Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov, The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 63–80

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.219.149

April 26, 2023, 17:07:52

УДК 517.958

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДВУМЕРНОГО ЯДРА В СИСТЕМЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

© 2020 Д. К. Дурдиев^a, А. А. Рахмонов^b

*Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, 11, Бухара 200117, Узбекистан*

E-mails: ^adurdiev65@mail.ru, ^baraxmonov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.02.2020 г.; после доработки 23.03.2020 г.;
принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения вязкоупругой пористой среды. Прямая задача заключается в определении y -компонент векторов смещений упругого пористого тела и жидкости при решении начально-краевой задачи для этих уравнений. Предполагается, что ядро, входящее в интегральный член первого уравнения, зависит как от временной, так и от пространственной переменной x . Для его отыскания задаётся дополнительное условие относительно решения прямой задачи при $z = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегродифференциальных уравнений для неизвестных функций. К этой системе применяется метод шкал банаховых пространств аналитических функций. Доказана теорема однозначной локальной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по переменной x и непрерывных по t .

Ключевые слова: обратная задача, ядро, дельта-функция Дирака, интегродифференциальное уравнение, аналитическая функция.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему интегродифференциальных гиперболических уравнений

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \Sigma_1(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma_2(x, z, t) - \chi \rho_l^2 (U_t - V_t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi \rho_l (U - V), \quad t > 0, \quad z > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

с начальными и граничным условиями

$$U|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} \equiv 0, \quad V|_{t=0} \equiv 0, \quad \Sigma_2(x, +0, t) = \varepsilon_0(x) \delta'(t). \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.1), (1.2) описывает распространение звуковых волн в вязкоупругой среде, состоящей из упругого пористого тела, поры которого заполнены жидкостью. Здесь функция $U(x, z, t)$ имеет физический смысл y -компоненты вектора смещений частиц упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью ρ_s ; $V(x, z, t)$ — такая же компонента вектора смещений частиц жидкости с постоянной плотностью ρ_l ; χ — постоянный коэффициент трения, $\chi > 0$; $\varepsilon_0(x)$ — заданная гладкая функция; $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака.

В равенствах (1.1) и (1.3) напряжения $\Sigma_1(x, z, t)$ и $\Sigma_2(x, z, t)$ связаны с $U(x, z, t)$ формулами

$$\begin{aligned}\Sigma_1(x, z, t) &= \mu(z) \frac{\partial U}{\partial x} + \int_0^t k(x, t - \tau) \mu(z) \frac{\partial U}{\partial x}(x, z, \tau) d\tau, \\ \Sigma_2(x, z, t) &= \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z} + \int_0^t k(x, t - \tau) \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z}(x, z, \tau) d\tau,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где $k(x, t)$ — функция, характеризующая вязкость среды, $\mu(z)$ — параметр Ламе.

В дальнейшем будем полагать, что

$$\begin{aligned}k(x, 0) &= k_t(x, 0) = 0, \\ \mu(z) &\in \Lambda := \{\mu(z) \in C^3([0, \infty)) \mid \mu(z) > 0, \mu'(+0) = 0\}, \\ \rho_s &= \rho_l = \chi = 1.\end{aligned}$$

Задача определения U и V из уравнений (1.1)–(1.3) при известных функциях μ , ε_0 и k называется прямой задачей для вязкоупругой пористой среды.

Обратная задача. Определить ядро $k(x, t)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, входящее в уравнение (1.1), посредством формул (1.4), если относительно решения прямой задачи известна информация

$$U|_{z=0} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\tag{1.5}$$

где $f(x, t)$ — заданная функция.

Для решения обратной задачи (1.1)–(1.5) используется метод шкал банаховых пространств аналитических по переменной x функций. Впервые этот метод применил к решению многомерных обратных задач для гиперболических уравнений второго порядка В. Г. Романов. Опираясь на результаты работ Л. В. Овсянникова [1] и Л. Ниренберга [2], он доказал локальную однозначную разрешимость ряда коэффициентных многомерных обратных задач, используя метод шкал банаховых пространств с некоторыми модификациями [3–5]. В работах [6–9] с использованием этого метода исследовались обратные задачи определения многомерного ядра в гиперболических интегродифференциальных уравнениях второго порядка.

В работах [10–12] применён метод решения многомерных обратных задач, основанный на представлении решения двумерных обратных задач в виде тригонометрического полинома по одной из пространственных переменных с непрерывными коэффициентами, зависящими от другой переменной. В [13, 14] получены оценки устойчивости решений обратных задачах определения многомерного ядра уравнения вязкоупругости. С численными методами решений обратных задач нахождения одномерного ядра можно ознакомиться в работах [15, 16].

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{A}_s(r)$, $s > 0$, вещественных функций $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, аналитических в окрестности начала координат, для которых справедливо следующее соотношение:

$$\|\psi\|_s(r) := \sup_{|x| < r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi(x) \right| < \infty, \quad r > 0, \quad s > 0.\tag{1.6}$$

В дальнейшем параметр r будет считаться фиксированным, в то время как параметр s рассматривается как переменный параметр. При этом возникает шкала банаховых пространств. Очевидно следующее свойство: если $\psi(x) \in \mathbf{A}_s(r)$, то $\psi(x) \in \mathbf{A}_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0, s)$, следовательно, $\mathbf{A}_s(r) \subset \mathbf{A}_{s'}(r)$, $s' < s$. Кроме того, если $\psi(x) \in \mathbf{A}_s(r)$, то $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi(x) \in \mathbf{A}_{s'}(r)$, $s' \in (0, s)$, и справедливо неравенство [17, с. 92]

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi(x) \right\|_{s'} \leq c_j \frac{\|\psi\|_s(r)}{(s' - s)^j},\tag{1.7}$$

где константа c_j зависит только от j .

Так как параметр r фиксирован, то в дальнейшем будем опускать его и использовать запись $\|\psi\|_s$ и $\mathbf{A}_s$ вместо $\|\psi\|_s(r)$ и $\mathbf{A}_s(r)$.

Пусть G_T — некоторая компактная область с кусочно-гладкой границей, через $C_{(y,t)}(G_T; \mathbf{A}_{s_0})$ обозначим класс функций, непрерывных по переменным (y, t) в области G_T и принимающих значения в $\mathbf{A}_{s_0}$. При фиксированных (y, t) норму функции $w(x, y, t)$ в $\mathbf{A}_{s_0}$ будем обозначать через $\|w\|_{s_0}(y, t)$. Норма функции w в $C_{(y,t)}(G_T; \mathbf{A}_{s_0})$ определяется равенством

$$\|w\|_{C_{(y,t)}(G_T; \mathbf{A}_{s_0})} = \sup_{(y,t) \in G_T} \|w\|_{s_0}(y, t).$$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Определим билинейный интегральный оператор L следующим образом:

$$L[k(x, t), u(x, z, t)] = u(x, z, t) + \int_0^t k(x, t - \tau) u(x, z, \tau) d\tau.$$

Иногда для сокращения записи в операторе L не будем указывать зависимость функций от переменных, подразумевая при этом зависимость первой функции от переменных (x, t) , а второй — от (x, z, t) .

Введём в рассмотрение новую переменную y :

$$y = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\mu(s)}} \quad (2.1)$$

и новые функции: $\tilde{u}(x, y, t) := U(x, l(y), t)/S(y)$, $\tilde{v}(x, y, t) := V(x, l(y), t)/S(y)$. Здесь $l(y)$ — функция, определяющая соответствие между y и z , задаваемое равенством (2.1), функция $S(y)$ удовлетворяет условиям

$$S(y) = \sqrt[4]{\frac{\mu(+0)}{\mu(z)}} \Big|_{z=l(y)}, \quad S(+0) = 1.$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.5) в терминах вновь введённых функций $\tilde{u}(x, y, t)$, $\tilde{v}(x, y, t)$ и переменной y примет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = L \left[k, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \nu(y) \tilde{u} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} L \left[k, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u} - \tilde{v}), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \tilde{u} - \tilde{v}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{u}|_{t < 0} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \Big|_{t < 0} = 0, \quad \tilde{v}|_{t < 0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} L[k, \tilde{u}] \Big|_{y=+0} = \varepsilon(x) \delta'(t), \quad (2.4)$$

$$\tilde{u}(x, y, t) \Big|_{y=+0} = f(x, t), \quad (2.5)$$

где

$$\nu(y) := \frac{S''(y)}{S(y)} - 2 \left(\frac{S'(y)}{S(y)} \right)^2, \quad \varepsilon(x) = [\mu(+0)]^{-1/2} \varepsilon_0(x).$$

В уравнении (2.2) и далее под μ понимается функция $\mu(l(y))$.

Рассмотрим теперь операторное уравнение относительно функции $\tilde{u}$:

$$L[k, \tilde{u}] = e^{-t/2}u(x, y, t),$$

где $u(x, y, t)$ — новая функция. Нетрудно проверить, что $\tilde{u}(x, y, t)$ через $u(x, y, t)$ выражается по формуле

$$\tilde{u}(x, y, t) = L[r, e^{-t/2}u], \quad (2.6)$$

где

$$r(x, t) = -k(x, t) - \int_0^t k(x, t - \tau)r(x, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Относительно функций $\tilde{u}(x, y, t)$, $u(x, y, t)$ и $r(x, t)$ задача (2.2)–(2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H(y)u(x, y, t) - \int_0^t h(x, t - \tau)u(x, y, \tau) d\tau - \int_0^t q(x, t - \tau)u(x, y, \tau) d\tau \\ - \int_0^t g(x, t - \tau)u(x, y, \tau) d\tau - e^{t/2}\tilde{v}(x, y, t) + \mu e^{t/2} \frac{\partial}{\partial x} L \left[k, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \tilde{u} - \tilde{v}, \quad (2.9)$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad \tilde{v}|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=+0} = [\delta'(t) - \delta(t)/2]\varepsilon(x), \quad (2.10)$$

$$u|_{y=+0} = L[k_0, f_0(x, t)], \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x, t) &:= -\varepsilon(x)\delta(t) + \theta(t)\tilde{f}(x, t), \\ (h, q, g, k_0, \tilde{f})(x, t) &:= e^{t/2}(r_{tt}, r_t, -r, k, f)(x, t), \\ H(y) &:= 5/4 + \nu(y). \end{aligned}$$

В дальнейшем уравнения (2.8)–(2.11) будем рассматривать в совокупности с равенством (2.6). Из теории гиперболических уравнений следует, что решение прямой задачи (2.6), (2.8)–(2.10) тождественно равно нулю ($u(x, y, t) \equiv 0$, $\tilde{v}(x, y, t) \equiv 0$) для всех $y > t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, так как (2.6), (2.8)–(2.10) является начально-краевой задачей с нулевыми начальными данными и граничным условием, сосредоточенным на $y = 0$, $t = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Существует такое представление решения прямой задачи (2.6), (2.8)–(2.10)*

$$u(x, y, t) = -\varepsilon(x)\delta(t - y) + \theta(t - y)\hat{u}(x, y, t), \quad (2.12)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, что регулярная функция $\hat{u}(x, y, t)$ удовлетворяет в области $t > y > 0$ уравнениям

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = H(y)\hat{u} + \varepsilon(x)[h(x, t - y) + q(x, t - y) + g(x, t - y)] + k_{00}(x, y, t)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t-y} [h(x, t-\tau) + q(x, t-\tau) + g(x, t-\tau)] \hat{u}(x, y, \tau) d\tau \\
& - e^{t/2} \tilde{v}(x, y, t) + \mu e^{t/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[k, r_{00} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right], \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(x, y, t) = & -\varepsilon(x) e^{(y-2t)/2} + \int_y^t e^{(\tau-2t)/2} \hat{u}(x, y, \tau) d\tau \\
& + \varepsilon(x) \int_0^t e^{(\tau-2t)/2} g(x, \tau-y) d\tau - \int_0^t \int_y^\tau e^{(\tau-2t)/2} g(x, \tau-s) \hat{u}(x, y, s) ds d\tau, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\hat{u}(x, y, t) \Big|_{t=y} = \beta(x, y), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \Big|_{y=+0} = 0. \quad (2.16)$$

В уравнении (2.13) использованы обозначения

$$k_{00}(x, y, t) := -\mu[\varepsilon''(x)k_0(x, t-y) + \varepsilon'(x)k_{0x}(x, t-y)], \quad (2.17)$$

$$r_{00}(x, y, t) := e^{-t/2} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon(x)g(x, t-y)). \quad (2.18)$$

Доказательство. Из (2.6) в силу (2.12) следует равенство

$$\tilde{u}(x, y, t) = -\varepsilon(x) e^{-y/2} \delta(t-y) - \varepsilon(x) r(x, t-y) e^{-y/2} \theta(t-y) + \bar{u}(x, y, t) \theta(t-y), \quad (2.19)$$

где $\bar{u}(x, y, t) = e^{-t/2} L_0[g, \hat{u}]$.

Оператор L_0 отличается от оператора L лишь тем, что в определении оператора L_0 нижний предел интеграла равен y :

$$L_0[k(x, t), u(x, z, t)] = u(x, z, t) + \int_y^t k(x, t-\tau) u(x, z, \tau) d\tau.$$

Подставим функции (2.12) и (2.19) в уравнения (2.8)–(2.10) и воспользуемся методом выделения особенностей [18, с. 611–629]. При этом прямые вычисления показывают, что последнее слагаемое в (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
& -\mu \varepsilon''(x) \delta(t-y) - \mu [\varepsilon''(x) k_0(x, t-y) + \varepsilon'(x) k_{0x}(x, t-y)] \theta(t-y) \\
& + \mu e^{t/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[k, \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon(x)g(x, t-y) e^{-t/2}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] \theta(t-y).
\end{aligned}$$

Обозначая $\beta(x, y) = u(x, y, y)$, $x \in \mathbb{R}$, и приравнявая коэффициенты при одинаковых особенностях, получим дифференциальное уравнение для нахождения $\beta(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \beta(x, y) = -\frac{1}{2} \varepsilon(x) H(y) - \frac{\mu}{2} \varepsilon''(x)$$

с начальным условием $\beta(x, 0) = \varepsilon(x)/2$, решая которое, найдём

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2} \left[\varepsilon(x) - \varepsilon(x) \int_0^y H(\xi) d\xi - \varepsilon''(x) \int_0^y \mu(l(\xi)) d\xi \right].$$

Следовательно, функция $\hat{u}(x, y, t)$ в области $t > y > 0$ удовлетворяет уравнениям (2.13)–(2.16). Равенство (2.14) получено интегрированием уравнения (2.3) с нулевым начальным условием $\tilde{v}|_{t<0} = 0$ и с учётом (2.12) и (2.19). $\square$

Заметим, что в силу (2.12) и введённого ранее обозначения функция $f_0(x, t)$ имеет вид

$$f_0(x, t) = -\varepsilon(x)\delta(t) + \tilde{f}(x, t)\theta(t), \quad (2.20)$$

где $\tilde{f}(x, t)$ — регулярная функция. Тогда дополнительное условие (2.11) для $\hat{u}$ принимает вид

$$\hat{u}|_{y=+0} = -\varepsilon(x)k_0(x, t) + L[k_0, \tilde{f}], \quad t > 0. \quad (2.21)$$

Из условий (2.15), (2.16) и (2.21) вытекают условия согласования

$$f(x, 0) = \varepsilon(x)/2, \quad f_t(x, 0) = -\frac{[9 - \mu''(0)]}{8}\varepsilon(x) - \frac{\mu(0)}{2}\varepsilon''(x), \quad (2.22)$$

которые вместе с равенством (2.20) являются необходимыми условиями разрешимости обратной задачи.

Заметим, что $u = \hat{u}$ при $t > y > 0$. Поэтому, рассматривая в дальнейшем прямую и обратную задачи в области $t > y > 0$, знак «крышечка» над u будем опускать.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Построим теперь, исходя из уравнений (2.13)–(2.16), (2.21), полную систему интегродифференциальных уравнений для обратной задачи, которая содержит производные по x , и эти производные присутствуют только в интегральных членах. Для удобства введём обозначения для линейных комбинаций неизвестных функций $u, u_t, h, q, g, k_0, k_{0t}, k_{0tt}$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, t) &= u(x, y, t) + \frac{\varepsilon(x)}{2}[k_0(x, t+y) + k_0(x, t-y)], \\ \psi_2(x, y, t) &= u_t(x, y, t) + \frac{\varepsilon(x)}{2}[k_{0t}(x, t+y) + k_{0t}(x, t-y)] - \frac{\tilde{f}(x, 0)}{2}[k_0(x, t+y) + k_0(x, t-y)], \\ \psi_3(x, y) &= h(x, y) - 2k_{0tt}(x, y) + \frac{2}{\varepsilon(x)}[\tilde{f}(x, 0)k_{0t}(x, y) + \tilde{f}_t(x, 0)k_0(x, y)] \\ &\quad + q(x, y) + g(x, y) - \frac{e^{y/4}}{\varepsilon(x)}\tilde{v}(x, y/2, y/2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(x, y) &= q(x, y) + k_{0t}(x, y) - k_0(x, y)/2, \quad \psi_5(x, y) = g(x, y) - k_0(x, y), \\ \psi_6(x, y) &= k_0(x, y), \quad \psi_7(x, y) = k_{0t}(x, y), \\ \psi_8(x, y) &= k_{0tt}(x, y) + h(x, y) + q(x, y) - k_0(x, y)/4. \end{aligned}$$

В результате получим уравнения для компонент ψ_i вектор-функции $\psi(x, y, t) = (\psi_1, \dots, \psi_8)$ в области G_T .

С помощью формулы Даламбера, обращая дифференциальный оператор в левой части (2.15) на данных Коши (2.16), (2.21) и перенося выражение, содержащее неизвестную k_0 , в левую часть, с учётом введённых обозначений получим

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y, t) = & \psi_1^0 + \frac{1}{2} \int_0^{t+y} \tilde{f}(x, t+y-\tau) \psi_6(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-y} \tilde{f}(x, t-y-\tau) \psi_6(x, \tau) d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ H(\xi) \left[\psi_1(x, \xi, \tau) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_6(x, \tau+\xi) + \psi_6(x, \tau-\xi)) \right] \right. \\
& + \frac{\varepsilon(x)}{3} \left[\psi_3(x, \tau-\xi) + 2\psi_8(x, \tau-\xi) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \tau-\xi) + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \tau-\xi) \right. \\
& \left. \left. + 2\psi_5(x, \tau-\xi) + \frac{e^{(\tau-\xi)/2}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{\tau-\xi}{2}, \frac{\tau-\xi}{2} \right) \right] + k_{00}(x, \xi, \tau) \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} \int_0^{\tau-\xi} \left[\psi_3(x, \alpha) + 2\psi_8(x, \alpha) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \alpha) + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\psi_5(x, \alpha) + \frac{e^{\alpha/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right. \\
& \left. \times \left[\psi_1(x, \xi, \tau-\alpha) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_6(x, \tau+\xi-\alpha) + \psi_6(x, \tau-\xi-\alpha)) \right] d\alpha \right. \\
& \left. - e^{\tau/2} \tilde{v}(x, \xi, \tau) + \mu e^{\tau/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-\tau/2} \psi_6(x, \tau), \left(r_{00} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) (x, \xi, \tau) \right] \right\} d\tau d\xi, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

где $\psi_1^0(x, y, t) = (\tilde{f}(x, t+y) + \tilde{f}(x, t-y))/2$. Чтобы получить уравнение для ψ_2 , воспользуемся равенством (3.1). Используя эквивалентное описание области интегрирования

$$\{(\xi, \tau) \mid t-y \leq \tau \leq t+y, 0 \leq \xi \leq y-|t-\tau|\},$$

продифференцируем (3.1) по t . Делая замену переменной интегрирования $\tau - t = \xi'$, получим

$$\begin{aligned}
\psi_2(x, y, t) = & \psi_2^0 + \frac{1}{2} \int_0^{t+y} \tilde{f}_t(x, t+y-\tau) \psi_6(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-y} \tilde{f}_t(x, t-y-\tau) \psi_6(x, \tau) d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_{-y}^y \left\{ H(y-|\xi|) \left[\psi_1(x, y-|\xi|, \xi+t) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_6(x, t+\xi+y-|\xi|) + \psi_6(x, t+\xi-y+|\xi|)) \right] \right. \\
& + \frac{\varepsilon(x)}{3} \left[\psi_3(x, t+\xi-y+|\xi|) + 2\psi_8(x, t+\xi-y+|\xi|) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, t+\xi-y+|\xi|) \right. \\
& \left. + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, t+\xi-y+|\xi|) + 2\psi_5(x, t+\xi-y+|\xi|) \right. \\
& \left. + \frac{e^{(t+\xi-y+|\xi|)/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{t+\xi-y+|\xi|}{2}, \frac{t+\xi-y+|\xi|}{2} \right) \right] + k_{00}(x, y-|\xi|, \xi+t) \\
& \left. - \frac{1}{3} \int_0^{t-y+\xi+|\xi|} \left[\psi_3(x, \alpha) + 2\psi_8(x, \alpha) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \alpha) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \alpha) + 2\psi_5(x, \alpha) + \frac{e^{\alpha/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) \Big] \\
& \times \left[\psi_1(x, y - |\xi|, \xi + t - \alpha) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_6(x, t + \xi + y - |\xi| - \alpha) + \psi_6(x, t + \xi - y + |\xi| - \alpha)) \right] d\alpha \\
& - e^{(\xi+t)/2} \tilde{v}(x, y - |\xi|, \xi + t) \\
& + \mu e^{(\xi+t)/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-(\xi+t)/2} \psi_6(x, \xi + t), \left(r_{00} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) (x, y - |\xi|, \xi + t) \right] \Big\} \operatorname{sgn}(\xi) d\xi, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

где $\psi_2^0(x, y, t) = (\tilde{f}_t(x, t + y) + \tilde{f}_t(x, t - y))/2$.

Переходя в формуле (3.1) к пределу при $t \rightarrow y + 0$, учитывая условия (2.15), (2.16), (2.21) и дважды дифференцируя по y , получим уравнение для ψ_3 :

$$\begin{aligned}
\psi_3(x, y) &= \psi_3^0 - \frac{2}{\varepsilon(x)} \int_0^y \tilde{f}_{tt}(x, y - \xi) \psi_6(x, \xi) d\xi \\
& - \frac{2}{\varepsilon(x)} \int_0^{y/2} \left\{ H(\xi) \left[\psi_2(x, \xi, y - \xi) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_7(x, y) + \psi_7(x, y - 2\xi)) + \frac{\tilde{f}(x, 0)}{2} (\psi_6(x, y) + \psi_6(x, y - 2\xi)) \right] \right. \\
& + k_{0tt}(x, \xi, y - \xi) - \frac{1}{3} \left[\psi_3(x, y - 2\xi) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, y - 2\xi) + 2\psi_8(x, y - 2\xi) \right. \\
& + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, y - 2\xi) + 2\psi_5(x, y - 2\xi) + \frac{e^{(y-2\xi)/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{y-2\xi}{2}, \frac{y-2\xi}{2} \right) \Big] \beta(x, \xi) \\
& - \frac{1}{3} \int_0^{y-2\xi} \left[\psi_3(x, \alpha) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \alpha) + 2\psi_8(x, \alpha) + \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \alpha) \right. \\
& + 2\psi_5(x, \alpha) + \frac{e^{(y-2\xi)/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v} \left(x, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) \Big] \left[\psi_2(x, \xi, y - \xi - \alpha) - \frac{\varepsilon(x)}{2} (\psi_7(x, y - \alpha) \right. \\
& + \psi_7(x, y - 2\xi - \alpha)) + \frac{\tilde{f}(x, 0)}{2} (\psi_6(x, y - \alpha) + \psi_6(x, y - 2\xi - \alpha)) \Big] d\alpha \\
& - \frac{1}{2} e^{(y-\xi)/2} (\tilde{v}(x, \xi, y - \xi) + 2\tilde{v}_t(x, \xi, y - \xi)) \\
& + \frac{\mu}{2} e^{(y-\xi)/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-(y-\xi)/2} \psi_6(x, y - \xi), \left(r_{00} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) (x, \xi, y - \xi) \right] \\
& + \mu e^{(y-\xi)/2} (r_{00tx}(x, \xi, y - \xi) + \bar{u}_{txx}(x, \xi, y - \xi)) + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\beta_x(x, \xi) \psi_6(x, y - 2\xi)) \\
& \left. + \mu e^{(y-\xi)/2} \frac{\partial}{\partial x} L_0 [e^{-(y-\xi)/2} \psi_6(x, y - \xi), (r_{00t} + \bar{u}_{tx})(x, \xi, y - \xi)] \right\} d\xi, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где

$$\psi_3^0(x, y) = -\frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_{tt}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon(x)} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta(x, y/2) - H(y/2) \beta(x, y/2) - \mu \beta_{xx}(x, y/2) \right].$$

Далее, учитывая введённые обозначения, находим

$$\psi_4(x, y) = \psi_4^0 - \int_0^y \left[\psi_4(x, \xi) - \psi_7(x, \xi) - \frac{1}{2} \psi_6(x, \xi) \right] \psi_6(x, y - \xi) d\xi, \quad (3.4)$$

$$\psi_5(x, y) = \psi_5^0 - \int_0^y [\psi_5(x, \xi) + \psi_6(x, \xi)] \psi_6(x, y - \xi) d\xi, \quad (3.5)$$

здесь $\psi_4^0(x, y) = 0$, $\psi_5^0(x, y) = 0$.

Для замыкания системы (3.1)–(3.5) используем следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \psi_6(x, y) = \psi_6^0 + \frac{1}{3} \int_0^y (y - \xi) \left[\psi_8(x, \xi) - \psi_3(x, \xi) + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \xi) \right. \\ \left. + \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \xi) + \psi_5(x, \xi) - \frac{e^{\xi/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v}(x, \xi/2, \xi/2) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_7(x, y) = \psi_7^0 + \frac{1}{3} \int_0^y \left[\psi_8(x, \xi) - \psi_3(x, \xi) + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \xi) + \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \xi) \right. \\ \left. + \psi_5(x, \xi) - \frac{e^{\xi/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v}(x, \xi/2, \xi/2) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_8(x, y) = \psi_8^0 - \frac{1}{3} \int_0^y \left[\psi_3(x, \xi) + 2\psi_8(x, \xi) - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, \xi) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, \xi) - \psi_5(x, \xi) + \frac{e^{\xi/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v}(x, \xi/2, \xi/2) \right] \psi_6(x, y - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\psi_6^0(x, y) = \psi_7^0(x, y) = \psi_8^0(x, y) = 0$.

В дальнейшем уравнения (2.15)–(2.19) будем рассматривать в области

$$D_T = G_T \times \mathbb{R}, \quad G_T := \{(y, t) \mid 0 \leq y \leq t \leq T - y\}, \quad T > 0.$$

Будем предполагать, что

$$(\varepsilon(x), 1/\varepsilon(x)) \in \mathbf{A}_{s_0}, \quad s_0 > 0; \quad (\tilde{f}(x, t), \tilde{f}_t(x, t), \tilde{f}_{tt}(x, t)) \in C_T([0, T]; \mathbf{A}_{s_0}), \quad T > 0,$$

причём при некотором положительном конечном R_0 имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max \{ \|(\varepsilon(x))^{-1}\|_{s_0}, \max\{1, T\} \max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{f}(x, t)\|_{s_0}(t), \\ \max\{1, T\} \max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{f}_t(x, t)\|_{s_0}(t), \max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{f}_{tt}(x, t)\|_{s_0}(t) \} = R_0/2, \\ \max \{ \max_{0 \leq y \leq T/2} \|\beta(x, y)\|_{s_0}(y), \|H(y)\|_{s_0}, \max\{1, \mu_0\} \|\exp(\pm t/2)\|_{s_0}(t), \\ \max_{0 \leq y \leq T/2} \|\beta_{yy}(x, y)\|_{s_0}(y), \max\{1, \mu_0\} \max_{0 \leq y \leq T/2} \|\beta_{xx}(x, y)\|_{s_0}(y) \} = R_0/3, \end{aligned} \quad (3.9)$$

здесь $\mu_0 := \max_{y \in [0, T/2]} \mu(l(y))$.

В силу сделанных выше предположений функции ψ_i^0 , $i = \overline{1, 8}$, являются при каждом $(y, t) \in G_T$ элементами $\mathbf{A}_{s_0}$, непрерывными по $(y, t) \in G_T$, и $\|\psi_i^0\|_s(y, t) \leq R_0$ при $i = 1, 2$, $\|\psi_i^0\|_s(t) \leq R_0$ при $i = \overline{3, 8}$; $0 < s \leq s_0$.

По отношению к системе (3.1)–(3.8) справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема. Пусть $\mu \in \Lambda$, и пусть выполнены равенства (2.20), (2.22), (3.9). Предположим, что функции $\varepsilon(x)$, $1/\varepsilon(x)$ принадлежат пространству A_{s_0} , а функции $\tilde{f}(x, t)$, $\tilde{f}_t(x, t)$, $\tilde{f}_{tt}(x, t)$ принадлежат пространству $C_T([0, T]; \mathbf{A}_{s_0})$. Тогда найдётся такое число $a \in (0, T/2)$, что для любого $s \in (0, s_0)$ в области $\Gamma_{sT} = D_T \cap \{(x, y, t) \mid 0 \leq y \leq a(s_0 - s)\}$ существует единственное решение системы уравнений (3.1)–(3.8), для которого $\psi_i(x, y, t) \in C_{(y,t)}(P_{sT}; \mathbf{A}_{s_0})$, $i = 1, 2$, $\psi_i(x, t) \in C_T([0, a(s_0 - s)]; \mathbf{A}_{s_0})$, $i = \overline{3, 8}$, $P_{sT} = G_T \cap \{(y, t) \mid 0 \leq y \leq a(s_0 - s)\}$, причём

$$\begin{aligned} \|\psi_i - \psi_i^0\|_s &\leq R_0, \quad i = 1, 6, \quad \|\psi_3 - \psi_3^0\|_s \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \\ \|\psi_i - \psi_i^0\|_s &\leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad i = 2, 4, 5, 7, 8, \quad (y, t) \in P_{sT}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы используем метод, применённый в работах [3–5]. Уравнения (3.1)–(3.8) образуют полную систему равенств для неизвестных функций в области D_T . Согласно введённым обозначениям для вектор-функции $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_8)$ запишем эту систему в операторном виде

$$\psi = B\psi, \quad (3.10)$$

где $B = (B_1, \dots, B_8)$ и компоненты B_i определены в соответствии с правыми частями уравнений (3.1)–(3.8). Обозначим $\psi^0 = B(0)$, $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_8^0)$.

Пусть убывающая числовой последовательность $\{a_n\}$ определена соотношениями

$$a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

обозначим

$$a = \lim a_n = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{-1}. \quad (3.12)$$

Положительное число a_0 , $a_0 < T/(2s_0)$, будет выбрано позже. Для уравнения (3.10) построим последовательные приближения:

$$\psi^{n+1} = B\psi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \psi^n = (\psi_i^n)_{i=1}^8,$$

и обозначим

$$\phi^n = \psi^{n+1} - \psi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \phi^n = (\phi_i^n)_{i=1}^8.$$

В дальнейшем нижний индекс у ψ означает номер компоненты вектор-функции ψ , а верхний индекс — номер приближения. Докажем, что при подходящем выборе a_0 выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \lambda_n = \max \Bigg\{ & \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\phi_i^n\|_s(y, t) \frac{a_n(s_0 - s) - y}{y} \right], \quad i = 1, \\ & \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\phi_2^n\|_s(y, t) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^2}{a_n y} \right], \quad \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\phi_3^n\|_s(y) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^3}{a_n^2 y} \right], \\ & \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\phi_i^n\|_s(y) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^2}{a_n y} \right], \quad i = 4, 5, 7, 8, \\ & \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\phi_6^n\|_s(y) \frac{a_n(s_0 - s) - y}{y} \right] \Bigg\} < \infty, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\psi_1^{n+1} - \psi_1^0\|_s(y, t) \leq R_0, \quad \|\psi_2^{n+1} - \psi_2^0\|_s(y, t) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \\
& \|\psi_3^{n+1} - \psi_3^0\|_s(y) \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \quad \|\psi_i^{n+1} - \psi_i^0\|_s(y) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad i = 4, 5, 7, 8, \\
& \|\psi_6^{n+1} - \psi_6^0\|_s(y) \leq R_0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где $F_n = \{(y, t, s) \mid (y, t) \in G_T, 0 \leq y \leq a_n(s_0 - s), 0 < s < s_0\}$. В самом деле, используя (1.7), находим для $(y, t, s) \in F_0$:

$$\begin{aligned}
& \|\phi_1^0\|_s(y, t) \leq \frac{1}{2} \int_0^{t+y} \|\tilde{f}\|_s(x, t + y - \tau) \|\psi_6^0\|_s(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t-y} \|\tilde{f}\|_s(x, t - y - \tau) \|\psi_6^0\|_s(x, \tau) d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ \|H(\xi)\|_s \left[\|\psi_1^0\|_s(x, \xi, \tau) + \frac{\|\varepsilon(x)\|_s}{2} (\|\psi_6^0\|_s(x, \tau + \xi) + \|\psi_6^0\|_s(x, \tau - \xi)) \right] \right. \\
& + \frac{\|\varepsilon(x)\|_s}{3} \left[\|\psi_3^0\|_s(x, \tau - \xi) + 2\|\psi_8^0\|_s(x, \tau - \xi) + \frac{2}{\|\varepsilon(x)\|_s} \tilde{f}(x, 0) \|\psi_7^0\|_s(x, \tau - \xi) \right. \\
& + \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{\|\varepsilon(x)\|_s} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \|\psi_6^0\|_s(x, \tau - \xi) + 2\|\psi_5^0\|_s(x, \tau - \xi) \\
& + \left. \left. \left\| \frac{e^{(\tau-\xi)/2}}{\varepsilon(x)} \right\|_s \|\tilde{v}^0\|_s \left(x, \frac{\tau - \xi}{2}, \frac{\tau - \xi}{2} \right) \right] + \|k_{00}^0\|_s(x, \xi, \tau) \right. \\
& + \frac{1}{3} \int_0^{\tau-\xi} \left[\|\psi_3^0\|_s(x, \alpha) + 2\|\psi_8^0\|_s(x, \alpha) + \frac{2}{\|\varepsilon(x)\|_s} \tilde{f}(x, 0) \|\psi_7^0\|_s(x, \alpha) \right. \\
& + \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{\|\varepsilon(x)\|_s} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \|\psi_6^0\|_s(x, \alpha) + 2\|\psi_5^0\|_s(x, \alpha) + \left\| \frac{e^{\alpha/4}}{\varepsilon(x)} \right\|_s \|\tilde{v}^0\|_s \left(x, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) \Big] \\
& \times \left[\|\psi_1^0\|_s(x, \xi, \tau - \alpha) + \frac{\|\varepsilon(x)\|_s}{2} (\|\psi_6^0\|_s(x, \tau + \xi - \alpha) + \|\psi_6^0\|_s(x, \tau - \xi - \alpha)) \right] d\alpha \\
& + \|e^{\tau/2}\|_s \|\tilde{v}^0\|_s(x, \xi, \tau) + \|\mu e^{\tau/2}\|_s \left\| \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-\tau/2} \psi_6^0(x, \tau), \left(r_{00}^0 + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x} \right)(x, \xi, \tau) \right] \right\|_s \Big\} d\tau d\xi \\
& \leq 2yR_0^2 + \int_0^y (y - \xi) \left\{ \frac{R_0^2}{3} (1 + r_0) + \frac{r_0 R_0}{3} \left[\frac{15}{2} + 2R_0 + \|\tilde{v}^0\|_s \right] + \|k_{00}^0\|_s \right. \\
& + \frac{tR_0^2}{3} \left[\frac{15}{2} + 2R_0 + \|\tilde{v}^0\|_s \right] (1 + r_0) + R_0 \|\tilde{v}^0\|_s + R_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-\tau/2} \psi_6^0(x, \tau), \left(r_{00}^0 + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x} \right)(\xi, \tau) \right] \right\|_s \Big\} d\xi,
\end{aligned}$$

где $r_0 := \max\{\|\varepsilon(x)\|_s, \|\varepsilon'(x)\|_s, \|\varepsilon''(x)\|_s\}$, и

$$\|\tilde{v}^0\|_s \leq (1 + 2TR_0)(r_0 + R_0T), \quad \|k_{00}^0\|_s(y, t) \leq r_0 R_0^2 \left(1 + \frac{1}{s(y) - y} \right),$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial x} L_0 \left[e^{-\tau/2} \psi_6^0(x, \tau), \left(r_{00}^0 + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x} \right)(\xi, \tau) \right] \right\|_s(y, t) \leq \frac{1}{s(y) - y} \left[\|r_{00}^0\|_s + \frac{\|\bar{u}^0\|_s}{s(y) - y} \right. \\
& \left. + TR_0^2 \left(\|r_{00}^0\|_s + \frac{\|\bar{u}^0\|_s}{s(y) - y} \right) \right] \leq \frac{R_0 M_1}{(s(y) - y)^2},
\end{aligned}$$

где $M_1 := (1 + TR_0)(1 + r_0R_0 + TR_0)$. Здесь, в промежуточных вычислениях, функциональная связь $s(\xi)$ взята в виде $s(\xi) = 0, 5(s + s_0 - \xi/a_0)$. При таком выборе верны соотношения $s(\xi) > s$ и $(\xi, \tau, s(\xi)) \in F_0$. С учётом приведённых неравенств, имеем

$$\begin{aligned} \|\phi_1^0\|_s(y, t) &\leq 2yR_0^2 + a_0^2R_0(M_1 + s_0^2r_0R_0 + s_0^2M_2) \int_0^y \frac{y - \xi}{((s_0 - s)a_0 - \xi)^2} d\xi \\ &\leq a_0R_0(2s_0R_0 + a_0(M_1 + s_0^2r_0R_0 + s_0^2M_2)) \frac{y}{(s_0 - s)a_0 - y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_2 := (1 + 2TR_0)(r_0 + TR_0) &\left(1 + \frac{r_0}{3}(1 + T + TR_0)\right) \\ &+ Tr_0(1 + R_0) \left(\frac{7}{2} + \frac{2R_0}{3}\right) + \frac{7r_0}{2} + \frac{R_0}{3} + \frac{5}{6}r_0R_0. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для всех ϕ_i^0 , $i = \overline{2, 8}$, для числа λ_0 можем написать оценку

$$\lambda_0 \leq a_0R_0d_0(a_0, r_0, s_0, T, R_0) \equiv R_0\eta_0.$$

Функция $d_0(a_0, r_0, s_0, T, R_0)$ является непрерывной, и, следовательно, она ограничена в любой компактной области. Таким образом, λ_0 является конечным числом. Используя ранее полученные равенства для функций ψ_i^1 , $i = \overline{1, 8}$, при $(y, t, s) \in F_1$ находим

$$\begin{aligned} \|\psi_1^1 - \psi_1^0\|_s(y, t) &= \|\phi_1^0\|_s(y, t) \leq \frac{\lambda_0 y}{a_0(s_0 - s) - y} \leq \frac{\lambda_0 a_1}{a_0 - a_1} = \lambda_0 \leq R_0\eta_0, \\ \|\psi_2^1 - \psi_2^0\|_s(y, t) &= \|\phi_2^0\|_s(y, t) \leq \frac{\lambda_0 a_0 y}{(a_0(s_0 - s) - y)^2} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \leq \frac{2R_0\eta_0}{s_0 - s}, \\ \|\psi_3^1 - \psi_3^0\|_s(y) &= \|\phi_3^0\|_s(y) \leq \frac{\lambda_0 a_0^2 y}{(a_0(s_0 - s) - y)^3} \leq \frac{4\lambda_0}{(s_0 - s)^2} \leq \frac{4R_0\eta_0}{(s_0 - s)^2}, \\ \|\psi_i^1 - \psi_i^0\|_s(y) &= \|\phi_i^0\|_s(y) \leq \frac{\lambda_0 a_0 y}{(a_0(s_0 - s) - y)^2} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \leq \frac{2R_0\eta_0}{s_0 - s}, \quad i = 4, 5, 7, 8, \\ \|\psi_6^1 - \psi_6^0\|_s(y) &= \|\phi_6^0\|_s(y) \leq \frac{\lambda_0 y}{a_0(s_0 - s) - y} \leq \frac{\lambda_0 a_1}{a_0 - a_1} = \lambda_0 \leq R_0\eta_0. \end{aligned}$$

Если выбрать a_0 так, чтобы $4\eta_0 \leq 1$, то при $n = 0$, будут выполнены неравенства (3.14).

Далее доказательство проводится методом математической индукции.

Предположим, что для $n = 0, 1, 2, \dots, j$ неравенства (3.13), (3.14) имеют место при подходящем выборе a_0 . Тогда для $(y, t, s) \in F_{j+1}$ можем написать

$$\begin{aligned} \|\phi_6^{j+1}\|_s(y) &\leq \frac{1}{3} \int_0^y (y - \xi) \left[\|\phi_8^j\|_s(x, \xi) + \|\phi_3^j\|_s(x, \xi) + \left\| \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \right\|_s \|\phi_7^j\|_s(x, \xi) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{5}{4} + \left\| \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right\|_s \right) \|\phi_6^j\|_s(x, \xi) + \|\phi_5^j\|_s(x, \xi) + \left\| \frac{e^{\xi/4}}{\varepsilon(x)} \right\|_s \|\tilde{v}^j\|_s(x, \xi/2, \xi/2) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\tilde{v}^j\|_s \leq \frac{r_0}{2} TR_0 [\|\phi_5^j\|_s + \|\phi_6^j\|_s] + \frac{T^2}{4} R_0 [(\|\phi_5^j\|_s + \|\phi_6^j\|_s) \|\psi_1^{j+1}\|_s + (\|\psi_5^j\|_s + \|\psi_6^j\|_s) \|\phi_1^j\|_s]$$

$$\leq \frac{\lambda_j y}{(a_{j+1}(s_0 - s) - y)^2} \left[\frac{TR_0^2}{2} (a_j + s_0 a_{j+1})(r_0 + TR_0) + \frac{T^2 R_0^2}{4} (3s_0 + 1)a_{j+1} \right] \leq \frac{\lambda_j y a_0 N}{(a_{j+1}(s_0 - s) - y)^2}.$$

Здесь $N := \frac{TR_0^2}{2}(1 + s_0)(r_0 + TR_0) + \frac{T^2 R_0^2}{4}(3s_0 + 1)$ и были использованы неравенства

$$\|\psi_1^{j+1}\|_s \leq 2R_0, \quad \|\psi_5^j\|_s + \|\psi_6^j\|_s \leq \frac{R_0(s_0 + 1)}{s_0 - s}, \quad a_j \leq a_0.$$

Оценивая интеграл в неравенстве для функции ϕ_6^{j+1} , получим

$$\begin{aligned} \|\phi_6^{j+1}\|_s(y) &\leq \frac{\lambda_j}{3} \int_0^y (y - \xi) \xi \left[\frac{a_j a_{j+1} s_0 + a_{j+1}^2 + 2R_0 s_0 a_j a_{j+1} + (5/4 + 2R_0^2) s_0^2 a_{j+1}^2}{((s_0 - s)a_{j+1} - \xi)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_j a_{j+1} s_0 + N R_0 s_0 a_0 a_{j+1}}{((s_0 - s)a_{j+1} - \xi)^3} \right] d\xi \\ &\leq \frac{\lambda_j a_0^2}{3} [1 + 2s_0(1 + R_0 + N R_0 + (5/8 + R_0^2)s_0)] \frac{y}{(s_0 - s)a_{j+1} - y} \\ &= \frac{\lambda_j a_0^2 y}{(s_0 - s)a_{j+1} - y} d_6(s_0, r_0, T, R_0), \quad (y, t, s) \in F_{j+1}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения, проведённые для остальных функций ϕ_i^{j+1} , $i = \overline{1, 5, 7, 8}$, приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} \|\phi_1^{j+1}\|_s(y, t) &\leq \frac{\lambda_j a_0^2 y}{(s_0 - s)a_{j+1} - y} d_1(s_0, r_0, T, R_0), \\ \|\phi_2^{j+1}\|_s(y, t) &\leq \frac{\lambda_j a_{j+1} y}{((s_0 - s)a_{j+1} - y)^2} a_0 d_2(s_0, r_0, T, R_0), \\ \|\phi_3^{j+1}\|_s(y) &\leq \frac{\lambda_j a_{j+1}^2 y}{((s_0 - s)a_{j+1} - y)^3} a_0 d_3(s_0, r_0, T, R_0), \\ \|\phi_i^{j+1}\|_s(y) &\leq \frac{\lambda_j a_{j+1} y}{((s_0 - s)a_{j+1} - y)^2} a_0 d_i(s_0, r_0, T, R_0), \quad (y, t, s) \in F_{j+1}, \quad i = 4, 5, 7, 8. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует

$$\lambda_{j+1} \leq \lambda_j \alpha < \infty, \quad (3.15)$$

где $\alpha := a_0 \max(1, a_0) \max\{d_k\}$, $k = \overline{1, 8}$. Кроме того, для $(y, t, s) \in F_{j+2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_1^{j+2} - \psi_1^0\|_s(y, t) &\leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\phi_1^n\|_s(y, t) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n y}{(s_0 - s)a_n - y} \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n a_{j+2}}{a_n - a_{j+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n}{a_n/a_{j+2} - 1} \leq \sum_{n=0}^{j+1} \lambda_n (n+1)^2 \leq \lambda_0 \sum_{n=0}^{j+1} \alpha^n (n+1)^2. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|\psi_2^{j+2} - \psi_2^0\|_s(y, t) &\leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\phi_2^n\|_s(y, t) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n a_n y}{(a_n(s_0 - s) - y)^2} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \sum_{n=0}^{j+1} \alpha^n (n+1)^4, \\ \|\psi_3^{j+2} - \psi_3^0\|_s(y) &\leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\phi_3^n\|_s(y) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n a_n^2 y}{(a_n(s_0 - s) - y)^3} \leq \frac{4\lambda_0}{(s_0 - s)^2} \sum_{n=0}^{j+1} \alpha^n (n+1)^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\psi_i^{j+2} - \psi_i^0\|_s(y) &\leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\phi_i^n\|_s(y) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n a_n y}{(a_n(s_0 - s) - y)^2} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \sum_{n=0}^{j+1} \alpha^n (n+1)^4, \quad i = 4, 5, 7, 8, \\ \|\psi_6^{j+2} - \psi_6^0\|_s(y) &\leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\phi_6^n\|_s(y, t) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n y}{(s_0 - s)a_n - y} \leq \lambda_0 \sum_{n=0}^{j+1} \alpha^n (n+1)^2.\end{aligned}$$

Выберем теперь $a_0 \in (0, T/2)$ таким, что $\alpha < 1$ и $4\eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (n+1)^6 \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\|\psi_i^{j+2} - \psi_i^0\|_s &\leq R_0, \quad i = 1, 6, \quad \|\psi_3^{j+2} - \psi_3^0\|_s \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \\ \|\psi_i^{j+2} - \psi_i^0\|_s &\leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad i = 2, 4, 5, 7, 8, \quad (y, t, s) \in F_{j+2},\end{aligned}$$

и метод индукции оправдан. Так как выбор a_0 не зависит от номера приближений, то функции ψ_i^n , $i = \overline{1, 8}$, принадлежат пространству $C_{(y,t)}(F; \mathbf{A}_s)$, $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, и для них имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\|\psi_i^n - \psi_i^0\|_s &\leq R_0, \quad i = 1, 6, \quad \|\psi_3^n - \psi_3^0\|_s \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \\ \|\psi_i^n - \psi_i^0\|_s &\leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad i = 2, 4, 5, 7, 8, \quad (y, t, s) \in F.\end{aligned}$$

При $s \in (0, s_0)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \phi^n$ сходится равномерно к функции ϕ в норме пространства $C_{(y,t)}(P_{sT}; \mathbf{A}_s)$. Таким образом, $\psi_i^n \rightarrow \psi_i \in C_{(y,t)}(P_{sT}; \mathbf{A}_s)$ и удовлетворяют уравнениям (3.1)–(3.8).

Докажем теперь, что найденное решение единственно. Пусть ψ_i и $\hat{\psi}_i$ — любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned}\|\psi_1 - \psi_2^0\|_s(y, t) &\leq R_0, \quad \|\psi_2 - \psi_2^0\|_s(y, t) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \\ \|\psi_3 - \psi_3^0\|_s(y) &\leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \quad \|\psi_i - \psi_i^0\|_s(y) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad i = 4, 5, 7, 8, \\ \|\psi_6 - \psi_6^0\|_s(y) &\leq R_0, \quad (y, t, s) \in F.\end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{\phi}_i = \psi_i - \hat{\psi}_i$ и положим

$$\begin{aligned}\lambda := \max \left\{ \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\tilde{\phi}_1\|_s(y, t) \frac{a_n(s_0 - s) - y}{y} \right], \right. \\ \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\tilde{\phi}_2\|_s(y, t) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^2}{a_n y} \right], \quad \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\tilde{\phi}_3\|_s(y) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^3}{a_n^2 y} \right], \\ \left. \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\tilde{\phi}_i\|_s(y) \frac{(a_n(s_0 - s) - y)^2}{a_n y} \right], \quad i = 4, 5, 7, 8, \quad \sup_{(y,t,s) \in F_n} \left[\|\tilde{\phi}_6\|_s(y) \frac{a_n(s_0 - s) - y}{y} \right] \right\} < \infty,\end{aligned}$$

где число a определено формулой (3.12). Тогда для функций $\tilde{\phi}_i$ можно получить соотношения, эквивалентные соотношениям (3.1)–(3.8) для функций ϕ_i . Применяя к ним оценки, приведённые выше, получим аналог неравенства (3.15): $\lambda \leq \lambda \alpha' < \infty$, где

$$\alpha' = a_0 \max(1, a_0) \max\{d'_k\} < \alpha < 1, \quad k = \overline{1, 8}.$$

Следовательно, $\lambda = 0$. Поэтому $\psi_i = \hat{\psi}_i$. □

Замечание. По найденным функциям ψ_i , $i = \overline{1, 8}$, неизвестные функции $u, u_t, h, q, g, k_0, k_{0t}, k_{0tt}$ находятся по следующим формулам:

$$u(x, y, t) = \psi_1(x, y, t) - \frac{\varepsilon(x)}{2}[\psi_6(x, t + y) + \psi_6(x, t - y)],$$

$$u_t(x, y, t) = \psi_2(x, y, t) - \frac{\varepsilon(x)}{2}[\psi_7(x, t + y) + \psi_7(x, t - y)] + \frac{\tilde{f}(x, 0)}{2}[\psi_6(x, t + y) + \psi_6(x, t - y)],$$

$$h(x, y) = \frac{1}{3} \left[\psi_3(x, y) + 2\psi_8(x, y) - \psi_4(x, y) + \left(3 - \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \right) \psi_7(x, y) - 2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, y) + \frac{e^{y/4}}{\varepsilon(x)} \tilde{v}(x, y/2, y/2) \right],$$

$$q(x, y) = \psi_4(x, y) - \psi_7(x, y) + \psi_6(x, y)/2,$$

$$g(x, y) = \psi_5(x, y) + \psi_6(x, y), \quad k_0(x, y) = \psi_6(x, y), \quad k_{0t}(x, y) = \psi_7(x, y),$$

$$k_{0tt}(x, y) = \frac{1}{3} \left[\psi_8(x, y) - \psi_3(x, y) + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}(x, 0) \psi_7(x, y) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\varepsilon(x)} \tilde{f}_t(x, 0) \right) \psi_6(x, y) \right].$$

Тогда функция $\tilde{u}$ становится известной и, как следует из представления (2.12), она имеет вид

$$\tilde{u}(x, y, t) = -e^{-y/2} \varepsilon(x) \delta(t - y) + Q(x, y, t) \theta(t - y),$$

где

$$Q(x, y, t) = e^{-t/2} u(x, y, t) - e^{-y/2} \varepsilon(x) r(x, t - y) + \int_0^{t-y} r(x, t - \tau) e^{-\tau/2} u(x, y, \tau) d\tau,$$

а $r(x, t)$ есть решение интегрального уравнения (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.
2. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. N. Y.: Courant Institute Math. Sci., 1974.
3. Романов В. Г. О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 275–283.
4. Романов В. Г. Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.
5. Романов В. Г. О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР, 1989. Т. 304, № 4. С. 807–811.
6. Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
7. Durdiev D. K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Мат. физика, анализ, геометрия. 2007. Т. 3, № 4. С. 411–423.
8. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегродифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 29, № 4. С. 37–47.
9. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.

10. *Romanov V. G.* A problem of recovering a special two dimension potential in a hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2016. V. 4, N 1. P. 32–46.
11. *Durdiev U. D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2019. V 7, N 2. P. 4–19.
12. *Durdiev U. D., Totieva Z. D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2019. V. 42, N 18. P. 1–12.
13. *Romanov V. G.* Inverse problems for equation with a memory // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
14. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1401–1412.
15. *Карчевский А. Л., Фатьянов А. Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // *Сиб. журн. вычисл. математики.* 2001. Т. 4, № 3. С. 259–268.
16. *Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L., Lorenzi A.* Lavrent'ev regularization of solutions to linear integrodifferential inverse problems // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 1993. V. 1, N 2. P. 115–140.
17. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
18. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

UDC 517.958

THE PROBLEM OF DETERMINING THE 2D-KERNEL IN A SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A VISCOELASTIC POROUS MEDIUM

© 2020 D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov

*Bukhara State University, ul. M.Ikbol 11, Bukhara 200117, Uzbekistan*E-mails: ^adurdiev65@mail.ru, ^baraxmonov@mail.ru

Received 04.02.2020, revised 23.03.2020, accepted 09.04.2020

Abstract. Under consideration is the system of integro-differential equations of viscoelastic porous medium. The direct problem is to define the y -component of the displacement vectors of the elastic porous body and the liquid from the initial boundary value problem for these equations. We assume that the kernel of the integral term of the first equation depends on time and one of the spatial variables. To determine the kernel, some additional condition is given on the solution of the direct problem for $z = 0$. The inverse problem is replaced by an equivalent system of integro-differential equations for the unknown functions. We apply the method of scales of the Banach spaces of analytic functions. The local solvability of the inverse problem is proved in the class of the functions analytic in x and continuous in t .

Keywords: inverse problem, kernel, Dirac delta function, integro-differential equation, analytic function.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.205

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Nelineinaya zadacha Koshi v shkalakh banakhovykh prostranstv [A Nonlinear Cauchy Problem in Scales of Banach Spaces]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, Vol. 200, No. 4, pp. 789–792 (in Russian).
2. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. N. Y.: Courant Institute Math. Sci., 1974.
3. Romanov V.G. O lokal'noi razreshimosti nekotorykh mnogomernykh obratnykh zadach dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa [On Local Solvability of Some Multidimensional Inverse Problems for Equations of Hyperbolic Type]. *Differentsial'nye uravneniya*, 1989, Vol. 25, No. 2, pp. 275–283 (in Russian).
4. Romanov V.G. Problem of determining the speed of sound. *Siberian Math. J.*, 1989, Vol. 30, No. 4, pp. 598–605.
5. Romanov V.G. O razreshimosti obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravnenii v klasse funktsii, analiticheskikh po chasti peremennykh [On Solvability of the Inverse Problems for Hyperbolic Equations in the Class of Functions Analytic in Part of Variables]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1989, Vol. 304, No. 4, pp. 807–811 (in Russian).
6. Durdiev D.K. Mnogomernaya obratnaya zadacha dlya uravneniya s pamyat'yu [A Multidimensional Inverse Problem for an Equation with Memory]. *Siberian Math. J.*, 1994, Vol. 35, No. 3, pp. 514–521.
7. Durdiev D.K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations [Some Multidimensional Inverse Problems of Memory Determination in Hyperbolic Equations]. *Mat. Fiz., Analiz, Geometr.*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 411–423 (in Russian).

8. Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh. Lokal'naya razreshimost' zadachi opredeleniya prostranstvennoi chasti mnogomernogo yadra v integro-differentsial'nom uravnenii giperbolicheskogo tipa [Local Solvability of the Problem Of Definition of the Spatial Part of the Multidimensional Kernel in an Integro-Differential Equation of Hyperbolic Type]. *Vestnik Samarsk. Gos. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, Vol. 29, No. 4, pp. 37–47 (in Russian).
9. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Zadacha ob opredelenii mnogomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti [The Problem of Determining the Multi-Dimensional Kernel of a Viscoelasticity Equation]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2015, Vol. 17, No. 4, pp. 18–43 (in Russian).
10. Romanov V.G. A problem of recovering a special two dimension potential in a hyperbolic equation. *Eur. J. Math. Comput. Appl.*, 2016, Vol. 4, No. 1, pp. 32–46.
11. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. *Eur. J. Math. Comput. Appl.*, 2019, Vol. 7, No. 2, pp. 4–19.
12. Durdiev U.D., Totieva Z.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, Vol. 42, No. 18, pp. 1–12.
13. Romanov V.G. Inverse problems for equation with a memory. *Eur. J. Math. Comput. Appl.*, 2014, Vol. 2, No. 4, pp. 51–80.
14. Romanov V.G. Dvumernaya obratnaya zadacha dlya uravneniya vyazkouprugosti [A Two-Dimensional Inverse Problem for the Viscoelasticity Equation]. *Siberian Math. J.*, 2012, Vol. 53, No. 6, pp. 1128–1138.
15. Karchevskii A.L., Fat'yanov A.G. Chislennoe reshenie obratnoi zadachi dlya sistemy uprugosti s posledeystviem dlya vertikal'no neodnorodnoi sredy [Numerical Solution of an Inverse Problem for a Delay Elasticity System for a Vertically Inhomogeneous Medium]. *Sib. Zhurn. Vychisl. Matematiki*, 2001, Vol. 4, No. 3, pp. 259–268 (in Russian).
16. Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L., Lorenzi A. Lavrent'ev regularization of solutions to linear integrodifferential inverse problems. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1993, Vol. 1, No. 2, pp. 115–140.
17. Romanov V.G. Ustoichivost' v obratnykh zadachakh [Stability in Inverse Problems]. Moscow: Nauchnyi Mir, 2005 (in Russian).
18. Kurant R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]. N. Y.: Springer-Verl., 1962; Moscow: Mir, 1964.