Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Kan, I. V. Prokhorov, Reconstruction of the Lambert curve in a scattering medium by using pulsed sounding , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 81–92

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.206>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.55.26

April 26, 2023, 14:22:27

УДК 517.958

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛАМБЕРТОВСКОЙ КРИВОЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЗОНДИРОВАНИИ РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

© 2020 В. А. Кан^{1,2a}, И. В. Прохоров^{1b}

¹ *Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия,*
² *Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, г. Владивосток 690050, Россия*

E-mails: ^akan.va@inbox.ru, ^bprokhorov@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.; после доработки 27.01.2020 г.;
принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассмотрена математическая модель, описывающая процесс переноса излучения в рассеивающей среде, инициированный импульсным точечным изотропным источником. Исследована обратная задача, заключающаяся в нахождении диффузно отражающей кривой по двум интегральным условиям переопределения решения уравнения переноса. В рамках приближения однократного рассеяния получено нелинейное дифференциальное уравнение для функции, описывающей форму искомой кривой. Проведён численный анализ устойчивости решения обратной задачи при возмущении исходных данных.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение переноса излучения, импульсное облучение, диффузное отражение, объёмное рассеяние.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.206

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения в неограниченной области с условиями диффузного отражения по закону Ламберта на неизвестной границе области. Требуется найти неизвестную границу при заданном условии переопределения решения начально-краевой задачи. С физической точки зрения такая постановка задачи близка к проблемам мониторинга земной поверхности и морского дна с помощью авиационных радиолокационных станций и гидролокаторов бокового обзора [1–9].

Мы рассмотрим упрощённую двумерную модель локации ламбертовской кривой. Применение такой модели оправдано для узкой в горизонтальной плоскости диаграммы направленности приёмной антенны и при небольшой скорости движения источника излучения в сравнении со скоростью распространения сигнала в среде [9]. В трёхмерном случае задача изучалась в приближении однократного рассеяния и малости отклонения отражающей поверхности от некоторого среднего уровня. При условии, что диаграмма направленности приёмной антенны является узкой в горизонтальной плоскости, получена явная формула для решения обратной задачи [7, 8].

Задачи определения диффузно отражающих поверхностей для стационарных моделей переноса излучения рассматривались в работах [1, 10, 11]. Отметим, что методы исследования стационарных и нестационарных обратных задач существенно отличаются друг от друга.

В [9] исследована двумерная модель локации ламбертовской кривой в нерассеивающей среде. Для определения искомой кривой получено нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее решение в квадратурах. В отличие от более ранних исследований [7, 8] особенностью полученного в [9] результата является отсутствие условий малости на производную функции, описывающей форму отражающей кривой. В продолжение исследования [9] в настоящей работе результаты обобщаются на случай изотропно рассеивающей среды в приближении однократного рассеяния. Для определения искомой кривой получено неоднородное нелинейное дифференциальное уравнение, которое не имеет решения в квадратурах. Проведён анализ устойчивости решения к ошибкам исходных данных с применением численного метода для решения полученного уравнения

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Рассматривается уравнение переноса излучения следующего вида [5–9]:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mu\right) I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной окружности $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c . Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|_{t < 0} = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = 2\sigma_d \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}', \quad (\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \Gamma^-. \quad (3)$$

Здесь

$$I^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} I(\mathbf{y} \pm \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \varepsilon/c),$$

$$\Gamma^\pm = \{(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \gamma \times \Omega_\pm(\mathbf{y}) \times (0, T)\}, \quad \Omega_\pm(\mathbf{y}) = \{\mathbf{k} \in \Omega \mid \text{sgn}(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G . Условие (3) означает, что отражающие свойства дна определяются только диффузным отражением по закону Ламберта с коэффициентом донного рассеяния σ_d .

Задача 1. Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных μ , σ , σ_d , J , γ образует начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G \times \Omega \times (0, T)$. Задачу (1)–(3) будем также называть прямой задачей для уравнения (1).

Задача 1 и другие подобные постановки задач рассматривались в работах [12–17].

Дополним систему соотношений (1)–(3) условиями переопределения

$$\int_{\Omega} S_+(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_+(t), \quad \int_{\Omega} S_-(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_-(t), \quad (4)$$

где $S_+(\mathbf{k}) = 0$ при $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \Omega \mid k_1 > 0\}$ и $S_-(\mathbf{k}) = 0$ при $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \Omega \mid k_1 < 0\}$, точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ совпадает с началом декартовой системы координат. При зондировании дна океана с помощью гидролокатора бокового обзора функции $S_-(\mathbf{k})$ и $S_+(\mathbf{k})$ характеризуют диаграммы направленности приёмных антенн по разным «бортам» носителя антенны [7–9], а функции $P_\pm(t)$ определяют суммарную интенсивность, измеряемую антеннами в различные моменты времени t .

Сформулируем обратную задачу для нестационарного уравнения переноса излучения (1).

Задача 2. Определить кривую γ из соотношений (1)–(4), в которых μ , σ_d , σ , J и функции $P_{\pm}$, $S_{\pm}$ известны.

Приведём ряд условий, которым должны удовлетворять исходные и искомые данные задачи 2. Для применимости приближения однократного рассеяния предполагается соответствующая малость величин σ_d и σ/μ . Функция J описывает точечный импульсный источник звука и имеет вид

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t). \quad (5)$$

Зачастую такое предположение об источнике излучения не только оправдано с физической точки зрения, но и существенно упрощает исследование многих обратных задач математической физики [8].

Область $G \in \mathbb{R}^2$ является звёздной относительно начала координат, и её граница $\gamma = \partial G$ задана параметрическими уравнениями

$$r_1 = -\rho(\varphi) \sin \varphi, \quad r_2 = \rho(\varphi) \cos \varphi. \quad (6)$$

Функция $\rho(\varphi)$ определена и непрерывна на множестве $(\pi/2, 3\pi/2)$, дифференцируема при $\varphi \in (\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2)$, монотонно убывает на интервале $(\pi/2, \pi)$ и монотонно возрастает на промежутке $(\pi, 3\pi/2)$. В точках $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ функция $\rho(\varphi)$ стремится к бесконечности. Таким образом, кривая γ делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на две неограниченные области G и $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$.

При решении подобного рода обратных задач обычно полагают, что известна одна точка искомой кривой [1, 11], например $\rho(\pi) = l$. В задачах акустической локации уравнения (6) характеризуют изменение рельефа морского дна, а соотношение $\rho(\pi) = l$ задаёт высоту, на которой находится приёмопередающая антенна относительно донной поверхности.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Для удобства и сокращения выкладок будем полагать, что функции I , J продолжены нулём для всех $t < 0$. Тогда для решения задачи 1 можно записать следующее уравнение интегрального типа [7–9]:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^{\infty} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau \\ & + 2\sigma_d(\mathbf{y}) \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+\left(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k}' \\ & + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\mu\tau) \int_{\Omega} I\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})\mathbf{k}$; $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$ — расстояние от точки $\mathbf{r} \in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G . Так как решение уравнения переноса продолжено нулём для отрицательных t , то второе слагаемое в (7) отсутствует при всех t , удовлетворяющих условию $ct < d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$. Такая ситуация имеет место при малых t или когда луч, исходящий из точки $\mathbf{r}$ в направлении $-\mathbf{k}$, не пересекает границу области G .

Возьмём в качестве нулевого приближения для решения уравнения (7) функцию

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{\infty} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau \quad (8)$$

и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения задачи 1 получим так называемое приближение однократного рассеяния

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^\infty \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau \\
& + 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}'| \int_0^\infty \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}' \\
& + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-\mu\tau) \int_\Omega \int_0^\infty \exp(-\mu t') J\left(\mathbf{r} - t'\mathbf{k}' - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{t'}{c} - \frac{\tau}{c}\right) dt' d\mathbf{k}' d\tau. \quad (9)
\end{aligned}$$

В представлении (9) сделаем замену переменных $\mathbf{r}' = \mathbf{y} - \tau\mathbf{k}'$, $\mathbf{x} = \mathbf{r} - t'\mathbf{k}'$. Так как справедливы равенства $d\tau d\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{y}|}$, $dt' d\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}$, то из (9) вытекает

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = & \int_0^\infty \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau \\
& + 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})) \int_{G(\mathbf{y})} \left| \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} \right| \exp(-\mu|\mathbf{r}' - \mathbf{y}|) \\
& \quad \times J\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}, t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} \\
& + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-\mu\tau) \int_G \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} J\left(\mathbf{x} - \tau\mathbf{k}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{x} d\tau, \quad (10)
\end{aligned}$$

где $G(\mathbf{y}) = \{\mathbf{r} \in G \mid \alpha\mathbf{r} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in G, 0 < \alpha \leq 1\}$ — часть области G , «видимой» из точки $\mathbf{y}$.

Приближение однократного рассеяния (9) оправдано не только при достаточно малых σ_d и σ , но и в случае слабо меняющейся донной поверхности при $\sigma \ll 1$ и не обязательно малом σ_d . В частности, для плоского дна при $\sigma = 0$ приближение однократного рассеяния является точным решением начально-краевой задачи [13].

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

Так как область G «звёздная» относительно начала координат и функция J представима в виде (5), то из (10) вытекает следующее соотношение для функции I в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ при $ct \geq d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned}
I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}, t) = & 2\sigma_d \exp(-\mu d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})) \int_{G(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}| \exp(-\mu|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|) \\
& \quad \times \delta(\mathbf{r}') \delta\left(t - \frac{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{r}'|} \\
& + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\infty \chi(\tau - d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})) \exp(-\mu\tau) \int_G \frac{\exp(-\mu|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \delta(\mathbf{x} - \tau\mathbf{k}) \delta\left(t - \frac{\tau}{c} - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right) d\mathbf{x} d\tau
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sigma_d}{|\mathbf{y}|} \exp(-\mu(d(\mathbf{0}, -\mathbf{k}) + |\mathbf{y}|)) \left| \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right| \delta\left(t - \frac{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})}{c} - \frac{|\mathbf{y}|}{c}\right) + \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^\infty \chi(\tau - d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})) \frac{\exp(-2\mu\tau)}{\tau} \delta\left(t - \frac{2\tau}{c}\right) d\tau, \quad (11)$$

где χ — характеристическая функция интервала $(0, \infty)$.

Учитывая параметризацию кривой γ вида $\mathbf{y} = -d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})\mathbf{k}$, из (11) получаем

$$I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}, t) = \frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})} \exp(-2\mu d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})) |\mathbf{n}(-d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})}{c}\right) + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \chi\left(\frac{ct}{2} - d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})\right). \quad (12)$$

Подставим выражение (12) для функции I^+ в условие (4):

$$P_\pm(t) = \int_\Omega S_\pm(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \int_\Omega S_\pm(\mathbf{k}) \frac{2\sigma_d}{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})} \exp(-2\mu d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})) |\mathbf{n}(-d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| \delta\left(t - 2\frac{d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})}{c}\right) d\mathbf{k} + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int_\Omega S_\pm(\mathbf{k}) \chi\left(\frac{ct}{2} - d(\mathbf{0}, -\mathbf{k})\right) d\mathbf{k}. \quad (13)$$

Для простоты предположим, что диаграммы направленности имеют вид

$$S_+(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & k_1 < 0, \ k_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad S_-(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & k_1 > 0, \ k_2 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, используя параметризацию кривой (6), заключаем, что $\mathbf{k}(\varphi) = -(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ и $d(\mathbf{0}, -\mathbf{k}) = \rho(\varphi)$. Следовательно,

$$S_+(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in (\pi, 3\pi/2), \\ 0, & \varphi \notin (\pi, 3\pi/2), \end{cases} \quad S_-(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \pi/2, \pi), \\ 0, & \varphi \notin (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Таким образом, из (13) получаем

$$P_\pm(t) = \int_0^{2\pi} S_\pm(\varphi) I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}(\varphi), t) d\varphi = \pm \int_\pi^{\pi \pm \pi/2} I^+(\mathbf{0}, \mathbf{k}(\varphi), t) d\varphi = \pm \int_\pi^{\pi \pm \pi/2} \frac{2\sigma_d}{\rho(\varphi)} \exp(-2\mu\rho(\varphi)) |\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi \pm \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int_\pi^{\pi \pm \pi/2} \chi\left(\frac{ct}{2} - \rho(\varphi)\right) d\varphi. \quad (14)$$

Учитывая выражение для скалярного произведения

$$|\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{k}(\varphi)| = \frac{|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}},$$

из (14) получаем

$$P_{\pm}(t) = \pm 2\sigma_d \int_{\pi}^{\pi \pm \pi/2} \exp(-2\mu\rho(\varphi)) \frac{|\rho'(\varphi)|}{\rho(\varphi)\sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}} \delta\left(t - 2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right) d\varphi \\ \pm \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int_{\pi}^{\pi \pm \pi/2} \chi\left(\frac{ct}{2} - \rho(\varphi)\right) d\varphi. \quad (15)$$

Согласно предположениям п. 2, функция $\rho(\varphi)$ монотонна и дифференцируема на интервалах $(\pi/2, \pi)$ и $(\pi, 3\pi/2)$, следовательно, на интервале $(\pi/2, \pi)$ она имеет обратную функцию φ_- , а на промежутке $(\pi, 3\pi/2)$ — обратную функцию φ_+ . Учитывая сказанное, из (15) при $t > 2l/c$ получаем

$$P_{\pm}(t) = \frac{c\sigma_d \exp(-\mu ct)}{(ct/2)\sqrt{1/\varphi_{\pm}^2(ct/2) + (ct/2)^2}} \pm \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} \int_l^{\infty} \chi(ct/2 - \rho) \varphi'_{\pm}(\rho) d\rho \\ = \frac{c\sigma_d \exp(-\mu ct)}{(ct/2)\sqrt{1/\varphi_{\pm}^2(ct/2) + (ct/2)^2}} \pm \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\exp(-\mu ct)}{t} (\varphi_{\pm}(\infty) - \varphi_{\pm}(ct/2)). \quad (16)$$

Возвращаясь к обозначению $\rho = ct/2$, из соотношения (16) при $\rho \geq l$ получаем

$$P_{\pm}(2\rho/c) = \frac{c\sigma_d \exp(-2\mu\rho)}{\rho\sqrt{1/\varphi_{\pm}^2(\rho) + \rho^2}} \pm \frac{c\sigma}{4\pi} \frac{\exp(-2\mu\rho)}{\rho} (\varphi_{\pm}(\infty) - \varphi_{\pm}(\rho)). \quad (17)$$

Так как по условию задачи $\varphi_{\pm}(l) = \pi$ и $\varphi_{\pm}(\infty) = \pi \pm \pi/2$, то из (17) вытекает

$$\varphi_{\pm}^2(\rho) = \frac{\rho^2 (P_{\pm}(2\rho/c) - Q(\rho, \varphi_{\pm}(\rho)))^2}{\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho) - \rho^4 (P_{\pm}(2\rho/c) - Q(\rho, \varphi_{\pm}(\rho)))^2}, \quad (18)$$

где

$$Q(\rho, \varphi_{\pm}(\rho)) = \pm \frac{\sigma c \exp(-2\mu\rho)}{4\pi\rho} \left(\pi \pm \frac{\pi}{2} - \varphi_{\pm}(\rho) \right), \quad (19)$$

и решения дифференциальных уравнений (18) эквивалентны решениям интегральных уравнений для функций $\varphi_{\pm}$:

$$\varphi_{\pm}(\rho) = \pi \pm \int_l^{\rho} \frac{s(P_{\pm}(2s/c) - Q(s, \varphi_{\pm}(s))) ds}{(\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu s) - s^4 (P_{\pm}(2s/c) - Q(s, \varphi_{\pm}(s)))^2)^{1/2}}. \quad (20)$$

Знаки $\pm$ перед интегралом в выражении (20) выбраны так, чтобы обеспечить монотонное убывание функции $\varphi_-(\rho)$ на интервале $(\pi/2, \pi)$ и монотонное возрастание $\varphi_+(\rho)$ на интервале $(\pi, 3\pi/2)$. Таким образом, ограничения на монотонность функции $\rho(\varphi)$ на интервалах $(\pi/2, \pi)$ и $(\pi, 3\pi/2)$, сформулированные при постановке обратной задачи, устраняют многозначность решений нелинейных уравнений (18).

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

В задачах зондирования донной поверхности обычно оперируют с дискретным множеством измеренных значений функций

$$P_{\pm}(2\rho_i/c), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \varphi_{\pm}(\rho_0) = \pi, \quad \rho_0 = l.$$

Имея такой набор значений, мы можем построить явный пошаговый метод Эйлера для нахождения решения уравнения (20):

$$\varphi_{\pm}(\rho_{i+1}) = \varphi_{\pm}(\rho_i) \pm \Phi(\rho_i, \varphi_{\pm}(\rho_i))(\rho_{i+1} - \rho_i), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (21)$$

где

$$\Phi(\rho, \varphi_{\pm}(\rho)) = \frac{\rho(P_{\pm}(2\rho/c) - Q(\rho, \varphi_{\pm}(\rho)))}{(\sigma_d^2 c^2 \exp(-4\mu\rho) - \rho^4 [P_{\pm}(2\rho/c) - Q(\rho, \varphi_{\pm}(\rho))]^2)^{1/2}}. \quad (22)$$

Для тестирования численного алгоритма решения обратной задачи 2 были получены синтетические данные прямой задачи 1, моделирующие процесс картографирования поверхности, описывающей форму подводного хребта.

В экспериментах предполагалось, что расстояние между источником и донной поверхностью в направлении $\mathbf{k} = (0, -1)$ равно $l = 25$ метрам. Скорость распространения звука в водоёме предполагалась постоянной во всей области зондирования $c = 1500$ м/с, коэффициенты затухания, объёмного и донного рассеяния имели значения $\mu = 0,018$ м⁻¹, $\sigma = 0,1\mu$, $\sigma_d = 0,1$. Облучение поверхности осуществлялось с максимальной дальностью зондирования $\rho_n = 300$ м и с шагом дискретизации $\Delta\rho = \rho_{i+1} - \rho_i = 0,04$ м [4]. Кривая γ , описывающая форму подводного хребта, задавалась параметрическими уравнениями

$$r_1 = -\rho \sin \varphi, \quad r_2 = -2l + l^2/\rho. \quad (23)$$

Для наглядности форма подводного хребта, описываемая соотношениями (23), изображена в виде двумерной поверхности (см. рис. 1). Восстановлению подлежит кривая γ в поперечном сечении $r_3 = \text{const}$.

Рис. 1. Форма подводного хребта

При численном решении обратной задачи мы допускали небольшие вариации коэффициентов объёмного и донного рассеяния σ , σ_d . На практике такая ситуация может быть продиктована неполнотой или неточностью информации об известных характеристиках среды. Цель таких экспериментов — численная проверка устойчивости разработанного алгоритма.

На рис. 2 представлено приближённое решение обратной задачи при варьировании коэффициента объёмного рассеяния $\tilde{\sigma} = \sigma(1 + \epsilon)$ при $\epsilon = 0; 0,03; -0,05$.

Рис. 2. Восстановление кривой γ при возмущении коэффициента объёмного рассеяния $\tilde{\sigma} = \sigma(1 + \epsilon)$: точное решение (—); приближённое решение при $\epsilon = 0$ (---); приближённое решение при $\epsilon = 0,03$ (-·-·-·-); приближённое решение при $\epsilon = -0,05$ (· · · · ·)

На рис. 3 приведено изменение формы подводного хребта при варьировании коэффициента донного рассеяния $\tilde{\sigma}_d = \sigma_d(1 + \epsilon_d)$ при $\epsilon_d = 0,003; -0,005$.

Как видно из рис. 2 и 3, невозмущённое приближённое решение ($\tilde{\sigma} = \sigma, \tilde{\sigma}_d = \sigma_d$) достаточно близко к точному решению, а возмущённое решение на дальности 300 метров отклоняется от точного не более, чем на 7 метров.

Рис. 3. Восстановление кривой γ при возмущении коэффициента донного рассеяния $\tilde{\sigma}_d = \sigma_d(1 + \epsilon_d)$: точное решение (—); возмущённое решение при $\epsilon_d = 0,003$ (---); возмущённое решение при $\epsilon_d = -0,005$ (-·-·-·-)

Заметим, что 5-процентная ошибка в σ приводит к почти такому же отклонению возмущённого решения от невозмущённого, как и ошибка 0,5% в σ_d , т. е. решение обратной задачи более чувствительно к изменениям коэффициента донного рассеяния, нежели к изменениям коэффициента объёмного рассеяния. Отметим интересную особенность в поведении возмущённого решения обратной задачи при одновременном варьировании коэффициентов σ и σ_d . Ошибки одного знака в коэффициентах σ, σ_d увеличивают погрешность между возмущённым и точным решением (см. рис. 4), а ошибки разного знака — уменьшают (см. рис. 5). Такая зависимость возмущённого решения от коэффициентов объёмного и донного рассеяния интересна не только с точки зрения приближённого решения задачи 2, но и при изучении вопросов единственности (или не единственности) решения более общих обратных задач, где определению подлежат не только форма искомой кривой γ , но и коэффициенты σ, σ_d .

Рис. 4. Восстановление кривой γ при возмущении коэффициентов σ и σ_d :
точное решение (—); возмущённое решение при $\epsilon = 0,03$, $\epsilon_d = 0,003$ (---);
возмущённое решение при $\epsilon = -0,05$, $\epsilon_d = -0,005$ (-·-·-)

Рис. 5. Восстановление кривой γ при возмущении коэффициентов σ и σ_d :
точное решение (—); возмущённое решение при $\epsilon = 0,03$, $\epsilon_d = -0,003$ (---);
возмущённое решение при $\epsilon = -0,05$, $\epsilon_d = 0,005$ (-·-·-)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель процесса зондирования точечным импульсным источником излучения в рассеивающей среде и исследована задача определения диффузно отражающей кривой по данным измерений суммарной интенсивности в двух непересекающихся угловых секторах. Используя приближение однократного рассеяния и ограничения типа монотонности на поведение искомой кривой, получено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Проведён численный анализ устойчивости его решения к небольшим изменениям коэффициентов донного и объёмного рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирейтов В. Р. Обратные задачи фотометрии. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1983.
2. Урик Р. Д. Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978.
3. Богородский А. В., Яковлев Г. В., Корепин Е. А., Должиков А. К. Гидроакустическая техника исследования и освоения океана. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
4. Матвиенко Ю. В., Воронин В. А., Тарасов С. П., Скарня А. В., Тутынин Е. В. Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных

- необитаемых подводных аппаратов // Подводные исследования и робототехника. 2009. Т. 8, № 2. С. 4–15.
5. Прохоров И. В., Золотарев В. В., Агафонов И. Б. Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане // Дальневост. мат. журн. 2011. Т. 11, № 1. С. 76–87.
 6. Прохоров И. В., Сущенко А. А. Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения // Акустический журн. 2015. Т. 61, № 3. С. 400–408.
 7. Прохоров И. В., Сущенко А. А., Кан В. А. Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 99–110.
 8. Kan V. A., Prokhorov I. V., Sushchenko A. A. Determining the bottom surface according to data of side-scan sonars // Proc. SPIE. 2016. V. 10035. P. 1003518.
 9. Кан В. А., Прохоров И. В. Определение диффузно отражающей поверхности при импульсном облучении // Дальневост. мат. журн. 2018. Т. 18, № 2. С. 206–215.
 10. Кирейтов В. Р. О задаче определения оптической поверхности по её изображениям // Функци. анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 3. С. 45–54.
 11. Шарафутдинов В. А. О восстановлении ламбертовской оптической кривой по двум её изображениям // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 3. С. 565–568.
 12. Прохоров И. В., Сущенко А. А., Ким А. Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 75–85.
 13. Прохоров И. В., Сущенко А. А. Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде // Дальневост. мат. журн. 2018. Т. 18, № 1. С. 101–111.
 14. Amosov A. A. Initial-boundary value problem for the nonstationary radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions // J. Math. Sci. 2018. V. 231, N 3. P. 279–337.
 15. Amosov A. A. Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8115–8135.
 16. Прохоров И. В. Задача Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими и ламбертовскими условиями сопряжения // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 1. С. 95–107.
 17. Kim A., Prokhorov I. V. Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions // Siberian Electronic Math. Reports. 2019. V. 16. P. 1036–1056.
 18. Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Science Press, 1987.

UDC 517.958

RECONSTRUCTION OF THE LAMBERT CURVE IN A SCATTERING MEDIUM BY USING PULSED SOUNDING© 2020 V. A. Kan^{1,2a}, I. V. Prokhorov^{1b}¹*Institute for Applied Mathematics FEB RAS,
ul. Radio, Vladivostok 690041, Russia,*²*Far-Eastern Federal University,
ul. Sukhanova, Vladivostok 690950, Russia*E-mails: ^akan.va@inbox.ru, ^bprokhorov@iam.dvo.ru

Received 27.01.2020, revised 27.01.2020, accepted 09.04.2020

Abstract. Under study is some mathematical model of the radiation transfer process in a scattering medium initiated by a pulsed point isotropic source. We inspect inverse problem of finding a diffusely reflecting curve by using the two integral overdetermination conditions on the solution of the radiative transfer equation. Some nonlinear differential equation is obtained for the function that describes the shape of the desired curve in the case of the single scattering approximation. Numerical analysis of the inverse problem solution is carried out to check the stability under perturbations of the initial data.

Keywords: inverse problem, radiation transfer equation, pulsed irradiation, diffuse reflection, volume scattering.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.206

REFERENCES

1. Kireitov V.R. Obratnye zadachi fotometrii [Inverse Problems of Photometry]. Novosibirsk: Vychsl. Tsentr SO AN SSSR, 1983 (in Russian).
2. Urik R.D. Osnovy gidroakustiki [Hydroacoustics Principles]. Leningrad: Sudostroenie, 1978 (in Russian).
3. Bogorodskii A.V., Yakovlev G.V., Korepin E.A., Dolzhikov A.K. Gidroakusticheskaya tekhnika issledovaniya i osvoeniya okeana [Hydroacoustic Technology for Studying and Developing of Ocean]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1984 (in Russian).
4. Matvienko Yu.V., Voronin V.A., Tarasov S.P., Sknarya A.V., Tutynin E.V. Puti sovershenstvovaniya gidroakusticheskikh tekhnologii obsledovaniya morskogo dna s ispol'zovaniem avtonomnykh neobitaemykh podvodnykh apparatov [The Course of Development of Hydroacoustic Technologies for Investigation of Deep-Sea Floor by Using Autonomous Uninhabited Submarines]. *Podvodnye Issledovaniya i Robototekhnika*, 2009, Vol. 8, No. 2, pp. 4–15 (in Russian).
5. Prokhorov I.V., Zolotarev V.V., Agafonov I.B. Zadacha akusticheskogo zondirovaniya vo fluktuiruyushchem okeane [Problem of Acoustic Sounding in Fluctuating Ocean]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.*, 2011, Vol. 11, No. 1, pp. 76–87 (in Russian).
6. Prokhorov I.V., Sushchenko A.A. Studying the problem of acoustic sounding of the seabed using methods of radiative transfer theory. *Acoust. Phys.*, 2015, Vol. 61, No. 3, pp. 368–375.
7. Prokhorov I.V., Sushchenko A.A., Kan V.A. On the problem of reconstructing the floor topography of a fluctuating ocean. *J. Appl. Indust. Math.*, 2015. Vol. 9, No. 3, pp. 412–422.

8. Kan V.A., Prokhorov I.V., Sushchenko A.A. Determining the bottom surface according to data of side-scan sonars. *Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering*, 2016. Vol. 10035, p. 1003518.
9. Kan V.A., Prokhorov I.V. Opredelenie diffuzno otrazhayushchei poverkhnosti pri impul'snom obluchenii [Detecting a Diffusely Reflecting Surface Under Pulsed Irradiation]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.*, 2018, Vol. 18, No. 2, pp. 206–215 (in Russian).
10. Kireitov V.R. O zadache opredeleniya opticheskoi poverkhnosti po ee izobrazheniyam [On a Problem of Detecting an Optical Surface by Using its Images]. *Funkts. Analiz i Ego Prilozheniya*, 1976, Vol. 10, No. 3, pp. 45–54 (in Russian).
11. Sharafutdinov V.A. O vosstanovlenii lambertovskoi opticheskoi krivoi po dvum ee izobrazheniyam [On Reconstruction of a Lambertian Optical Curve by its Two Images]. *Doklady Akad. Nauk*, 1979, Vol. 249, No. 3, pp. 565–568 (in Russian).
12. Prokhorov I.V., Sushchenko A.A., Kim A. Initial boundary value problem for the radiative transfer equation with diffusion matching conditions. *J. Appl. Indust. Math.*, 2017, Vol. 11, No. 1, pp. 115–124.
13. Prokhorov I.V., Sushchenko A.A. Zadacha Koshi dlya uravneniya perenosa izlucheniya v neogranichennoi srede [Cauchy Problem for the Radiative Transfer Equation in an Unbounded Medium]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.*, 2018, Vol. 18, No. 1, pp. 101–111 (in Russian).
14. Amosov A.A. Initial-boundary value problem for the nonstationary radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions. *J. Math. Sci.*, 2018, Vol. 231, No. 3, pp. 279–337.
15. Amosov A.A. Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, Vol. 41, No. 17, pp. 8115–8135.
16. Prokhorov I.V. The Cauchy problem for the radiation transfer equation with fresnel and lambert matching conditions. *Math. Notes*, 2019, Vol. 105, No. 1, pp. 80–90.
17. Kim A., Prokhorov I.V. Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions. *Siberian Electronic Math. Reports*, 2019, Vol. 16, pp. 1036–1056.
18. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Science Press, 1987.