Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. Yu. Derevtsov, On the angular moment operators of attenuated ray transforms of scalar 3D-fields , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 51–62

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.204>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.84.234.179

April 26, 2023, 13:39:55

УДК 517.44:517.95

ОБ ОПЕРАТОРАХ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ
ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СКАЛЯРНЫХ 3D-ПОЛЕЙ

© 2020 Е. Ю. Деревцов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: dert@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.05.2019 г.; после доработки 21.02.2020 г.;
принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматриваются операторы угловых моментов, отображающих значения обобщённых экспоненциальных лучевых преобразований (ЭЛП) в множество симметричных p -тензорных полей. Дифференциальные соотношения между значениями ЭЛП различных порядков, действующих на стационарные или динамические распределения источников f , послужили основой для установления дифференциальных связей между тензорными полями угловых моментов различных порядков k и валентностей p . Отмечены частные случаи, позволяющие получить некоторые ранее известные результаты. Связи ЭЛП порядка k с задачами томографии и интегральной геометрии и установленные свойства и связи между ЭЛП и угловыми моментами могут послужить полезной дополнительной информацией при построении итерационных алгоритмов решения задач динамической рефракционной тензорной томографии.

Ключевые слова: экспоненциальное лучевое преобразование, обратная проекция, оператор углового момента, тензорное поле, уравнение переноса.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.204

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Преобразование Радона $\mathcal{R}f$ функции f

$$\mathcal{R}f(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\eta + t\xi) dt, \quad (1)$$

в прикладном отношении трактуемое как математическое описание механизма получения исходных данных в модели компьютерной томографии [1], хорошо известно и послужило источником многочисленных обобщений. В (1) использованы обозначения ξ для направляющего и η для нормального единичных векторов, задающих прямые $L_{\eta,s}$, вдоль которых выполняется интегрирование, и $|s|$ — расстояние от $L_{\eta,s}$ до начала заданной прямоугольной декартовой системы координат. В более сложной математической модели эмиссионной компьютерной томографии [2] в качестве исходных данных выступают значения экспоненциального лучевого преобразования (ЭЛП)

$$I^{\varepsilon}f(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\eta + t\xi) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t \varepsilon(s\eta + u\xi) du \right\} dt, \quad (2)$$

где функция $\varepsilon \geq 0$ представляет собой коэффициент поглощения, а f имеет физический смысл распределения внутренних источников. Наиболее распространены модели, в рамках которых коэффициент поглощения (или его приближение) а-priori заданы, а в качестве искомой выступает функция f (см. [3]).

В модели тензорной томографии данными являются значения оператора продольного лучевого преобразования [4, 5] вида

$$\mathcal{P}w(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{i_1 \dots i_m} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_m} dt, \quad (3)$$

где $w_{i_1 \dots i_m}$ — компоненты (искомого) симметричного m -тензорного поля, ξ^k — компоненты направляющего вектора ξ . Здесь и далее используется правило Эйнштейна, по которому по повторяющимся сверху и снизу индексам производится суммирование от 1 до n , $n = \dim \mathbb{R}^n$.

Операторы (1)–(3) задают исходные данные для решения задач компьютерной, эмиссионной и тензорной томографии, состоящих в обращении указанных интегральных операторов с целью определения функций f в (1), (2) или тензорного поля w в (3). Наиболее математически привлекательным подходом к решению задач (1)–(3), как и способы решения более сложных задач томографии, являются методы, основанные на формулах обращения. К сожалению, найти такие формулы удаётся далеко не всегда. Особенно много трудностей возникает в рамках моделей рефрагирующих сред с переменным коэффициентом поглощения при искомой величине, представляющей собой тензорное поле. Формулы обращения при этом удаётся построить лишь в некоторых частных случаях [6–9].

Важными составляющими формул обращения томографических операторов являются операторы обратной проекции (ООП) [3–5]. Построение ООП — более простая задача, чем получение точных формул обращения, при этом их значения содержат определённую информацию интегрального характера об искомом объекте. Приведём два примера (для простоты они приведены в двумерном случае) ООП. Оператор обратной проекции, действующий на преобразование (1), определяется следующим образом [3]:

$$\varphi(x) = \mathcal{R}^\# g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}f(\eta(\theta), x^1 \eta^1 + x^2 \eta^2) d\theta,$$

где $g(\eta, s) = \mathcal{R}f(\eta, s)$, и представляет собой усреднение значений преобразования Радона, заданного для всех прямых, проходящих через точку x .

Оператор обратной проекции, действующий на лучевое преобразование $\mathcal{P}w(\xi, s)$, при $j = 0, \dots, m$ определяется следующим образом [4]:

$$\mu^{i_1 \dots i_m} = \mathcal{P}^\# h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_m} \mathcal{P}w(\xi(\theta), s(\theta, x^1, x^2)) d\theta,$$

где $h(\xi, s) = \mathcal{P}w(\xi, s)$. Напомним, что

$$\xi = \xi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad s = s(\xi(\theta), x^1, x^2) = x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta.$$

ООП $\mathcal{P}^\#$ порождает в $\mathbb{R}^2$ симметричное тензорное поле μ той же валентности валентности m , что и искомое поле w .

В работах [10–13] предложено некоторое обобщение операторов обратной проекции с условным названием «поля интегральных угловых моментов», действующих на произвольные томографические операторы. Предложенные угловые моменты оказались весьма полезными инструментами при решении задач восстановления сингулярного носителя тензорного

поля по его известному ЭЛП, в рамках модели среды с рефракцией и переменным коэффициентом поглощения, возможно, неизвестным [12, 13]. В настоящей работе операторы углового момента отображают обобщённые ЭЛП функций вида $f(x, \xi)$, где $x \in \mathbb{R}^3$, а ξ — единичный вектор направления, в множество симметричных тензорных 3D-полей. Отличие введённых в [14] обобщённых ЭЛП от используемых ранее состоит в следующем. Коэффициент поглощения $\varepsilon(x)$ заменяется комплекснозначной функцией $\varepsilon(x, \xi) + i\kappa(x, \xi)$. Принимается во внимание концепция лучевых преобразований скалярных и тензорных полей со степенным весом [4, 15, 16]. Функция f , играющая в «классической» модели эмиссионной томографии роль (стационарного) распределения внутренних источников, полагается зависящей от времени, т. е. $f = f(t, x)$. Введение временной зависимости обусловлено стремительным развитием тематики, связанной с динамической томографией (см., например [17–19]). Напомним определения обобщённых операторов ЭЛП.

Экспоненциальное лучевое преобразование порядка k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, при $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, определяется формулой

$$u_k(x, \xi) = \int_0^\infty s^k \exp \left\{ - \int_0^s (\varepsilon(x - \sigma\xi, \xi) + i\kappa(x - \sigma\xi, \xi)) d\sigma \right\} f(x - s\xi) ds. \quad (4)$$

Формулой (4) определяются стационарные ЭЛП порядка k . Предположим, что плотность распределения источников f зависит не только от точки x , но и от времени t . Скорость распространения возмущения положим для простоты единичной. При этих условиях нестационарное экспоненциальное лучевое преобразование порядка k определяется формулой

$$u_k(t, x, \xi) = \int_0^\infty s^k \exp \left\{ - \int_0^s (\varepsilon(x - \sigma\xi, \xi) + i\kappa(x - \sigma\xi, \xi)) d\sigma \right\} f(t - s, x - s\xi) ds. \quad (5)$$

Заметим, что в определениях (4), (5) не только функции ε , κ , но и функция f могут зависеть как от точки x пространства и времени t , так и от единичного вектора направления ξ .

Нетрудно видеть, что при $k = 0$, $\kappa \equiv 0$ и $\varepsilon \equiv 0$ оператор (4) представляет собой веерное преобразование (при $n = 2$) и конусное преобразование (при $n = 3$). При $k = 0$, $\kappa \equiv 0$, $\varepsilon \geq 0$, $n \geq 2$ оператор (4) представляет собой ЭЛП вида (2), задаваемое интегралами вдоль прямых. Если $\kappa \equiv 0$, $\varepsilon \equiv 0$, $n \geq 2$, а подынтегральная функция представляет собой произведение степенного веса s^k с однородным многочленом относительно компонент ξ^l вектора ξ с коэффициентами, являющимися компонентами зависящего только от x симметричного m -тензорного поля, то оператор (4) представляет собой лучевое преобразование моментов симметричного тензорного поля [4, 16].

Рассматривая частные случаи $k = 1$ или $k = 0$, $n = 3$ и используя понятия физической оптики, мы видим, что $u_1(x, \xi)$ при $\varepsilon \equiv 0$ и $\kappa(x, \xi) = \text{const} = \kappa$ представляет собой резкое волновое изображение, а $u_0(x, \eta)$ при $\kappa \equiv 0$ и $\varepsilon = \text{const}$ — резкое фотометрическое изображение в терминологии работы [20].

Задачи эмиссионной, рефракционной и динамической томографии, особенно их разновидности с ограниченными данными, с трудом поддаются решению. Как уже отмечалось, формулы обращения получены в редких частных случаях, поэтому дополнительная априорная информация в форме связей исходных данных задачи (ЭЛП различных порядков) с угловыми моментами может послужить незаменимым инструментом при построении алгоритмов, в том числе итерационных, решения задач томографии сложных сред.

2. УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Зададим в пространстве $\mathbb{R}^3$ прямоугольную декартову систему координат. Через S^2 обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^3$, а через S_x^2 — множество единичных векторов с началом в точке x . Через SR обозначим множество пар (x, ξ) , где $x \in \mathbb{R}^3$ и $\xi \in S_x^2$ (сферическое расслоение пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть D — ограниченная выпуклая область с гладкой границей. Через SD обозначим множество пар (x, ξ) , $x \in D$, $\xi \in S_x^2$.

Зададим финитную бесконечно дифференцируемую в D функцию $f(x)$ и произвольное целое неотрицательное число p , $p \geq 0$. Множество симметричных тензорных полей ранга p будем обозначать через S_p . Для комплекснозначной функции $\varepsilon(x, \xi) + i\kappa(x, \xi)$, определённой в SR или в SD , примем обозначение $\alpha(x, \xi)$.

Полагая заданным стационарное ЭЛП $u_k(x, \xi)$ порядка k , (см. (4)), определим в $\mathbb{R}^3$ контравариантное валентности p тензорное поле $\mathcal{E}_{kp}u$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_{kp}^{i_1 \dots i_p} u(x) = \int_{S_x^2} u_k(x, \xi) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_p} d\lambda_x(\xi), \quad p \geq 0. \quad (6)$$

Здесь ξ^{i_l} есть i_l -я компонента единичного вектора ξ в заданной системе координат, $i_l = 1, 2, 3$; $d\lambda_x(\xi)$ — угловая мера (телесный угол) на единичной сфере S_x^2 . В частности, при $p = 0$ получаем

$$\mathcal{E}_{k0}u(x) = \int_{S_x^2} u_k(x, \xi) d\lambda_x(\xi). \quad (7)$$

Тензорные поля $\mathcal{E}_{kp}^{i_1 \dots i_p} u$, определённые соотношением (6), назовём полями интегральных угловых p -моментов ЭЛП порядка k . Ниже для краткости будем говорить об *угловых моментах*. Поля $\mathcal{E}_{k0}u$ — скалярные, а поля $\mathcal{E}_{kp}u$ — симметричные тензорные ранга $p \geq 1$. Ниже используются обозначения $\mathcal{E}_{kp}$ для тензорных полей $\mathcal{E}_{kp}u$. Легко видеть, что для произвольной финитной бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^3$ функции f , любых целых неотрицательных $p \geq 0$, $k \geq 0$ поля $\mathcal{E}_{kp}$ имеют в $\mathbb{R}^3$ класс гладкости C^∞ .

Установим некоторые дифференциальные соотношения, связывающие тензорные поля $\mathcal{E}_{kp}$ между собой и с функцией f . Напомним определение одного из операторов, действующих на симметричные тензорные поля. Оператор дивергенции $\delta: H^l(S^{p+1}) \rightarrow H^{l-1}(S^p)$ определяется в координатах формулой

$$(\delta w)_{j_1 \dots j_p} = \frac{\partial w_{j_1 \dots j_p i}}{\partial x^i}.$$

Здесь $w_{j_1 \dots j_p i}$ — (ковариантное) тензорное поле w ранга $p+1$. Напомним, что действует правило суммирования Эйнштейна и в евклидовом пространстве с заданной декартовой прямоугольной системой координат ковариантные и контравариантные компоненты тензоров не различаются. Найдём $\delta \mathcal{E}_{kp}$, $k \geq 1$, $p \geq 1$. По определению имеем

$$(\delta \mathcal{E}_{kp})^{i_1 \dots i_{p-1}}(x) = \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{E}_{kp}^{i_1 \dots i_{p-1} j}(x) = \int_{S_x^2} \frac{\partial u_k(x, \xi)}{\partial x^j} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_{p-1}} \xi^j d\lambda_x(\xi). \quad (8)$$

Оператор $\mathcal{H}$, действующий на дифференцируемые в SR функции $\psi(x, \xi)$, определим соотношением

$$(\mathcal{H}\psi)(x, \xi) = \frac{d}{d\tau} \psi(x + \tau\xi, \xi) \Big|_{\tau=0}. \quad (9)$$

В частности, функция ψ может зависеть только от пространственной переменной x , но при этом $\mathcal{H}\psi$ будет зависеть от x и ξ . В координатах этот оператор представим в одной из следующих форм:

$$(\mathcal{H}\psi)(x, \xi) = \xi^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} = \langle \xi, \nabla \psi \rangle = \operatorname{div}(\psi \xi). \quad (10)$$

Непосредственной проверкой, с использованием определения (9) и соотношений (10) (более подробно см. [14]), можно убедиться в том, что

$$\xi^j \frac{\partial u_k}{\partial x^j} = \mathcal{H}u_k = ku_{k-1} - \alpha u_k,$$

где ЭЛП u_k порядка k определено (4). Подставляя последнее соотношение в формулу (8), получим

$$(\delta \mathcal{E}_{kp})^{j_1 \dots j_{p-1}}(x) = k \mathcal{E}_{(k-1)(p-1)}^{j_1 \dots j_{p-1}}(x) - \int_{S_x^2} \alpha(x, \xi) u_k(x, \xi) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_{p-1}} d\lambda_x(\xi). \quad (11)$$

Если функция $\alpha(x, \xi) \equiv \alpha(x)$ не зависит от вектора ξ , то выражение (11) можно записать в виде

$$\delta \mathcal{E}_{kp} = k \mathcal{E}_{(k-1)(p-1)} - \alpha \mathcal{E}_{k(p-1)}, \quad k \geq 1, \quad p \geq 1.$$

Если функция $\alpha(x, \xi)$ представляет собой однородный полином по переменной ξ (т. е. $\alpha(x, \xi) = Q_{j_1 \dots j_r}^r(x) \xi^{j_1} \dots \xi^{j_r}$, где Q^r — ковариантное тензорное поле валентности $r \geq 1$, то формула (11) приобретает вид

$$\delta \mathcal{E}_{kp} = k \mathcal{E}_{(k-1)(p-1)} - Q^r * \mathcal{E}_{k(p+r-1)}, \quad (12)$$

где $Q^r * \mathcal{E}_{k(p+r-1)}$ — свёртка тензорных полей Q^r и $\mathcal{E}_{k(p+r-1)}$:

$$(Q^r * \mathcal{E}_{k(p+r-1)})^{j_1 \dots j_{p-1}} = Q_{l_1 \dots l_r}^r \mathcal{E}_{k(p+r-1)}^{l_1 \dots l_r j_1 \dots j_{p-1}}.$$

При $k = 0$ связи (8) между тензорными полями принимают иной вид. Действительно, применяя оператор δ к полю $\mathcal{E}_{0p}$ и используя непосредственно проверяемое соотношение $(\mathcal{H} + \alpha)u_0 = f$, получим

$$(\delta \mathcal{E}_{0p})^{j_1 \dots j_{p-1}}(x) = f_{p-1}^{j_1 \dots j_{p-1}}(x) - \int_{S_x^2} \alpha(x, \xi) u_0(x, \xi) \xi^{j_1} \dots \xi^{j_{p-1}} d\lambda_x(\xi), \quad (13)$$

где через $f_{p-1}(x)$ обозначено поле угловых $(p-1)$ -моментов функции f с компонентами

$$f^{j_1 \dots j_{p-1}}(x) = \int_{S_x^2} f(x) \xi^{j_1} \dots \xi^{j_{p-1}} d\lambda_x(\xi). \quad (14)$$

Если функция α зависит лишь от x , $\alpha(x, \xi) \equiv \alpha(x)$, то формула (13) приобретает вид

$$\delta \mathcal{E}_{0p} = f_{p-1} - \alpha \mathcal{E}_{0(p-1)}. \quad (15)$$

а при $\alpha(x, \xi) = Q_{j_1 \dots j_r}^r(x) \xi^{j_1} \dots \xi^{j_r}$ имеет вид

$$\delta \mathcal{E}_{0p} = f_{p-1} - Q^r * \mathcal{E}_{0(p+r-1)}. \quad (16)$$

Замечание 1. Если функция $\alpha(x, \xi)$ представима в виде суммы однородных полиномов по переменной ξ , причём порождающие их тензорные поля могут иметь различные валентности, то справедливы соотношения, аналогичные (12), (16), связывающие между собой значения некоторого конечного набора полей $\mathcal{E}_{kp}$, $k \geq 1$, и угловых моментов функции f при $k = 0$.

Формулы (12)–(16) могут быть использованы для получения дополнительных соотношений. Пусть функция $\alpha(x, \xi)$ постоянна, т. е. $\varepsilon = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. Применяя оператор δ к обеим частям формулы (12), при $k \geq 2$, $p \geq 2$ получим $\delta(\delta\mathcal{E}_{kp}) = k\delta\mathcal{E}_{(k-1)(p-1)} - \alpha\delta\mathcal{E}_{k(p-1)}$. Вновь используя (12) для $\delta\mathcal{E}_{k(p-1)}$ и $\delta\mathcal{E}_{(k-1)(p-1)}$, приходим к соотношению

$$\delta(\delta\mathcal{E}_{kp}) = k(k-1)\mathcal{E}_{(k-2)(p-2)} - 2k\alpha\mathcal{E}_{(k-1)(p-2)} + \alpha^2\mathcal{E}_{k(p-2)}.$$

Дальнейшее использование формулы (12) позволяет вывести соотношение для оператора δ^n , применённого к тензорным полям $\mathcal{E}_{kp}$ при $k \geq n$, $p \geq n$.

Теорема 1. Пусть целые k , n , p таковы, что $n \geq 1$, $k \geq 0$, $p \geq 0$. Пусть $\mathcal{E}_{(k+n)(p+n)}$ — поле угловых $(p+n)$ -моментов ЭЛП u_{k+n} порядка $(k+n)$, $\alpha(x, \xi) = \varepsilon + i\kappa$, $\varepsilon = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. Тогда

$$\delta^n \mathcal{E}_{(k+n)(p+n)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \alpha^j \frac{(k+n)!}{(k+j)!} \mathcal{E}_{(k+j)p}, \quad (17)$$

где C_n^j — число сочетаний из n элементов по j .

Доказательство. Соотношение (17) будем доказывать индукцией по m . При $m = 1$ получаем формулу (11), в которой целые k и p заменены на $k+1$ и $p+1$ соответственно. Предположим, что равенство (17) справедливо при $m = n$. Применяя к его обеим частям оператор δ и используя (11), придём к соотношению

$$\delta^{n+1} \mathcal{E}_{(k+n)(p+n)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \alpha^j \frac{(k+n)!}{(k+j)!} ((k+j)\mathcal{E}_{(k+j-1)(p-1)} - \alpha\mathcal{E}_{(k+j)(p-1)}).$$

Выделяя первый и последний члены выражения справа, а остальные попарно суммируя и учитывая, что $C_n^j + C_n^{j-1} = C_{n+1}^j$, получим

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} \mathcal{E}_{(k+n)(p+n)} &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \alpha \frac{(k+n)!}{(k-1+j)!} C_{n+1}^j \mathcal{E}_{(k+j)(p-1)} \\ &\quad + \frac{(k+n)!}{(k-1)!} \mathcal{E}_{(k-1)(p-1)} (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} \mathcal{E}_{(k+n)(p-1)}. \end{aligned}$$

Правую часть полученной формулы можно записать в виде суммы с индексом j , меняющимся от 0 до $n+1$:

$$\delta^{n+1} \mathcal{E}_{(k-1+n+1)(p-1+n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha^j C_{n+1}^j \frac{(k-1+n+1)!}{(k-1+j)!} \mathcal{E}_{(k-1+j)(p-1)}.$$

Заменяя индексы $k-1$ и $p-1$ на k , p соответственно, окончательно получим соотношение вида (17), в котором целое n заменено на $n+1$:

$$\delta^{n+1} \mathcal{E}_{(k+n+1)(p+n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha^j C_{n+1}^j \frac{(k+n+1)!}{(k+j)!} \mathcal{E}_{(k+j)p}.$$

Утверждение доказано. □

Повторное применение оператора δ к тензорным полям вида $\mathcal{E}_{0p}$ (т. е. при $k = 0$) приводит к иным соотношениям. Действительно, исходя из формулы (16) при $p \geq 2$, пользуясь соотношением $\delta f_{p-1} = (\mathcal{H}f)_{p-2}$, где поле угловых $(p-1)$ -моментов функции f определено (14), получим

$$\delta^2 \mathcal{E}_{0p} = (\mathcal{H}f)_{p-2} - \alpha f_{p-2} + \alpha^2 \mathcal{E}_{0(p-2)}.$$

Дальнейшее применение оператора δ к тензорным полям вида $\mathcal{E}_{0(p+n)}$, где $n \geq 1$, $p \geq 0$, приводит к следующему результату, который проверяется непосредственно.

Следствие. Пусть n, p — целые числа такие, что $n \geq 1$, $p \geq 0$, и $\mathcal{E}_{0(p+n)}$ — поле угловых $(p+n)$ -моментов ЭЛП u_0 порядка 0, $\alpha(x, \xi) = \varepsilon + i\kappa$, $\varepsilon = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. Тогда

$$\delta^n \mathcal{E}_{0(p+n)} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j \alpha^j (\mathcal{H}^{n-j-1} f)_p + (-1)^n \alpha^n \mathcal{E}_{0p}, \quad (18)$$

где $\mathcal{H}^{n-j-1}$ — степень оператора $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}^{n-j-1} f)_p$ — угловой p -момент функции $\mathcal{H}^{n-j-1} f$, $(\mathcal{H}^0 f)_p = f_p$.

Замечание 2. Совместное использование соотношений (17) и (18) позволяет вычислять величины $\delta^{n+k} \mathcal{E}_{k(p+n+k)}$ при $p \geq 0$, $k \geq 1$, $n \geq 1$ для тензорных полей $\mathcal{E}_{k(p+n+k)}$. Заметим также, что угловым моментам $(\mathcal{H}^{n-j-1} f)_p$ функций $\mathcal{H}^{k-j} f$ может быть придан физический смысл мультипольных источников.

Перейдём к рассмотрению нестационарных ЭЛП. Пусть в $\mathbb{R} \times SR$ задано поле $u_k(t, x, \xi)$ порядка k , определённое соотношением (5). Вполне очевидны обобщения формул (6), (7), определяющие поля $\mathcal{E}_{kp}(t, x)$, $\mathcal{E}_{k0}(t, x)$ угловых p -моментов ЭЛП порядка k для нестационарных источников. Используя определение операторов δ , $\mathcal{H}$ и непосредственно проверяемые соотношения (подробнее см. [10])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} + \alpha \right) u_k = k u_{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H} + \alpha \right) u_0 = f,$$

несложно получить соотношения, аналогичные формулам (11)–(18) в нестационарном случае. Сформулируем нестационарные варианты соотношений (17), (18) в форме теоремы.

Теорема 2. Пусть k, n, p — целые числа, $n \geq 1$, $k \geq 0$, $p \geq 0$, и $\mathcal{E}_{(k+n)(p+n)}(t, x)$ — поле угловых $(p+n)$ -моментов ЭЛП $u_{k+n}(t, x, \xi)$ порядка $(k+n)$, определяемое формулой (6), $\alpha(x, \xi) = \varepsilon + i\kappa$, $\varepsilon = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta^n \mathcal{E}_{(k+n)(p+n)} &= \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \frac{(k+n)!}{(k+j)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right)^j \mathcal{E}_{(k+j)p}, \quad k \geq 1, \\ \delta^n \mathcal{E}_{0(p+n)} &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right)^j (\mathcal{H}^{n-j-1} f)_p + (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right)^n \mathcal{E}_{0p}, \quad k = 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}^{n-j-1}$ — степень оператора $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}^{n-j-1} f)_p$ — угловой p -момент функции $\mathcal{H}^{n-j-1} f$, $(\mathcal{H}^0 f)_p = f_p$.

Ограничившись стационарным случаем, вычислим скалярные поля $\mathcal{E}_{k0}$ угловых 0-моментов ЭЛП порядка k , $k \geq 1$, определяемые соотношением (7). Подставляя в (7) соотношение (4), определяющее ЭЛП порядка k , и напоминая, что $s = |x - q|$, $\xi = \frac{x - q}{|x - q|}$ и $dV_q = s^2 ds d\lambda_x(\xi)$, при $\alpha(x, \xi) = i\kappa$, $\kappa = \text{const}$, получим

$$\mathcal{E}_{k0}(x) = \int_{S_x^2} u_k(x, \xi) d\lambda_x(\xi) = \int_{S_x^2} \int_0^\infty s^k \exp\{i\kappa s\} f(x - s\xi) ds d\lambda_x(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\{i\kappa|x - q|\}}{|x - q|^{2-k}} f(q) dV_q$$

при $k = 1, 2, \dots$. Правой частью последнего соотношения при $k = 1$ является объёмный потенциал, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца $\Delta \mathcal{E}_{10} + \kappa^2 \mathcal{E}_{10} = -4\pi f$ и условию Зоммерфельда на бесконечности.

Введём обозначения $G_k(r)$ для функций $r^{k-2}e^{-\alpha r}$ при $k = 1, 2, \dots$, где $r = |x - q|$, $\alpha = \varepsilon + i\kappa$, причём постоянные $\varepsilon \geq 0$ и κ не обращаются одновременно в нуль. Рассмотрим действие оператора $(\Delta - \alpha^2)$ на функции G_k . Так как они зависят только от r , то на них будет действовать лишь радиальная часть оператора Лапласа. Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) G_k(r) = (k-1)(k-2)G_{k-2} - 2\alpha(k-1)G_{k-1} + \alpha^2 G_k. \quad (19)$$

Полученные соотношения посредством оператора $(\Delta - \alpha^2)$ связывают между собой функции G_k с различными индексами k . Приведём несколько конкретных соотношений для $k = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} (\Delta - \alpha^2)G_2 &= -2\alpha G_1, & (\Delta - \alpha^2)G_3 &= 2G_1 - 4\alpha G_2, \\ (\Delta - \alpha^2)G_4 &= 6G_2 - 6\alpha G_3, & (\Delta - \alpha^2)G_5 &= 12G_3 - 8\alpha G_4. \end{aligned}$$

Соотношения (19) позволяют судить о некоторых классах решений однородных уравнений с операторами вида $(\Delta - \alpha^2)^k$ и об их фундаментальных решениях. В частности, если $r \neq 0$, то $G_j(r)$, $j = 1, \dots, k$, — решения однородного уравнения с оператором $(\Delta - \alpha^2)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Легко видеть, что для поля $\mathcal{E}_{20}$ существует дифференциальное уравнение в частных производных, решением которого оно является.

Предложение. Пусть $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^3$ функция, $\alpha(x, \xi) = \varepsilon + i\kappa$, где ε — неотрицательная константа, κ — константа, $\alpha \neq 0$. Если поле $\mathcal{E}_{20}$ определено формулой (6) при $k = 2$, то функция $u(x) = \frac{\mathcal{E}_{20}(x)}{8\pi\alpha}$ является решением уравнения $(\Delta - \alpha^2)^2 u = f$.

Доказательство. Так как

$$\mathcal{E}_{20}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\alpha|x-q|} f(q) dV_q,$$

то, применяя к обеим частям этого равенства оператор $(\Delta_x - \alpha^2)$, получим

$$(\Delta_x - \alpha^2)\mathcal{E}_{20}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(q)((\Delta_x - \alpha^2)e^{-\alpha|x-q|}) dV_q. \quad (20)$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$(\Delta_x - \alpha^2)e^{-\alpha|x-q|} = -2\alpha \frac{e^{-\alpha|x-q|}}{|x-q|}.$$

Переписывая равенство (20) с учётом последнего выражения, получим

$$(\Delta_x - \alpha^2)\mathcal{E}_{20}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} (-2\alpha) \frac{e^{-\alpha|x-q|}}{|x-q|} f(q) dV_q$$

и, применяя к нему ещё раз оператор $\Delta_x - \alpha^2$, получим равенство

$$(\Delta_x - \alpha^2)^2 \mathcal{E}_{20}(x) = -2\alpha \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta_x - \alpha^2) \frac{e^{-\alpha|x-q|}}{|x-q|} f(q) dV_q = 8\pi\alpha f(x),$$

доказывающее утверждение. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены действующие на экспоненциальные лучевые преобразования (ЭЛП) операторы угловых моментов, значениями которых являются симметричные тензорные поля ранга p . Использование дифференциальных операторов дивергенции δ и производной по направлению $\mathcal{H}$ (см. (10), (11)) позволило установить связи между тензорными полями угловых моментов ЭЛП различных порядков, что, в свою очередь, послужило основой получения зависимостей между операторами угловых моментов ЭЛП и полями угловых моментов функции $\mathcal{H}^l f$. При этом значения стационарных $u_k(x, \xi)$ и нестационарных $u_k(t, x, \xi)$ ЭЛП трактуются как интегральные моменты порядка k распределения источников f с весовой функцией, задаваемой комплекснозначным коэффициентом поглощения α . Введение в рассмотрение функций, зависящих от времени t , намечает новые перспективы исследований возникающих уравнений в частных производных и, соответственно, возможности привлечения дополнительных математических инструментов.

Очевидным образом возникающие постановки задач томографии, состоящие в восстановлении характеристик сложных сред, в рамках соответствующих математических моделей требуют обращения интегральных операторов (4), (5). Исходными данными при этом являются ЭЛП различных порядков, известные на некоторых многообразиях SR . Эти задачи можно трактовать и как обратные задачи для дифференциальных уравнений [14] с итерированными операторами, аналогичными операторам уравнений переноса, которые заключаются в восстановлении их правых частей. Понятия операторов ЭЛП порядка k и полей угловых моментов обладают хорошим потенциалом для дальнейшего развития. Так, было бы интересно распространить их и на модели рефракционной томографии, т. е. модели с включением римановой метрики. ЭЛП порядка k , как стационарные, так и нестационарные, могут задаваться интегралами вдоль геодезических. Поля же угловых моментов, определённые в двумерном случае [10–13], естественно обобщаются и на 3D-случай.

Представляется, что операторы ЭЛП и углового момента послужат хорошей основой для постановки и исследования новых задач интегральной геометрии и, в частности, задач динамической рефракционной томографии тензорных полей. Следует иметь в виду и другие алгоритмические особенности решения задач томографии сложных сред. Задачи рефракционной динамической тензорной томографии с трудом поддаются не только аналитическому, но и численному решению. Поэтому наличие информации о связях лучевых преобразованиях с их угловыми моментами может послужить серьёзной дополнительной априорной информацией при построении численных итерационных алгоритмов решения рассматриваемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrirwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. 1917. V. 69. P. 262–277.
2. Budinger T. F., Gullberg G. T., Huesman R. H. Emission computed tomography // Image Reconstruction from Projections. Springer-Verl., 1979.
3. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Chichester: Wiley, 1986.
4. Sharafutdinov V. A. Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
5. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.
6. Natterer F. Inverting the attenuated vectorial Radon transform // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2005. V. 13, N 1. P. 93–101.
7. Kazantsev S., Bukhgeim A. Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. V. 15, N 4. P. 735–765.
8. Monard F. Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces // SIAM J. Math. Analysis. 2016. V. 48. P. 1155–1177.

9. *Kuchment P., Terzioglu F.* Inversion of weighted divergent beam and cone transforms // *Inverse Problems and Imaging*. 2017. V. 11, N 6. P. 1071–1090.
10. Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В. Восстановление сингулярного носителя тензорного поля, заданного в рефрагирующей среде, по его лучевому преобразованию // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2015. Т. 18, № 3(63). С. 11–25.
11. *Derevtsov E. Yu., Maltseva S. V., Svetov I. E.* Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* 2015. V. 3, N 4. P. 4–44.
12. *Derevtsov E. Yu., Maltseva S. V., Svetov I. E., Sultanov M. A.* On a Problem of Reconstruction of Discontinuities of a Function by its Attenuated Ray Transform along Geodesics // *Internat. Conf. «Functional analysis in interdisciplinary applications» (FAIA2017)*. 2–5 October 2017, Astana, Kazakhstan: AIP Conference Proc. 2017. V. 1880, art. no. 060004.
13. Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Светов И. Е. Определение разрывов функции, заданной в области с рефракцией, по её экспоненциальному лучевому преобразованию // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2018. Т. 21, № 4. С. 51–74.
14. Деревцов Е. Ю. Об одном обобщении экспоненциального лучевого преобразования в томографии // *Сиб. журн. чистой и прикл. математики*. 2018. Т. 18, № 4. С. 29–41.
15. *Hamaker C., Smith K. T., Solmon D. C., Wagner S. L.* The divergent beam X-ray transform // *Rocky Mountain J. Math.* 1980. V. 10, N 1. P. 253–283.
16. *Шарафутдинов В. А.* Задача интегральной геометрии для обобщённых тензорных полей на $\mathbb{R}^n$ // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 286, № 2. С. 305–307.
17. *Schmitt U., and Louis A. K.* Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. I: Theory // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 645–658.
18. *Schmitt U., Louis A. K., Wolters C., and Vauhkonen M.* Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. II: Applications // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 659–676.
19. *Hahn B., and Louis A. K.* Reconstruction in the three-dimensional parallel scanning geometry with application in synchrotron-based X-ray tomography // *Inverse Problems*. 2012. V. 28, N 4. 19 p. DOI: 10.1088/0266-5611/28/4/045013
20. *Кирейтов В. Р.* Обратные задачи фотометрии. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1983.

UDC 517.44:517.95

ON THE ANGULAR MOMENT OPERATORS OF ATTENUATED RAY TRANSFORMS OF SCALAR 3D-FIELDS

© 2020 E. Yu. Derevtsov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: dert@math.nsc.ru

Received 19.05.2019, revised 21.02.2020, accepted 09.04.2020

Abstract. Under consideration are the operators of angular moments which maps the values of generalized attenuated ray transforms (ART) into the set of symmetric p -tensor fields. The differential relations between the values of ARTs of various orders, acting on stationary or dynamic source distributions f , serve as the basis for establishing the differential connections between the tensor fields of angular moments of various orders k and ranks p . The particular cases are indicated allowing to obtain some previously known results. Connections of the ARTs of order k with the problems of tomography and integral geometry as well as the established properties and connections between ARTs and angular moments can be useful as additional information when constructing the iterative algorithms for solving the problems of dynamic refraction tensor tomography.

Keywords: attenuated ray transform, back projection, operator of angular moment, tensor field, transport equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.204

REFERENCES

1. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 1917, Vol. 69, pp. 262–277.
2. Budinger T.F., Gullberg G.T., Huesman R.H. Emission computed tomography. *Image Reconstruction from Projections*. Springer-Verl., 1979.
3. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Chichester: Wiley, 1986.
4. Sharafutdinov V.A. Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
5. Derevtsov E.Yu., Svetov I.E. Tomography of tensor fields in the plane. *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 2, pp. 24–68.
6. Natterer F. Inverting the attenuated vectorial Radon transform. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2005, Vol. 13, No. 1, pp. 93–101.
7. Kazantsev S., Bukhgeim A. Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2007, Vol. 15, No. 4, pp. 735–765.
8. Monard F. Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces. *SIAM J. Math. Analysis*, 2016, Vol. 48, pp. 1155–1177.
9. Kuchment P., Terzioglu F. Inversion of weighted divergent beam and cone transforms. *Inverse Problems and Imaging*, 2017, Vol. 11, No. 6, pp. 1071–1090.

10. Derevtsov E.Yu., Mal'tseva S.V. Reconstruction of the singular support of a tensor field given in a refracting medium by its ray transform. *J. Appl. Indust. Math.*, 2015, Vol. 9, No. 3, pp. 447–460.
11. Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E. Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data. *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 4, pp. 4–44.
12. Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E., Sultanov M. A. On a problem of reconstruction of discontinuities of a function by its attenuated ray transform along geodesics. Internat. Conf. “*Functional analysis in interdisciplinary applications*” (FAIA2017) (Astana, Kazakhstan, 2–5 October 2017). Astana, Kazakhstan: AIP Conference Proc. 2017. V. 1880, Article Number 060004.
13. Derevtsov E.Yu., Mal'tseva S.V., Svetov I.E. Determination of discontinuities of a function in a domain with refraction from its attenuated ray transform. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 4, pp. 619–641.
14. Derevtsov E.Yu. Ob odnom obobshchenii eksponentsial'nogo lucheвого preobrazovaniya v tomografii [A Generalization of Attenuated Ray Transform in Tomography]. *Sib. zhurn. chistoi i prikl. matematiki*, 2018, Vol. 18, No. 4, pp. 29–41 (in Russian).
15. Hamaker C., Smith K.T., Solmon D.C., Wagner S.L. The divergent beam X-ray transform. *Rocky Mountain J. Math.*, 1980, Vol. 10, No. 1, pp. 253–283.
16. Sharafutdinov V.A. Zadacha integral'noi geometrii dlya obobshchennykh tenzornyykh polei na $\mathbb{R}^n$ [A Problem of Integral Geometry for the Generalized Tensor Fields on $\mathbb{R}^n$]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Vol. 286, No. 2, pp. 305–307 (in Russian).
17. Schmitt U., and Louis A.K. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. I: Theory. *Inverse Problems*, 2002, Vol. 18, pp. 645–658.
18. Schmitt U., Louis A.K., Wolters C., and Vauhkonen M. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. II: Applications. *Inverse Problems*, 2002, Vol. 18, pp. 659–676.
19. Hahn B., and Louis A.K. Reconstruction in the three-dimensional parallel scanning geometry with application in synchrotron-based X-ray tomography. *Inverse Problems*, 2012, Vol. 28, No. 4, 19 p. DOI: 10.1088/0266-5611/28/4/045013
20. Kireitov V.R. *Obratnye zadachi fotometrii* [Inverse Problems of Photometry]. Novosibirsk: izd. Vychisl. Tsentr Sibir. Otdel. Akad. Nauk SSSR, 1983 (in Russian).