quad \nu = \sqrt{d^2(1 + r_0^2) + 2d\omega}, \quad \omega = \sqrt{(1 - r_0^2)^2 + (dr_0)^2}, \\ 0 &\leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (50)$$

После проведения выкладок, аналогичных п. 4.1, для скорости, температуры и компоненты L напряжённости магнитного поля получим уравнения вида (44)–(46) с теми же выражениями коэффициентов $\tilde{a} - \tilde{e}$, но следующими изменениями: δ нужно заменить на δ_0 и вычислять часть выражений по формулам

$$\begin{aligned} y_\alpha &= -z_\gamma = \delta_0 \frac{1 - \cos \gamma \operatorname{ch} \alpha}{(\cos \gamma - \operatorname{ch} \alpha)^2}, \quad y_\gamma = z_\alpha = \delta_0 \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \alpha}{(\cos \gamma - \operatorname{ch} \alpha)^2}, \\ g &= \frac{\delta_0}{(\cos \gamma - \operatorname{ch} \alpha)}, \quad R = \frac{1 - \cos \gamma \operatorname{ch} \alpha}{\delta_0}, \quad Q = -\frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \alpha}{\delta_0}, \\ R_\alpha &= Q_\gamma = -\frac{\cos \gamma \operatorname{sh} \alpha}{\delta_0}, \quad R_\gamma = Q_\alpha = \frac{\sin \gamma \operatorname{ch} \alpha}{\delta_0}, \\ R_\gamma Q - R_\alpha R &= \frac{(\cos \gamma - \operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha}{\delta_0^2}, \quad R_\gamma R - R_\alpha Q = \frac{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \gamma) \sin \gamma}{\delta_0^2}. \end{aligned}$$

Уравнения окружностей радиусов r_0 и 1 (см. рис. 2, б) в биполярной системе координат (50) имеют вид

$$\alpha = \alpha_0 = \operatorname{arcth} \left(\frac{dr_0^2 + \omega}{1 - r_0^2} \right), \quad \alpha = \alpha_1 = \operatorname{arcth} \left(\frac{d + \omega}{1 - r_0^2} \right),$$

координаты центров окружностей в биполярной системе равны $y_0 = \operatorname{cth} \alpha_0$, $y_1 = \operatorname{cth} \alpha_1$.

Для задания граничных условий удобно также иметь выражения координат точек указанных окружностей в биполярной системе (α, γ) , через полярные координаты (r, φ) с полюсом в точке $(y_0, 0)$ для внутренней окружности:

$$\alpha(\varphi) = \operatorname{arth} \left(\frac{2(1 - r_0^2)(y_0 + r_0 \cos \varphi)}{(r_0^2 + 2r_0 y_0 \cos \varphi + y_0^2)\nu + (1 - r_0^2)^2/\nu} \right),$$

$$\gamma(\varphi) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2r_0(1 - r_0^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + 2r_0y_0 \cos \varphi + y_0^2)\nu - (1 - r_0^2)^2/\nu} \right)$$

и с полюсом в точке $(y_1, 0)$ для внешней:

$$\alpha(\varphi) = \operatorname{arth} \left(\frac{2(1 - r_0^2)(y_1 + \cos \varphi)}{(1 + 2y_1 \cos \varphi + y_1^2)\nu + (1 - r_0^2)^2/\nu} \right),$$

$$\gamma(\varphi) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2(1 - r_0^2) \sin \varphi}{(1 + 2y_1 \cos \varphi + y_1^2)\nu - (1 - r_0^2)^2/\nu} \right).$$

Решения уравнений (44) в задаче о течении между двумя цилиндрами принадлежат классу 2π -периодических по переменной γ функций, удовлетворяющих условиям Дирихле:

$$u(\alpha_0, \gamma) = u(\alpha_1, \gamma) = 0;$$

$$Y(\alpha_0, \gamma) = \psi_0^Y(\gamma) = \psi_0^Y(\gamma(\varphi)), \quad Y(\alpha_1, \gamma) = \psi_1^Y(\gamma) = \psi_1^Y(\gamma(\varphi)),$$

$$L(\alpha_0, \gamma) = \psi_0^L(\gamma) = \psi_0^L(\gamma(\varphi)), \quad L(\alpha_1, \gamma) = \psi_1^L(\gamma) = \psi_1^L(\gamma(\varphi)),$$

где $\psi_{0,1}^{Y,L}(\gamma(\varphi))$ — заданные распределения температур и магнитных полей по угловым координатам φ на внешней и внутренней окружностях. Их можно определить аналогично разд. 3.

Нетрудно заметить, что при малых r_0 величина α_0 принимает большие значения, поэтому в окрестности окружности $\alpha = \alpha_0$ значения функции g малы. При этом есть определённая неравномерность этого выражения по координате γ . Вместе с тем при d близких к нулю и r_0 близких к единице значения функции g опять оказываются близкими к нулю во всей области задачи. Как было отмечено в п. 4.1, данное обстоятельство может привести к существенным особенностям решения уравнения (44).

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

Будем использовать для решения краевой задачи (44)–(49), сформулированной в п. 4.1, нелокальный метод без насыщения (далее НМБН), реализованный на языке Java в виде пакета программ для ЭВМ [17]. В работах, указанных в списке литературы, читатель может найти подробное описание этого метода [16], оценки скорости сходимости и вычислительной погрешности [18], тестирование метода в задачах с особенностями, а также обоснование отсутствия насыщения метода при решении нелинейных краевых задач для уравнений эллиптического типа [19]. В результате аппроксимации неизвестных функций в уравнениях (44)–(46) прямым (тензорным) произведением интерполяционного полинома с узлами Чебышёва по переменной α и тригонометрического полинома с ядром Дирихле по переменной γ с использованием метода коллокаций и метода установления, реализованных в рамках НМБН, были получены численные решения задачи (по поводу применения полиномов с ядром Дирихле в рамках данного алгоритма см. [16]).

5.1. Течение в канале с эллиптическим сечением

На рис. 3 приведены распределения скорости течения полимерной жидкости в канале с сечением эллиптической формы при различных значениях градиента давления $\widehat{\Delta P}$ в канале с параметрами, соответствующими экспериментальным данным из [5–15] (см. приложение; далее для удобства значения давления приведены в атмосферах (атм)).

В соответствии с данными из табл. 1 и 2 (см. приложение) использованы следующие значения физических параметров: $\overline{E}_A = 0,614$, $\beta = 0,1$, $k = 1,2\beta$, $W = 0,1$, $H_0 = 1$ А/м, $n = 22$, $I_H = 22$ А, $t = 0,03$ А/м, $\chi_{H0} = 7,8 \times 10^{-5}$ (предполагаем, что нагревательный элемент

Рис. 3. Распределения скорости течения $u(y, z)$ (м/с) в дюзе эллиптической формы с нагревательным элементом при разных значениях градиента давления в дюзе: (а) $\Delta P = 0,7$ атм; (б) $\Delta P = 2,8$ атм; (в) $\Delta P = 4,8$ атм; (г) $\Delta P = 6,9$ атм

сделан из парамагнетика вольфрама). Значение коэффициента диссипации A не было найдено в литературе, в расчёте оно задано равным 3. Значения геометрических параметров были выбраны следующими: $r_0 = 0,1$, $r_1 = 0,5$. Степень тензорного произведения интерполяционных полиномов (количество узлов пространственной сетки) тоже была фиксирована и равна 21×21 . Отметим, что для заданных значений параметров $\hat{\Delta} < 0$, т. е. реализуется случай 3' из разд. 3 для правой части и коэффициентов уравнения (34), при этом $M_1 \approx 1882,32$. На рис. 4 приведены распределения температуры для рассмотренного режима.

Отметим, что приведённые значения соответствуют решению σ_1 уравнения (37). Однако заданные значения градиента давления достаточно малы, и существуют ещё два варианта записи уравнения (44) с непрерывными коэффициентами и правой частью (см. замечание 8). Отметим, однако, интересный факт, что для варианта записи с использованием $\sigma_2(\mu^2)$ не удаётся найти решений (метод установления не сходится при вариации параметров численного метода в широких диапазонах), в то время как при использовании $\sigma_3(\mu^2)$ решения найти удалось. Сечения распределений скорости течения и температуры, соответствующие двум ветвям $\sigma_{1,3}$, для случая $\widehat{\Delta P} = 6,9$ атм приведены на рис. 5. Видно, что максимальный разброс значений скорости и температуры для этих двух ветвей велик (решения отличаются в 5–7 раз). Для определения решения, которое реализуется на практике, необходим дополнительный анализ устойчивости каждого полученного решения, причём в исходной пространственной постановке. В заключение анализа множественности решений отметим, что для рассмотренного режима течения значения порогового градиента давления $\widehat{\Delta P}^* \approx 90$ атм (см. замечание 8). При $\widehat{\Delta P} < \widehat{\Delta P}^*$ удаётся найти два решения высокой гладкости, при $\widehat{\Delta P}^* < \widehat{\Delta P} < \widehat{\Delta P}^{\text{lim}} \approx 248$ атм удаётся найти только одно гладкое решение. При дальнейшем росте градиента давления метод установления перестаёт сходиться. Указанные пороговое и предельное значения градиен-

та $\widehat{\Delta P}^{lim}$ найдены с точностью до 1 атм в численных экспериментах.

Рис. 4. Распределения температуры жидкости $T(y, z)$ ($^{\circ}\text{C}$) в дюзе эллиптической формы с нагревательным элементом при разных значениях градиента давления в дюзе: (а) $\Delta P = 0,7$ атм; (б) $\Delta P = 2,8$ атм; (в) $\Delta P = 4,8$ атм; (г) $\Delta P = 6,9$ атм

Рис. 5. Сечение плоскостью $y = 0$ распределений скорости u (м/с) (а) и температуры T ($^{\circ}\text{C}$) (б), соответствующих двум различным решениям $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_3$ уравнения (37) при $\Delta P = 6,9$ атм

5.2. Течение в канале с круговым сечением

Применяя НМБН, удалось найти приближённые решения уравнений, описывающих неизотермические магнитогидродинамические течения полимерной жидкости между двумя цилиндрами (см. п. 4.2 и краевую задачу (44)–(49)). По аналогии с рассуждениями, приведёнными в п. 5.1, мы использовали экспериментальные данные из табл. 1 и 2 (разд. 6) и задали следующие значения физических параметров: $E_A = 0,614$; $A = 0,5$; $\beta = 0,1$; $k = 1,2\beta$; $W = 0,1$; $H_0 = 1$ А/м; $n = 22$; $I_H = 22$ А; $m = 0,03$ А/м; $\chi_{H0} = 7,8 \times 10^{-5}$. Значения геометрических параметров были выбраны следующими: $r_0 = 0,4$; $d = 0,2$. Степень тензорного

произведения интерполяционных полиномов была фиксирована и равна 31×31 . На рис. 6 даны значения скорости течения для рассмотренных режимов.

Рис. 6. Скорость течения $u(y, z)$ (м/с) в цилиндрической дюзе с нагревательным элементом при разных значениях градиента давления:
(а) $\widehat{\Delta P} = 0,7$ атм; (б) $\widehat{\Delta P} = 2,8$ атм; (в) $\widehat{\Delta P} = 4,8$ атм; (г) $\widehat{\Delta P} = 6,9$ атм

6. ПРИЛОЖЕНИЕ.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПИСАННОЙ МОДЕЛИ

Проведён анализ источников литературы, содержащих данные о реологических и термомеханических свойствах полимерных растворов с различной электропроводностью, а также данные об основных параметрах современных технологий аддитивного производства изделий из электропроводящих полимерных материалов. На основе приведённых данных определены значения основных параметров разрабатываемой модели течения полимерной жидкости (см. табл. 1).

К реологическим свойствам полимерных растворов и расплавов относятся прежде всего значения сдвиговой вязкости и времени релаксации, а также их зависимости от скоростей сдвига, температуры и концентрации раствора. Термомеханические свойства включают температуропроводность, теплоёмкость, коэффициент температурного расширения, энергию активации. К прочим свойствам, интересующим исследователей, относятся магнитная восприимчивость, вольт-амперные характеристики, максимальная плотность заряда, подвижность электронов.

Для изготовления электропроводящих устройств используются полимерные полупроводники, такие как полиэтилен гликоль, полиакриламид и др.; полимерные материалы с высокой электропроводностью (самым распространённым является PEDOT:PSS) и материалы на полимерной основе с добавлением наночастиц электропроводящих металлов (как правило, наночастиц серебра или золота).

Таблица 1

Значения параметров модели (1)–(11) для расчёта стационарного течения в дюзе 3D принтера

Название параметра	Обозначение в модели	Размерность в СИ	Ссылка на литературу	Диапазон значений	Значение для расчётов
1	2	3	4	5	6
Характерная скорость течения	u_H	м/с	[6, 7]	0,04–1 м/с; в отдельных случаях 3–5 м/с	1 м/с
Характерная длина (размер сечения)	l	микрон	[6]	0,1–250 микрон	100 микрон
Характерная температура	T_0	К	[8]	273–700 К (температура спекания)	293,15 К (20 °C)
Характерная напряжённость магнитного поля	H_0	А/м	—	Рассчитано по параметрам индукционных катушек	10^4 А/м
Магнитная проницаемость (PEDOT:PSS)	μ	безразмерна	[9]	$1 + 2,5 \times 10^{-4}$ $- 1 + 3,7 \times 10^{-4}$	$1 + 3 \times 10^{-4}$
Электропроводность раствора PEDOT:PSS	σ_e	$1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$	[8, 10]	$800 - 3 \times 10^4$ $1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$	10^4 $1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$
Начальные значения сдвиговой вязкости проводящего раствора PEDOT:PSS	η_0^*	Па · с	[11, 12]	$1,3 \times 10^{-3}$ $- 3 \times 10^{-1}$ Па · с	10^{-2} Па · с
Начальные значения времени релаксации проводящего раствора PEDOT:PSS	τ_0^*	с	[7]	6×10^{-6} $- 1,2 \times 10^{-4}$ с	10^{-5} с
Безразмерная энергия активации	$\bar{E}_A$	безразмерна	[13]	0,614–6,14	0,614
Коэффициент теплопроводности (для расчёта чисел Прандтля и Релея)	c_T	Вт/(м · К)	[14]	0,3–0,37 Вт/(м · К)	0,37 Вт/(м · К)
Удельная теплоёмкость (для расчёта чисел Прандтля и Релея)	c_P	Дж/(кг · К)	[14]	2000 (Дж/(кг · К)) (твёрдый полимер) –4180 (Дж/(кг · К)) (водный раствор малой концентрации)	4000 Дж/(кг · К)
Коэффициент температурного расширения (для расчёта числа Релея)	b	К^{-1}	[15]	$5 \times 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ (твёрдый полимер) – $6 \times 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ (водный раствор малой концентрации)	$5 \times 10^{-4} \text{ К}^{-1}$

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
Градиент давления в канале	$\widehat{\Delta P}$	Па	[6, 8]	$6,9 \times 10^4$ $-6,9 \times 10^5$ Па	10^5 Па
Безразмерный градиент при условии, что длина дюзы в 100 раз больше диаметра	$\hat{A}$	безразмерен	[6, 8]	0,69–6,9	1
Характеристика ориентации макромолекулярного клубка	β	безразмерен	[1, 5]	0–0,5	0,1
Характеристика размера макромолекулярного клубка	$\bar{k}$	безразмерен	[1, 5]	$\bar{k} \in [\beta; 1, 2\beta]$	$\bar{k} = 1, 2\beta$

В источниках литературы также имеется информация о механических характеристиках печатных устройств: характерные размеры дюз и капель чернил, значения скоростей и потоков жидкости в дюзе, максимального разрешения при печати, давления в дюзах и т. п. Наиболее распространённые технологии печати — пьезоэлектрическая и термоструйная.

Все указанные данные были использованы для идентификации параметров разработанной модели для расчёта течений PEDOT:PSS (см. табл. 1). Значения феноменологических параметров β и $\bar{k}$ модели Покровского — Виноградова были исследованы в [1, 5]. Установлено, что для многих линейных полимеров $\beta \in [0; 0,5]$, $\bar{k} = \beta$ или $\bar{k} = 1, 2\beta$.

Для расчёта чисел Рейнольдса, Вайсенберга, Релея, Прандтля для растворов PEDOT:PSS (см. табл. 2) были использованы формулы:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_H l}{\eta_0^*}, \quad W = \frac{\tau_0^* u_H}{l}, \quad \text{Ra} = \frac{g_a b \Delta T l^3 c_P \rho^2}{\eta_0^* c_T}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta_0^* c_P}{c_T},$$

где $\Delta T = 200$ К — характерная разность температур между стенками и жидкостью, $g_a = 9,81$ м/с² — ускорение свободного падения, $\rho = 1000$ кг/м³ — плотность жидкости. Для расчёта относительного безразмерного градиента давления $\hat{A}$ (см. (16)) предполагалось, что длина дюзы в 100 раз больше характерного размера сечения l : $h = 100$ (см. также рис. 1).

Таблица 2

Значения чисел Рейнольдса, Вайсенберга, Релея, Прандтля для растворов PEDOT:PSS

Название параметра	Обозначение в модели	Размерность в СИ	Диапазон значений	Значение для расчётов
Число Рейнольдса	Re	безразмерно	10	10
Число Вайсенберга	W	безразмерно	0,06–1,2	0,1
Число Релея	Ra	безразмерно	1,06	1,06
Число Прандтля	Pr	безразмерно	108,1	108,1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модель, описывающая стационарные неизотермические МГД течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в каналах с прямоугольным, эллиптическим и круговым сечениями. Показано, что модель допускает множественность решений и фактически содержит многозначный оператор, область значений которого состоит из конечного числа точек и заведомо невыпукла. Параметры модели идентифицированы по данным

испытаний материалов и устройств, используемых в сфере 3D печати. Для поиска достаточно гладких решений поставленных задач и анализа их множественности использован нелокальный алгоритм без насыщения. Для рассмотренного режима течения найдены два различных решения. Чтобы определить, какое из этих решений реализуется на практике, необходим дополнительный анализ их устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012.
2. Pokrovskii V. N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. Berlin: Springer-Verl., 2010.
3. Vinogradov G. V., Pokrovskii V. N., Yanovsky Yu. G. Theory of viscoelastic behavior of concentrated polymer solutions and melts in one-molecular approximation and its experimental verification // Rheol. Acta. 1972. V. 7. P. 258–274.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
5. Зинович С. А., Головичёва И. Э., Пышнограй Г. В. Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров // Прикл. математика и техн. физика. 2000. Т. 41, № 2. С. 154–160.
6. Ahn B. Y., Walker S. B., Slimmer S. C. et al. Planar and three-dimensional printing of conductive inks // J. Vis. Exp. 2011. V. 58: 3189; DOI: 10.3791/3189
7. Hoath S. D., Hsiao W.-K., Martin G. D. et al. Oscillations of aqueous PEDOT:PSS fluid droplets and the properties of complex fluids in drop-on-demand inkjet printing // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2015. V. 223. P. 28–36.
8. Lee H.-H., Chou K.-S., Huang K.-C. Inkjet printing of nanosized silver colloids // Nanotechnology. 2005. V. 16. P. 2436–2441.
9. Kahol P. K., Ho J. C., Chen Y. Y. et al. On metallic characteristics in some conducting polymers // Synthetic Metals. 2005. V. 151, Is. 2. P. 65–72.
10. Le T.-H., Kim Y., Yoon H. Electrical and electrochemical properties of conducting polymers // Polymers. 2017. V. 9, Is. 4, N 150; DOI: 10.3390/polym9040150
11. Muro K., Watanabe M., Tamai T. et al. PEDOT/PSS Nano-Particles: Synthesis and Properties // RSC Adv. 2016. V. 6, Is. 90. P. 87147–87152.
12. Yoon D. G., Kang M. G., Kim J. B. et al. Nozzle printed-PEDOT:PSS for organic light emitting diodes with various dilution rates of ethanol // Appl. Sci. 2018. V. 8, Is. 2, N 203; DOI: 10.3390/app8020203
13. Papathanassiou A. N., Sakellis I., Grammatikakis J. et al. Exploring electrical conductivity within mesoscopic phases of semiconducting PEDOT:PSS films by Broadband Dielectric Spectroscopy // Appl. Phys. Lett. 2013. V. 103: 123304; DOI: 10.1063/1.4821101
14. Liu J., Wang X., Li D. et al. Thermal conductivity and elastic constants of PEDOT:PSS with high electrical conductivity // Macromolecules. 2015. V. 48, Is. 3. P. 585–591.
15. Khan N. Z. Modeling and simulation of organic mem relay for estimating the coefficient of thermal expansion of PEDOT: PSS // TechConnect briefs. 2017. V. 4. P. 120–123.
16. Семисалов Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1110–1135.
17. Семисалов Б. В. Свидетельство о государственной регистрации № 2015615527 от 20 мая 2015 г. Программа поиска решений краевых задач для уравнений в частных производных с высокой точностью и малыми вычислительными затратами «Нелокальный метод без насыщения».
18. Семисалов Б. В. Быстрый нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана — Дирихле с контролем погрешности // Вычисл. методы. Программирование. 2016. Т. 17, № 4. С. 500–522.
19. Semisalov B. V. Development and analysis of the fast pseudo spectral method for solving nonlinear Dirichlet problems // Bull. South Ural State University. Series: Math. Modelling, Program. Comp. Software. 2018. V. 11, N 2. P. 123–138; DOI: 10.14529/mmp180210

20. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
21. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970.
22. *Pai Shih-I*. Introduction to the Theory of Compressible Flow. Whitefish: Literary Licensing, 2013.
23. Блохин А. М., Рудометова А. С. Стационарные течения слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 13–21.
24. Блохин А. М., Рудометова А. С. Стационарные решения уравнений, описывающих неизотермическую электроконвекцию слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 1. С. 3–13.
25. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А. Электромагнитизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985.
26. Нордлинг К., Остерман Д. Справочник по физике для учёного и инженера. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
27. *Shibata Y.* On the r-boundness for the two phase problem with phase transitions: compressible–incompressible // Model Problem. Funkcialaj Ekvacioj. 2016. V. 59. P. 243–287.
28. Блохин А. М., Семисалов Б. В., Шевченко А. С. Стационарные решения уравнений, описывающих неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Мат. моделирование. 2016. Т. 28, N 10. С. 3–22.
29. *Blokhin A. M., Kruglova E. A., Semisalov B. V.* Steady-state flow of an incompressible viscoelastic polymer fluid between two coaxial cylinders // Comp. Math. Math. Physics. 2017. V. 57, N 7. P. 1181–1193.
30. Калашников С. Г. Электричество. М.: Наука, 1964.
31. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970.

UDC 519.632.4:532.135

SIMULATION OF THE STATIONARY NONISOTHERMAL MHD FLOWS OF POLYMERIC FLUIDS IN CHANNELS WITH INTERIOR HEATING ELEMENTS

© 2020 A. M. Blokhin^{1,3a}, B. V. Semisalov^{2,3b}¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,**pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Federal Research Center for Information and Computational Technologies,**pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^ablokhin@math.nsc.ru , ^bvibis@ngs.ru

Received 13.09.2019, revised 11.12.2019, accepted 05.09.2019

Abstract. Basing on the rheological mesoscopic Pokrovskii–Vinogradov model, the equations of nonrelativistic magneto-hydrodynamics, and the heat conduction equation with dissipative terms, we obtain a closed coupled system of nonlinear partial differential equations that describes the flow of solutions and melts of linear polymers. We take into account the rheology and induced anisotropy of polymeric fluid flow as well as mechanical, thermal, and electromagnetic impacts. The parameters of the equations are determined by mechanical tests with up-to-date materials and devices used in additive technologies (as 3D printing). The statement is given of the problems concerning stationary polymeric fluid flows in channels with circular and elliptical cross-sections with thin inclusions (some heating elements). We show that, for certain values of parameters, the equations can have three stationary solutions of high order of smoothness. Just these smooth solutions provide the defect-free additive manufacturing. To search for them, some algorithm is used that bases on the approximations without saturation, the collocation method, and some special relaxation method. Under study are the dependencies of the distributions of the saturation fluid velocity and temperature on the pressure gradient in the channel.

Keywords: polymeric fluid, mesoscopic model, nonisothermal MHD flow, heat dissipation, nonlinear boundary-value problem, multiplicity of solutions, method without saturation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.202

REFERENCES

1. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograï G.V. *Vvedenie v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchesti polimernykh sistem* [Introduction to the Mesoscopic Theory of Flowing Polymer Systems]. Barnaul: Izd-vo AltGPA, 2012 (in Russian).
2. Pokrovskii V. N. *The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics*. Berlin: Springer-Verl., 2010.
3. Vinogradov G.V., Pokrovskii V.N., Yanovsky Yu.G. Theory of viscoelastic behavior of concentrated polymer solutions and melts in one-molecular approximation and its experimental verification. *Rheol. Acta*, 1972, Vol. 7, pp. 258–274.
4. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford: Stewartson Pergamon Press; Moscow: Nauka, 1978.

5. Zinovich S.A., Golovicheva I.E., Pyshnograï G.V. Vliyanie molekulyarnoi massy na sdvigovuyu i prodol'nyuyu vyazkost' lineinykh polimerov [Influence of the molecular weight on the shear viscosity and longitudinal viscosity of linear polymers]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika*, 2000, Vol. 41, No. 2, pp. 154–160 (in Russian).
6. Ahn B.Y., Walker S.B., Slimmer S.C. et al. Planar and three-dimensional printing of conductive inks. *J. Vis. Exp.*, 2011. Vol. 58: 3189; DOI: 10.3791/3189
7. Hoath S.D., Hsiao W.-K., Martin G.D. et al. Oscillations of aqueous PEDOT:PSS fluid droplets and the properties of complex fluids in drop-on-demand inkjet printing. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, Vol. 223, pp. 28–36.
8. Lee H.-H., Chou K.-S., Huang K.-C. Inkjet printing of nanosized silver colloids. *Nanotechnology*, 2005, Vol. 16, pp. 2436–2441.
9. Kahol P. K., Ho J. C., Chen Y. Y. et al. On metallic characteristics in some conducting polymers. *Synthetic Metals*, 2005, Vol. 151, Is. 2, pp. 65–72.
10. Le T.-H., Kim Y., Yoon H. Electrical and electrochemical properties of conducting polymers. *Polymers*, 2017, Vol. 9, Is. 4, No. 150; DOI: 10.3390/polym9040150
11. Muro K., Watanabe M., Tamai T. et al. PEDOT/PSS nano-particles: synthesis and properties. *RSC Adv.*, 2016, Vol. 6, Is. 90, pp. 87147–87152.
12. Yoon D.G., Kang M.G., Kim J.B. et al. Nozzle printed-PEDOT:PSS for organic light emitting diodes with various dilution rates of ethanol. *Appl. Sci.*, 2018, Vol. 8, Is. 2, No. 203; DOI: 10.3390/app8020203
13. Papathanassiou A.N., Sakellis I., Grammatikakis J. et al. Exploring electrical conductivity within mesoscopic phases of semiconducting PEDOT:PSS films by Broadband Dielectric Spectroscopy. *Appl. Phys. Lett.*, 2013, Vol. 103: 123304; DOI: 10.1063/1.4821101
14. Liu J., Wang X., Li D. et al. Thermal conductivity and elastic constants of PEDOT:PSS with high electrical conductivity. *Macromolecules*, 2015, Vol. 48, Is. 3, pp. 585–591.
15. Khan N.Z. Modeling and simulation of organic mem relay for estimating the coefficient of thermal expansion of PEDOT: PSS. *TechConnect Briefs*, 2017, Vol. 4, pp. 120–123.
16. Semisalov B.V. Nelokal'nyi algoritm poiska reshenii uravneniya Puassona i ego prilozheniya [A nonlocal algorithm for finding a solution to the poisson equation and its applications]. *Zhurn. Vychisl. Matematiki i Mat. Fiziki*, 2014, Vol. 54, No. 7, pp. 1110–1135 (in Russian).
17. Semisalov B.V. *Programma poiska reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s vysokoi tochnost'yu i malymi vychislitel'nymi zatratami "Nelokal'nyi metod bez nasyshcheniya"* [Computing Code for Finding Solutions to Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with High Accuracy and Low Computational Costs "Nonlocal Method Without Saturation"]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii No. 2015615527 ot 20 maya 2015 g. [State Registration Certificate No. 2015615527 Issued on May 20, 2015].
18. Semisalov B.V. Bystryi nelokal'nyi algoritm resheniya kraevykh zadach Neimana — Dirikhle s kontrolem pogreshnosti [Fast nonlocal algorithm for solving Neumann–Dirichlet boundary value problems with an error control]. *Vychisl. Metody. Programirovanie*, 2016, Vol. 17, No. 4, pp. 500–522 (in Russian).
19. Semisalov B.V. Development and analysis of the fast pseudo spectral method for solving nonlinear Dirichlet problems. *Bull. South Ural State University. Series: Math. Modelling, Program. Comp. Software*, 2018, Vol. 11, No. 2, pp. 123–138; DOI: 10.14529/mmp180210
20. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Mechanics of Continua]. Vol. 1. M.: Nauka, 1970 (in Russian).
21. Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. *Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalakh* [Magnetic Hydrodynamic Flows in Channels]. Moscow: Nauka, 1970.
22. Pai Shih-I. *Introduction to the Theory of Compressible Flow*. Literary Licensing, LLC, 2013.
23. Blokhin A.M., Rudometova A.S. Stationary Flows of a Weakly Conducting Incompressible Polymeric Liquid Between Coaxial Cylinders. *J. Appl. Indust. Math.*, 2017, Vol. 11, No. 4, pp. 486–493.
24. Blokhin A.M., Rudometova A.S. Stationary Solutions of the Equations for Nonisothermal Electroconvection of a Weakly Conducting Incompressible Polymeric Liquid. *J. Appl. Indust. Math.*, 2015, Vol. 9, No. 1, pp. 147–156.

25. Akhiezer A.I., Akhiezer I.A. *Electromagnetism and Electromagnetic Waves*. Moscow: Vysshaya Shkola, 1985 (in Russian).
26. Nordling K., Osterman D. *Physics Handbook for Science and Engineering*. Lund: Studentlitteratur, 1999; St. Petersburg: BXB-Peterburg, 2011.
27. Shibata Y. On the r-boundness for the two phase problem with phase transitions: compressible–incompressible. *Model Problem. Funkcialaj Ekvacioj*, 2016, Vol. 59, pp. 243–287.
28. Blokhin A.M., Semisalov B.V., Shevchenko A.S. Stationary solutions of the equations describing nonisothermal convection of an incompressible polymeric viscous-elastic liquid. *Mat. Modelirovanie*, 2016, Vol. 28, No. 10, pp. 3–22 (in Russian).
29. Blokhin A.M., Kruglova E.A., Semisalov B.V. Steady-state flow of an incompressible viscoelastic polymer fluid between two coaxial cylinders. *Comp. Math. Math. Physics*, 2017, Vol. 57, No. 7, pp. 1181–1193.
30. Kalashnikov S.G. *Elektrichestvo* [Electricity]. Moscow: Nauka, 1964 (in Russian).
31. Kubo R. *Thermodynamics: An Advanced Course with Problems and Solutions*. Amsterdam: North Holland, 1968; Moscow: Mir, 1970.