Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Norkin, The movement of a rectangular cylinder in a liquid at short times after impact with formation of a cavity , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 106–118

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.208>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.205.19.152

April 26, 2023, 13:29:13

УДК 519.634

ДВИЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА НА МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ С ОБРАЗОВАНИЕМ КАВЕРНЫ

© 2020 М. В. Норкин

*Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*

E-mail: norkinmi@mail.ru

Поступила в редакцию 19.08.2019 г.; после доработки 29.01.2020 г.;
принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматривается динамическая смешанная задача об отрывном ударе и последующем движении с постоянной скоростью прямоугольного цилиндра в идеальной несжимаемой тяжёлой жидкости. Особенностью этой задачи является то, что после удара образуется присоединённая каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Исследование задачи проводится на малых временах с учётом динамики точек отрыва внутренней свободной границы жидкости. Положение точек отрыва в каждый момент времени определяется из условия Кутта — Жуковского. Изучается влияние физических и геометрических параметров задачи на формы свободных границ жидкости при малых временах. Проводится асимптотический анализ внутренней свободной границы жидкости вблизи точек отрыва.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольник, удар, свободная граница, каверна, малые времена, число Фруда, число кавитации.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.208

ВВЕДЕНИЕ

При ударе твёрдого тела, полностью погружённого в жидкость, необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от твёрдой поверхности [1]. В момент удара положение системы не успевает измениться и образующаяся на поверхности тела зона отрыва характеризуется тем, что импульсивное давление в ней равняется нулю. В следующие после удара моменты времени внутренняя свободная граница отходит от поверхности тела и образуется присоединённая каверна. В естественных условиях в каверне возникают пары жидкости или газа с давлениями, близкими к нулю. Давление в каверне можно создавать искусственным путём, считая, например, что сразу после удара со стороны тела в сторону жидкости выделяется газ постоянного давления. Так как в общем случае давления на внешней и внутренней свободных границах различны, возникает число кавитации (безразмерная разность давлений), которое является важной характеристикой каверны. Классическая задача удара даёт начальные условия для решения соответствующей динамической кавитационной задачи. Если сформулированы условия, определяющие закон движения тела после удара, то можно поставить вопрос об асимптотике решения данной задачи на малых временах. Динамические задачи об ударе с отрывом исследовались ранее только для случая кругового цилиндра [2–4]. Решения этих задач строились таким образом, чтобы выполнялись важные физические условия — условие Кутта — Жуковского (условие регулярности решения задачи в точках отрыва) и условие положительности давления на смоченной поверхности тела. При этом важную роль играет

динамика точек отрыва внутренней свободной границы жидкости. Положение точек отрыва в каждый момент времени определялось из условия Кутта — Жуковского. Что касается давления, то оно проверялось уже после решения задачи и при этом не всегда оказывалось положительным. Появление отрицательных давлений на смоченной поверхности тела означает, что наряду с основной кавитационной зоной, вызванной ударом, возникают дополнительные кавитационные зоны, обусловленные процессами происходящими уже после удара — законом движения тела и физическими параметрами задачи (числами Фруда и кавитации). Возникновение одной или нескольких кавитационных зон зависит от конкретной физической ситуации. В задаче для прямоугольника определённые трудности создают угловые точки. В небольших окрестностях этих точек возникают отрицательные давления, а в самих точках нарушается условие Кутта — Жуковского. Однако, ввиду малости зон отрицательных давлений, исследование задачи можно провести без учёта кавитации в угловых точках. Другими словами, на малых временах проблему угловых точек можно отделить от основной проблемы кавитационного отрыва, вызванного ударом.

Среди близких работ в первую очередь отметим статью [5], в которой найдено точное решение задачи о вертикальном отрывном ударе горизонтальной пластинки, расположенной под свободной поверхностью жидкости (предельный случай прямоугольника). Задача исследовалась в классической постановке, динамика отрыва после удара не рассматривалась. Линейные задачи для прямоугольного цилиндра без учёта отрыва частиц жидкости от его поверхности исследовались ранее в различных постановках [6–7]. В [6] приведён обзор работ по определению присоединённых масс прямоугольного пантона, плавающего на поверхности жидкости. В [7], в рамках линейной теории потенциального движения идеальной жидкости, рассматривалась нестационарная задача о плавающем теле прямоугольной формы в слое жидкости конечной глубины.

Метод, предложенный в работах [2–4] для кругового цилиндра, обобщается в настоящей статье на случай цилиндра прямоугольного поперечного сечения (в дальнейшем прямоугольника). Центральным моментом работы является определение положения точек отрыва внутренней свободной границы жидкости на основании условия Кутта — Жуковского. При этом ход решения задачи для прямоугольника во многом отличается от того, что было сделано для круга. Это выражается в использовании декартовых, а не полярных координат, в замене переменных, фиксирующих точки отрыва, построении погранслойных решений в этих точках, форме уравнения внутренней свободной границы жидкости и в различных других вопросах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская задача о вертикальном отрывном ударе прямоугольника, полностью погружённого в идеальную несжимаемую тяжёлую жидкость. Предполагается, что после удара прямоугольник движется вертикально вниз (в направлении вектора силы тяжести) с постоянной скоростью, без вращения. Позади тела образуется присоединённая каверна, форма которой зависит от физических и геометрических параметров задачи. В силу симметрии картины течения жидкости относительно оси y будем рассматривать задачу в области $x > 0$. Согласно классической теории удара течение жидкости в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), будет потенциальным, а в силу теоремы Лагранжа оно будет потенциальным и во все последующие моменты времени [8]. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с прямоугольником, имеет следующий вид:

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -n_y, \quad R \in S_{11}(t), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -1, \quad y = \varepsilon, \quad c(t) < x < 1, \quad y = -\varepsilon, \quad 0 < x < 1, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0, \quad x = 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\nabla \Phi)^2/2 + \text{Fr}^{-2}(y - t - H) - \chi/2 &= 0, \quad R \in S_{12}(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + 1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\nabla \Phi)^2/2 + \text{Fr}^{-2} \xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b + t, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = H_R, \quad x = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.7)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(x, 0) = 0. \quad (1.8)$$

Задача (1.1)–(1.8) содержит следующие безразмерные параметры:

$$\text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a},$$

где Fr — число Фруда; χ — число кавитации (безразмерная разность давлений); p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; ε — отношение сторон прямоугольника.

На внешней и внутренней свободных границах ставятся динамические и кинематические условия (1.3)–(1.6). Предполагается, что на внешней свободной границе $S_2(t)$ действует атмосферное давление p_a , а на внутренней свободной границе $S_{12}(t)$ давление $p = p_c$, где p_c — давление насыщенных паров жидкости или газа либо давление газа в каверне при искусственной кавитации.

Кинематические условия на $S_{12}(t)$ и $S_2(t)$ записываются в декартовых координатах. Уравнения внутренней и внешней свободных границ относительно подвижной системы координат имеют вид $y = \varepsilon + \eta(x, t)$, $y = H + \xi(x, t) + t$.

Кинематические уравнения (1.4), (1.6) получаются путём дифференцирования этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, находящейся на внутренней или внешней свободной границе. Соответствующие динамические условия (1.3), (1.5) формулируются на основании интеграла Коши — Лагранжа, записанного в подвижной системе координат. В случае ограниченной области произвольная функция времени обычным способом включается в потенциал. Для неограниченной жидкости эта величина может быть найдена путём определения интеграла Коши — Лагранжа в точке, находящейся на внешней свободной границе жидкости и уходящей вдоль неё на бесконечность.

Более подробная запись условия непротекания на сторонах прямоугольника приводится после формулы (1.2).

В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутта — Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

Течение жидкости в начальный момент времени (в момент, непосредственно следующий после удара) имеет потенциал $\Phi_0(x, y)$, который определяется на основе решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела [1]:

$$\Delta \Phi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_2(0), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = -n_y, \quad \Phi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \geq -n_y, \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = H_R, \quad x = 0, \quad y \in (-H_b, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, H). \quad (1.11)$$

Задача (1.9)–(1.11) является классической моделью удара с отрывом. Её отличительная черта состоит в том, что зона отрыва $S_{12}(0)$ (равно как и область контакта тела с жидкостью) заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости сразу после удара, т. е. вместе с потенциалом скоростей Φ_0 . Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Теорема существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в [9]. На сегодняшний день хорошо разработаны численные методы решения таких задач (метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, метод вариационных неравенств, специальные итерационные и вариационные методы). Что касается аналитических решений, то в плоских задачах они в основном сводятся к случаям кругового и эллиптического цилиндров, плавающих на поверхности жидкости, а также к различным вариантам удара пластинок. В отличие от плоских задач пространственные задачи об ударе с отрывом остаются принципиально трудными с точки зрения аналитических решений и мало изученными численно.

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t' = \frac{a}{v_0} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0 \Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p, \quad v_0 = -V_y,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: $X = x$, $Y = y + h(t)$.

Картина течения жидкости при $x > 0$, отвечающая постановке задачи (1.1)–(1.8), изображена на рис. 1.

Рис. 1. Течение жидкости при $x > 0$
(полная картина симметрична относительно оси y)

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ — область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ — часть поверхности тела, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — оторвавшаяся от прямоугольника внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — свободная поверхность жидкости, которая первоначально была горизонтальной; $\bar{V} = (0, V_y)$ — скорость, приобретённая цилиндром в результате удара; $\dot{h}(t)$ — проекция безразмерной скорости движения цилиндра после удара на ось y ($h(t) = -t$); $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости; $2a, 2b$ — длины горизонтальной и вертикальной

сторон прямоугольника; $Y = -H_b$, $X = H_R$ — дно и правая стенка бассейна; $Y = H$ — глубина погружения цилиндра в начальный момент времени; R — радиус-вектор с координатами (x, y) .

После нахождения потенциала скоростей Φ давление в жидкости определяется на основании интеграла Коши — Лагранжа:

$$p = p_0 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\nabla \Phi)^2 / 2 + \text{Fr}^{-2}(y - t - H) \right],$$

где p_0 — безразмерное атмосферное давление.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ

Для построения решения поставленной задачи на малых временах с учётом динамики точек отрыва внутренней свободной границы жидкости необходимо сделать такую замену переменных, при которой точки отрыва, зависящие от времени, перешли бы в фиксированные точки, соответствующие начальному моменту времени. В случае прямоугольника такую замену удобно сделать с помощью степенной функции, показатель которой зависит от времени:

$$\hat{x} = x^{\alpha(t)}, \quad \alpha(t) = \frac{\ln c_0}{\ln c(t)}, \quad \hat{y} = y, \quad (2.1)$$

где $x = c(t)$, $y = \varepsilon$ — координаты точки отрыва в момент времени t , $c(0) = c_0$.

При замене (2.1) точки на верхней стороне прямоугольника (при $y = \varepsilon$) с координатами $x = 0$, $x = c(t)$, $x = 1$ переходят соответственно в точки $\hat{x} = 0$, $\hat{x} = c_0$, $\hat{x} = 1$. Таким образом, размеры прямоугольника не меняются. В дальнейшем предполагается, что функция $c(t)$ монотонно убывает (точки отрыва сближаются). Отметим, что другой случай возможен только при очень большом давлении в каверне.

В новых переменных уравнение Лапласа, а также граничные условия (1.2)–(1.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-2} - 1 \right] - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-3} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}^2} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} &= -1, \quad \hat{y} = \varepsilon, \quad c_0 < \hat{x} < 1, \quad \hat{y} = -\varepsilon, \quad 0 < \hat{x} < 1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} &= 0, \quad \hat{x} = 1, \quad -\varepsilon < \hat{y} < \varepsilon, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] &+ \text{Fr}^{-2}(\hat{y} - t - H) - \chi/2 = 0, \quad R \in S_{12}(t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} + 1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-2} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] &+ \text{Fr}^{-2} \mu(\hat{x}, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{y}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-2} \frac{\partial \mu}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial \mu}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^{-1} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(\hat{x}, \hat{y}, t) &= \Phi(x(\hat{x}, t), \hat{y}, t), \quad \zeta(\hat{x}, t) = \eta(x(\hat{x}, t), t), \\ \mu(\hat{x}, t) &= \xi(x(\hat{x}, t), t), \quad x(\hat{x}, t) = \hat{x}^\gamma, \gamma = [\alpha(t)]^{-1}.\end{aligned}$$

Граничные условия на дне и боковой стенке сохраняют свой вид, однако теперь стенка описывается уравнением $\hat{x} = (H_R)^{\alpha(t)}$.

Решение преобразованной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений при $t \rightarrow 0$:

$$\varphi(\hat{x}, \hat{y}, t) = \varphi_0(\hat{x}, \hat{y}) + t\varphi_1(\hat{x}, \hat{y}) + o(t), \quad (2.3)$$

$$\mu(\hat{x}, t) = t\mu_0(\hat{x}) + t^2\mu_1(\hat{x}) + o(t^2), \quad (2.4)$$

$$\zeta(\hat{x}, t) = t\zeta_0(\hat{x}) + t^2\zeta_1(\hat{x}) + o(t^2), \quad (2.5)$$

$$c(t) = c_0 + c_1t + o(t). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3)–(2.6) в последнюю задачу, осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущённых участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущённые уровни и учитывая асимптотическое разложение $x(\hat{x}, t) = \hat{x} + c\hat{x} \ln \hat{x}t + \dots$, $c = c_1/(c_0 \ln c_0)$, придём для определения функций φ_0 и φ_1 к смешанным краевым задачам в области $\Omega(0)$ для уравнений Лапласа и Пуассона:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad \Delta\varphi_1 = 2c(\ln \hat{x} + 1)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \hat{x}^2} + \frac{c}{\hat{x}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial \hat{x}}.$$

Последнее уравнение сводится к уравнению Лапласа при помощи подстановки

$$\varphi_1 = c\hat{x} \ln \hat{x} \frac{\partial\varphi_0}{\partial \hat{x}} + u, \quad (2.7)$$

где функция u определяется решением следующей задачи:

$$\Delta u = 0, \quad R \in \Omega(0), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{y}} = 0, \quad \hat{y} = \varepsilon, c_0 < \hat{x} < 1, \quad \hat{y} = -\varepsilon, 0 < \hat{x} < 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \hat{x} = 1, -\varepsilon < \hat{y} < \varepsilon, \quad (2.9)$$

$$u + \frac{\partial\varphi_0}{\partial \hat{y}} + (\nabla\varphi_0)^2/2 + \text{Fr}^{-2}(\hat{y} - H) - \chi/2 = 0, \quad \hat{y} = \varepsilon, \quad 0 < \hat{x} < c_0, \quad (2.10)$$

$$u + \frac{\partial\varphi_0}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial \hat{y}}\right)^2 = 0, \quad \hat{y} = H, \quad 0 < \hat{x} < H_R, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \hat{x} = 0, \hat{y} \in (-H_b, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, H), \quad \hat{x} = H_R, \quad -\varepsilon < \hat{y} < \varepsilon, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \hat{x}^2}, \quad \hat{y} = -H_b.$$

Стоит отметить, что задача (2.8)–(2.12) от величины c (а следовательно, и c_1) не зависит.

Задача, возникающая для функции φ_0 , совпадает с решением классической задачи об ударе с отрывом (1.9)–(1.11). Это объясняется тем, что соответствующие краевые условия типа равенств совпадают, а точка раздела краевых условий для функции φ_0 совпадает с точкой отрыва при ударе. В силу теоремы единственности решения задачи об ударе с отрывом функция φ_0 является её решением. Важным свойством решения задачи об ударе с отрывом,

отличающим её от обычной смешанной задачи теории потенциала, является регулярность её решения в точке отрыва. В частности, отсюда следует, что при $\hat{y} = \varepsilon$ и $\hat{x} \rightarrow c_0 + 0$ функция $\varphi_0 \sim \text{const}(\hat{x} - c_0)^{3/2}$. Далее это используется для построения регулярного решения задачи на малых временах. В общем случае для произвольной постоянной c_1 первые производные функции φ_1 имеют в точке (c_0, ε) корневую особенность. Поэтому нужно подобрать постоянную c_1 таким образом, чтобы функция φ_1 вела себя в окрестности точки отрыва так же, как и функция φ_0 . Другими словами, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\hat{x} \rightarrow c_0 + 0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{x}} \sqrt{\hat{x} - c_0} = 0.$$

Теперь, дифференцируя формулу (2.7) по переменной $\hat{x}$, на основании последнего равенства и условия регулярности функции φ_0 в точке отрыва найдём выражение для постоянной c_1 :

$$c_1 = -\frac{a_2}{a_1}, \quad a_1 = \lim_{\hat{x} \rightarrow c_0 + 0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \hat{x}^2} \sqrt{\hat{x} - c_0}, \quad a_2 = \lim_{\hat{x} \rightarrow c_0 + 0} \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} \sqrt{\hat{x} - c_0}.$$

Заметим, что для справедливости проведённых рассуждений важна гладкость граничной функции в условии (2.10) при $\hat{y} = \varepsilon$, $\hat{x} = c_0$. На основании формул (2.7) и (2.10) можно убедиться в том, что функции u , φ_1 и их первые производные по переменной $\hat{x}$ непрерывны при $\hat{y} = \varepsilon$, $0 \leq \hat{x} \leq c_0$ (в крайних точках их можно доопределить по непрерывности).

После решения задачи (2.8)–(2.12) и определения постоянной c_1 коэффициенты асимптотических разложений (2.4), (2.5) находятся по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_0(\hat{x}) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \varepsilon) + 1, \quad \zeta_1(\hat{x}) = f(\hat{x}, \varepsilon), \quad \mu_0(\hat{x}) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, H), \quad \mu_1(\hat{x}) = f(\hat{x}, H), \\ f(\hat{x}, \hat{y}) &= c\hat{x} \ln \hat{x} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \hat{y}}. \end{aligned}$$

3. ПОГРАНСЛОЙНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТОЧКЕ ОТРЫВА

Анализ функции $\zeta(\hat{x}, t)$ вблизи точки отрыва показывает, что первое слагаемое в разложении (2.5) ведёт себя как $t(c_0 - \hat{x})^{1/2}$, а второе слагаемое как $t^2(c_0 - \hat{x})^{-1/2}$. Таким образом, вблизи рассматриваемой точки разложение (2.5) неприменимо. В этом случае нужно построить внутреннее решение, справедливое в окрестности данной точки, и согласовать его с внешним разложением (2.5). Так как функции φ_0 и φ_1 регулярны в точке отрыва (первая функция в силу свойств задачи с односторонними ограничениями, а вторая в силу выбора постоянной c_1), то разложение (2.3) можно сразу подставить в преобразованное кинематическое уравнение внутренней свободной границы (2.2) и, таким образом, получить уравнение для определения только одной неизвестной функции $\zeta(\hat{x}, t)$.

Внутреннее представление свободной границы будем искать в виде

$$\zeta(\hat{x}, t) = \beta t^{3/2} F(\tau) + o(t^{3/2}), \quad t \rightarrow 0, \quad \tau = (c_0 - \hat{x})/t, \quad (3.1)$$

где $F(\tau)$ есть новая неизвестная функция, а β является коэффициентом в разложении функции $\zeta_0(\hat{x})$ в окрестности рассматриваемой точки $\zeta_0(\hat{x}) \sim \beta \sqrt{c_0 - \hat{x}}$, $\hat{x} \rightarrow c_0 - 0$.

Отметим, что при таком определении внутренней переменной первые два члена внешнего разложения (2.5) будут иметь одинаковый порядок малости по τ . Таким образом, погранслоное решение сразу настраивается на условие сращивания с внешним разложением. Далее, проводя необходимые замены в уравнении (2.2) и ограничиваясь только главными по t членами (порядка $t^{1/2}$), получим для определения функции $F(\tau)$ обыкновенное дифференциальное

уравнение первого порядка с нулевым условием при $\tau = 0$ и условием срачивания с внешним решением на бесконечности:

$$(\tau - c_1)F'(\tau) - 3F(\tau)/2 = -\sqrt{\tau}, \quad F(0) = 0, \quad F(\tau) \sim \sqrt{\tau} - c_1/(4\sqrt{\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющее условию срачивания, имеет вид

$$F(\tau) = \frac{2}{3c_1} [\tau^{3/2} - (\tau - c_1)^{3/2}]. \quad (3.2)$$

Другое решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $F(0) = 0$, находится по формуле $\frac{2}{3c_1}\tau^{3/2}$. Так как $c_1 < 0$ (точки отрыва сближаются), а коэффициент $\beta > 0$ (это условие проверяется численно), то данное решение оказывается внутри прямоугольника и, следовательно, не имеет смысла. Таким образом, не удаётся построить погранслоное решение в форме (3.1), удовлетворяющее однородному условию при $\tau = 0$. Теперь откажемся от условия срачивания (что даст произвол в выборе погранслоной переменной) и построим непрерывное решение уравнения (2.2) в окрестности точки отрыва другим способом. Искомое погранслоное решение будем искать в виде

$$\zeta(\hat{x}, t) = \beta t^\alpha F(\tau) + o(t^\alpha), \quad t \rightarrow 0, \quad \tau = (c - \hat{x})/t^\lambda,$$

где α, λ — положительные постоянные.

Левая часть уравнения (2.2) после замены функции φ её асимптотическим разложением (2.3) в главном приближении по времени примет вид $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \hat{y}} + 1 \sim \beta \sqrt{c_0 - \hat{x}} = \beta \sqrt{\tau} t^{\lambda/2}$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.2) (представляющее собой нелинейный член) во всех рассматриваемых случаях является величиной более высокого порядка малости по t , чем остальные слагаемые. Следующие два члена имеют по t порядки $t^{\alpha-1}$ и $t^{\alpha-\lambda}$. Таким образом, нужно сравнить три показателя степени: $\lambda/2$, $\alpha - 1$, $\alpha - \lambda$. Если все эти величины совпадают, то мы приходим к случаю (3.1), рассмотренному выше ($\lambda = 1$, $\alpha = 3/2$). Теперь проведём анализ других возможных ситуаций: $\lambda/2 = \alpha - \lambda$ или $\lambda/2 = \alpha - 1$. Чтобы в каждом из этих случаев оставшийся член имел более высокий порядок малости по t , должны выполняться неравенства: $\lambda > 1$ или $0 < \lambda < 1$. В первом случае получается задача Коши $c_1 F'(\tau) = \sqrt{\tau}$, $F(0) = 0$ с решением, уходящим внутрь прямоугольника. Во втором случае приходим к задаче Коши:

$$\lambda F'(\tau) - \alpha \tau^{-1} F(\tau) = -\tau^{-1/2}, \quad F(0) = 0$$

с решением вида $F(\tau) = \sqrt{\tau}$.

После перехода к переменной $\hat{x}$ получим следующее выражение для возмущения внутренней свободной границы жидкости в окрестности точки отрыва:

$$\zeta(\hat{x}, t) = \beta t \sqrt{c_0 - \hat{x}}. \quad (3.3)$$

Существенно отметить, что полученное в главном приближении решение от параметра λ не зависит. Теперь найдём асимптотику по t погранслоного решения (3.2), удовлетворяющего условию срачивания:

$$\zeta(\hat{x}, t) = \beta t \sqrt{c_0 - \hat{x}} \left[1 - \frac{c_1}{4} \frac{t}{c_0 - \hat{x}} + \dots \right]. \quad (3.4)$$

Видно, что главный член этого разложения совпадает с (3.3). На рис. 2 показано согласование погранслоных решений и внешнего разложения в разные моменты времени. Как показывают численные расчёты ($Fr = 5$; $\varepsilon = 0,5$; $H = 0,7$; $H_b = 3$; $H_R = 4$; $c_1 \approx -0,2$; $\beta \approx 4,69$), при достаточно малых t оба погранслоных решения перекрываются во внутреннем диапазоне и дают исчерпывающее решение проблемы в окрестности точки отрыва (рис. 2, а при $t = 0,06$).

При умеренных t перекрытие происходит за пределами рассматриваемой области и нужен короткий мостик для соединения этих решений (рис. 2, б при $t = 0,1$). Это можно легко сделать графически или с помощью интерполяции. Важно отметить, что погранслоиные решения дают очень хорошее согласование с внешним разложением в широком диапазоне изменения t . Погранслоиное решение, удовлетворяющее условию срачивания, описывает поворот сводной границы, после которого функция $\zeta(\hat{x}, t)$ мало отличается от постоянной величины. Другое погранслоиное решение практически полностью совпадает с внешним разложением в маленькой окрестности точки отрыва. Это подтверждает предположение о том, что корневая особенность во втором члене формулы (2.5) проявляет себя только в очень маленькой окрестности точки отрыва. Таким образом, форму каверны на малых временах можно правильно описать на основании только одного внешнего разложения. Роль погранслоиных решений заключается главным образом в том, что они представляют собой простые аналитические решения, подтверждающие справедливость проведённых численных расчётов.

Рис. 2. Согласование погранслоиных решений и внешнего разложения: при $t = 0,06$ (а) и при $t = 0,1$ (б)

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вначале рассмотрим классическую задачу об ударе с отрывом (1.9)–(1.11), представляющую самостоятельный интерес. Для её решения применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняется неизвестная заранее зона отрыва частиц жидкости. Исходная нелинейная задача (с неизвестной зоной отрыва) сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированным разбиением верхней границы прямоугольника на области задания краевых условий типа Дирихле — Неймана. Указанные линейные задачи решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++ [10]. Подробное изложение этого подхода приводится в работах, посвящённых начальному этапу движения твёрдых тел в жидкости с учётом явления кавитации [2–4]. Численные результаты, полученные указанным методом, сравниваются с результатами статьи [5], в которой найдено аналитическое решение задачи об отрывном ударе пластинки, расположенной в слое жидкости конечной глубины (предельный случай удара прямоугольника при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $H_R \rightarrow \infty$). В [5] приведён график зависимости границы области контакта от относительной толщины слоя. Из этого графика видно, что при удалении свободной границы и дна на большие расстояния безразмерная граница области контакта (величина c_0) приближается к числу, которое немного меньше, чем 0,62. Численное значение точки отрыва c_0 , полученное при $\varepsilon = 0,05$, $H = H_b = H_R = 100$, приближённо равно 0,61. Также подтверждается вывод о том, что при уменьшении толщины слоя зона контакта на верхней стороне пластинки уменьшается и в предельном случае бесконечно малого слоя исчезает ($c_0 \rightarrow 1$).

Теперь рассмотрим динамику отрыва после удара. Исследование задачи проводится при следующих фиксированных значениях параметров: $\chi = 0$ (давление в каверне равно атмосферному); $\varepsilon = 0,5$; $H = 0,7$; $H_b = 3$; $H_R = 4$ ($c_0 \approx 0,972$). При этом рассматриваются случаи, соответствующие различным числам Фруда и различным моментам времени (см. рис. 3). Формы внутренних свободных границ жидкости при $Fr = 5$ изображены на рис. 3, а. Показанные кривые соответствуют моментам времени $t = 0,06; 0,1; 0,14; 0,18; 0,22$. Аналогичная картина при $Fr = 0,5$ изображена на рис. 3, б. На этих рисунках хорошо видны динамика точек отрыва и формы каверн на малых временах.

Рис. 3. Форма внутренней свободной границы жидкости при $Fr = 5$ (а) и $Fr = 0,5$ (б) в моменты времени $t = 0,06; 0,1; 0,14; 0,18; 0,22$

Численные значения скорости движения точки отрыва c_1 в зависимости от числа Фруда приведены в таблице:

Fr	5	3	1	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05
c_1	-0,198	-0,202	-0,250	-0,281	-0,412	-1,549	-5,608	-21,84

В таблице, как и в задаче для круга [2–4], при уменьшении числа Фруда начальная скорость движения точки отрыва сильно возрастает. Общая картина течения жидкости в момент времени $t = 0,18$ ($Fr = 5$) показана на рис. 1. На основании проведённых исследований можно сделать вывод о том, что для прямоугольника диапазон изменения физических параметров задачи, для которых эффективен асимптотический анализ на малых временах, гораздо шире, чем для круга. Так, в случае круга, ввиду большой скорости движения точек отрыва, не удаётся изобразить внутреннюю свободную границу на малых временах при числах Фруда, меньших 0,5. Для прямоугольника такие порядки скоростей движения точек отрыва достигаются при $Fr < 0,1$. Кроме этого, в случае кругового цилиндра не всегда получается изобразить внутреннюю свободную границу в естественной ситуации, когда давление в каверне равно нулю. Это объясняется сложным поведением внутренней свободной границы вблизи точки отрыва. Для прямоугольника это можно сделать без малейших осложнений. Численные расчёты, проведённые для случая $\chi = 1$, $Fr = 5$, который допускает естественную трактовку, показывают, что полученные для внутренних свободных границ кривые очень похожи на кривые, изображённые на рис. 3, а. Отличие состоит в том, что в естественной ситуации свободные границы меньше возмущены, а точки отрыва движутся немного быстрее.

Можно считать, что рассмотренные примеры соответствуют следующей конкретной физической ситуации: $a = 1$ м; $v_0 = 15,65$ м/с ($Fr = 5$, $\chi = 0$; см. рис. 1 и 3, а) и $a = 1$ м; $v_0 = 1,57$ м/с ($Fr = 0,5$, $\chi = 0$; см. рис. 3, б). При этом характерный размер прямоугольника можно задать произвольным образом, а его скорость определить из выражения для числа Фруда. В отличие от этого в естественной ситуации уже нет такого произвола в выборе параметров задачи. Пусть, например, $\chi = 1$, $Fr = 5$ и при этом $p_c = 0$. Тогда соответствующие размерные переменные имеют следующие приближённые значения: $a = 0,8$ м, $v_0 = 35$ м/с.

Вкратце остановимся на оценке временных промежутков двух рассматриваемых процессов. Первый из них — это мгновенный процесс удара, который характеризуется тем, что скорости отдельных точек механической системы изменяются резко на конечную величину, а положение системы практически не меняется. Второй процесс — движение тела на малых временах после удара. Подчеркнём, что не существует точного определения времени удара. Здесь можно говорить только о примерных порядках, зависящих от физической постановки задачи. Исследование рассматриваемой задачи проводится на малых временах, которые составляют сотые или десятые доли секунды (в большинстве случаев до половины секунды). При этом под процессом удара следует понимать тысячные или десятитысячные доли секунды. Последнее хорошо согласуется с теми оценками, которые приводятся в классических учебниках по теоретической механике.

Исследование проводилось при фиксированных геометрических параметрах задачи. Однако эти величины тоже влияют на картину течения жидкости после удара. В частности,

отметим, что первоначальная зона отрыва не всегда такая большая, как в рассмотренных примерах (соответствующих рис. 3, *а* и *б*). Эта зона уменьшается, когда внешняя свободная граница удаляется от прямоугольника на большое расстояние, а боковые стенки, напротив, приближаются к телу. На рис. 4 показаны динамика точек отрыва и формы внутренних свободных границ в моменты времени $t = 0,06; 0,1; 0,14; 0,18; 0,22$. Параметры задачи выбраны следующим образом: $Fr = 2$; $\chi = 1$; $\varepsilon = 0,2$; $H_R = 1,02$; $H = 3$; $H_b = 3$. Величины c_0 и c_1 имеют следующие приближённые значения: $c_0 \approx 0,31$; $c_1 \approx -0,63$. Заметим, что в этом примере изменены не только геометрические, но и физические параметры задачи (случай $\chi = 1$ допускает естественную трактовку).

Рис. 4. Уменьшение зоны отрыва при изменении геометрических параметров задачи:
 $\varepsilon = 0,2$; $H_R = 1,02$; $H = 3$; $H_b = 3$; $Fr = 2$; $\chi = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача об отрывном ударе и последующем движении с постоянной скоростью прямоугольника, расположенного под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжёлой жидкости. Данная задача исследуется на малых временах, с учётом динамики точек отрыва внутренней свободной границы жидкости. Найдены погранслойные решения в точках отрыва и показано их хорошее согласование с внешним разложением. Рассмотрены конкретные численные примеры, демонстрирующие динамику каверн на малых временах. Динамические задачи об отрывном ударе круга и прямоугольника дают ясное представление о том, что происходит с зоной отрыва после удара на малых временах. Перспективы исследования таких задач связаны, в первую очередь, с изучением дальнейшей динамики каверны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Eng. Math. 2011. V. 70. P. 239–254.
3. Норкин М. В. Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 101–112.
4. Норкин М. В. Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжёлой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 81–92.
5. Сметанин Б. И., Федяева К. Е. Кавитационный отрыв при ударе по пластинке, расположенной в слое жидкости параллельно его свободной границе // Эколог. вестн. научн. центров ЧЭС. 2014. № 2. С. 51–57.
6. Короткин А. И. Присоединённые массы судна: Справочник. Л.: Судостроение, 1986.
7. Тен И. К. Нестационарное движение плавающего тела прямоугольной формы // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, № 5. С. 84–92.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
9. Юдович В. И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твёрдого тела о неоднородную жидкость // Владикавказ. мат. журн. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.
10. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов на Дону: Изд-во ЮФУ, 2008.

UDC 519.634

**THE MOVEMENT OF A RECTANGULAR CYLINDER IN A LIQUID
AT SHORT TIMES AFTER IMPACT WITH FORMATION OF A CAVITY**

© 2020 M. V. Norkin

*Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer
Science, ul. Milchakov 8a, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mail: norkinmi@mail.ru

Received 19.08.2019, revised 29.01.2020, accepted 09.04.2020

Abstract. Under consideration is some dynamical mixed problem concerning some separated impact and subsequent motion with constant velocity of a rectangular cylinder in an ideal incompressible heavy liquid. The specificity of this problem is that an attached cavity forms after impact and a new internal free boundary of the liquid appears. The shape of the cavity and the configuration of the outer free surface are unknown in advance and are to be determined during solution of the problem. Studying the problem is carried out at short times with consideration of the dynamics of the points of separation of the internal free boundary of the liquid. Location of the separation points at every time is defined from the Kutta–Zhukovsky condition. The influence is studied of the physical and geometric parameters of the problem on the shape of free boundaries of the liquid at short times. The asymptotic analysis is carried out of the internal free boundary of liquid near the separation points.

Keywords: ideal incompressible liquid, rectangle, impact, free boundary, cavity, short times, Froude number, cavitation number.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.208

REFERENCES

1. Sedov L.I. Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki [Two-Dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
2. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *J. Eng. Math.*, 2011, Vol. 70, pp. 239–254.
3. Norkin M.V. Dvizhenie krugovogo tsilindra v zhidkosti posle udara na malykh vremenakh s obrazovaniem kaverny [The Motion of a Circular Cylinder in a Liquid after Impact at Short Times with Formation of a Cavity]. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 2012, No. 3, pp. 101–112 (in Russian).
4. Norkin M.V. A Cavity formation at the inclined separated impact on a circular cylinder under free surface of a heavy liquid. *J. Appl. Indust. Math.*, 2016, Vol. 10, No. 4, pp. 538–548.
5. Smetanin B.I., Fedyaeva K.E. Kavitatsionnyi otryv pri udare po plastinke, raspolozhennoi v sloe zhidkosti parallel'no ego svobodnoi granitse [Cavitation Separation with the Impact of a Plate Located in a Layer of a Fluid Parallel to its Free Boundary]. *Ekolog. Vestnik Nauchnykh Tsentrov ChES*, 2014, No. 2, pp. 51–57 (in Russian).
6. Korotkin A.I. Prisoedinennye massy sudna: Spravochnik [Associated Masses of a Ship: Handbook]. Leningrad: Sudostroenie, 1986.
7. Ten I.K. Nestatsionarnoe dvizhenie plavayushchego tela pryamougol'noi formy [Nonstationary Motion of a Floating Body of Squared Shape]. *Prikl. Mekhanika i Tekhn. Fizika*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 84–92 (in Russian).

8. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidromekhanika [Theoretical Hydromechanics]. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz, 1963 (in Russian).
9. Yudovich V.I. Odnosnachnaya razreshimost' zadachi ob udare s otryvom tverdogo tela o neodnorodnuyu zhidkost' [One-Valued Solvability of a Problem of a Solid Body Impact on a Inhomogeneous Liquid]. *Vladikavkaz. Mat. Zhurn.*, 2005, Vol. 7, No. 3, pp. 79–91 (in Russian).
10. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii [Application of Software Package of Finite Elements FreeFem++ for Problems of Hydrodynamics, Electrophoresis, and Biology]. Rostov-on-Don: Izd-vo Yuzhn. Federal. Univ., 2008 (in Russian).