Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. I. Fadeev, Numerical study of nonlinear oscillations in a clock frequency MEMS-generator , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 2, 133–147

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.210>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.108.108

April 26, 2023, 17:20:20

УДК 519.62:621.38

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В MEMS-ГЕНЕРАТОРЕ ТАКТОВОЙ ЧАСТОТЫ

© 2020 С. И. Фадеев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: fadeev@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 29.08.2019 г.; после доработки 29.11.2019 г.;
принята к публикации 05.12.2019 г.

Рассмотрена математическая модель генератора тактовой частоты — прибора класса MEMS (Microelectromechanical systems). Проведено численное исследование решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной правой частью, которое показывает, что существует область параметров модели, в которой ограниченные решения с ростом времени стремятся в фазовой плоскости к устойчивому предельному циклу и, следовательно, периодические колебания устойчивы по отношению к внешним возмущениям. Для определения границы области использовался метод продолжения по параметру решения краевой задачи, определяющей предельный цикл. В рамках рассматриваемой модели численно установлена область работоспособности генератора.

Ключевые слова: математическая модель, генератор частоты, периодические колебания, предельный цикл, устойчивость, фазовая плоскость, краевая задача, продолжение решения по параметру.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.210

ВВЕДЕНИЕ

Генератор тактовой частоты — прибор, предназначенный для синхронизации процессов в различных устройствах и генерирующий колебания эталонной частоты. Примером генератора тактовой частоты является простейшая схема работы часового механизма со спусковым ударным устройством.

В настоящей работе рассматривается математическая модель новой конструкции MEMS-генератора тактовой частоты (в дальнейшем просто генератора), предложенной ИАЭ СО РАН, способного стабильно работать при высоких тактовых частотах. Отличительной особенностью такой конструкции является введение в межэлектродный микрозазор тонкой кристаллической плёнки материала с большим значением диэлектрической проницаемости и с высокой электрической прочностью. Это даёт возможность значительно увеличить амплитуду прикладываемого к структуре напряжения без пробоя воздушного зазора [1–3].

Одномерная схема конструкции генератора, где в качестве подвижного электрода используется недеформируемая платформа, представлена на рис. 1.

Отметим, что реальный размер межэлектродного зазора много меньше в сравнении с другими линейными размерами платформы, что не отражено на схеме рис. 1. Это позволяет

Рис. 1. Схема конструкции генератора:

1 — неподвижный электрод; 2 — диэлектрик толщины h с высоким значением диэлектрической постоянной ε ; 3 — подвижный электрод (недеформируемая платформа массы M); 4 — воздушный зазор между поверхностью диэлектрика и поверхностью платформы площади S , занимающей положение Y в текущий момент времени t ; 5 — пружина с коэффициентом жёсткости G ; 0 — положение платформы в начальный момент времени; d — расстояние между неподвижным электродом и невозмущённой платформой; V — постоянная разность потенциалов между электродами

использовать теорию плоского конденсатора при определении силы электростатического притяжения платформы к неподвижному электроду по формуле

$$F(Y) = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2(d + h/\varepsilon - Y)^2}, \quad (1)$$

где ε_0 — электрическая постоянная, S — площадь платформы, Y — отклонение платформы от нулевого положения в начальный момент времени.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАТОРА ТАКТОВОЙ ЧАСТОТЫ

В рассматриваемой схеме на рис. 1 предполагается, что платформа не деформируема. Поэтому в математической модели генератора платформа представлена материальной точкой массы M , колебания которой происходят под воздействием упругой силы пружины в среде с сопротивлением и повторяющихся электростатических прямоугольных импульсов, согласованных с колебаниями платформы. Закон движения платформы, которая в начальный момент времени находится в невозмущённом состоянии, описывается решением $Y(t)$ задачи Коши:

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2B \frac{dY}{dt} + GY = \sum_{k=0}^{\infty} F_k, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$Y(0) = 0, \quad \frac{dY}{dt}(0) = 0,$$

где $B \geq 0$ — параметр, определяющий сопротивление среды.

Правая часть дифференциального уравнения (2) моделирует последовательность электростатических прямоугольных импульсов длительности H при постоянной разности потенциалов V , согласованную с колебаниями:

$$F_0 = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2(d + h/\varepsilon - Y)^2}, & t \in (0, H], \\ 0, & t \notin (0, H], \end{cases} \quad (3)$$

$$F_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2(d + h/\varepsilon - Y)^2}, & t \in (t_k + Z, t_k + Z + H], \\ 0, & t \notin (t_k + Z, t_k + Z + H], \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь t_k — моменты времени, в которых выполняются условия

$$Y(t_k) = 0, \quad \frac{dY}{dt}(t_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

Z — временной сдвиг относительно t_k . При выполнении условия (4) импульсное воздействие длительности H , согласованное с колебаниями, происходит в моменты времени t , определяемые неравенствами: $t_k + Z < t < t_k + Z + H < t_{k+1}$. Значение t_{k+1} , удовлетворяющее условиям $Y(t_{k+1}) = 0$, $\frac{dY}{dt}(t_{k+1}) > 0$, находится в виде формул точного решения задачи Коши для однородного уравнения с начальными данными при $t = t_k + Z + H$, определённого для $t > t_k + Z + H$, где $F_k = 0$ согласно (3). Последовательность импульсов схематично представлена на рис. 2.

Рис. 2. Временные интервалы воздействия на платформу прямоугольных импульсов длительности H при временном сдвиге Z ; $t'_k = t_k + Z$, $t''_k = t_k + Z + H$, $k \in \mathbb{N}$

Отметим, что выражение F_0 соответствует импульсному воздействию, возбуждающему колебания в генераторе при запуске в начальные моменты времени. При этом длительность импульса и разность потенциалов могут иметь значения H_0 и V_0 , отличные от значений H и V , которые после запуска генератора остаются постоянными.

Замечание 1. Рассмотрим схему генератора, в которой вместо абстрактной пружины на рис. 1 используется в качестве пружины упругая балка длины $2l$ с жёстко закреплёнными концами при $x = 0$ и $x = 1$. Пусть цилиндрический прогиб упругой балки возникает под воздействием сосредоточенной силы, приложенной к середине балки при $x = l$. При этом форма прогиба балки $u(t, x)$ описывается решением начально-краевой задачи [4]

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= F_c \delta(x - l), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 2l, \\ u(t, 0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad u(t, 2l) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2l) = 0, \\ u(0, x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь m — удельная масса балки, D — цилиндрическая жёсткость. Правая часть дифференциального уравнения задаётся в виде δ -функции для представления сосредоточенной силы F_c при $x = l$. Очевидно, величина упругой силы, равная F_c , определяется смещением $u(t, l)$, которое совпадает с положением платформы.

Для оценок результатов численного анализа полезно рассмотреть случай, когда масса балки много меньше массы платформы [5]. Рассмотрим краевую задачу, которая следует из (5) при $m = 0$:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= F_c \delta(x - l), \quad 0 \leq x \leq 2l, \\ U(0) &= \frac{\partial U}{\partial x}(0) = 0, \quad U(2l) = \frac{\partial U}{\partial x}(2l) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Её решение имеет вид

$$U(x) = F_c K(x, l), \quad (7)$$

где

$$K(x, l) = \begin{cases} \frac{(2l-x)^2}{D} \left(\frac{l}{8} - \frac{2l-x}{12} \right), & x \geq l, \\ \frac{x^2}{D} \left(\frac{l}{8} - \frac{x}{12} \right), & x < l, \end{cases}$$

— функция Грина. Как следует из (7), сосредоточенная сила пропорциональна смещению с коэффициентом пропорциональности, который по определению является коэффициентом жёсткости G рассматриваемой пружины:

$$G = \frac{1}{K(l, l)} = \frac{24D}{l^3}. \quad (8)$$

При этом приближённое описание формы изгиба балки имеет вид $u(t, x) = \frac{K(x, l)}{K(l, l)} Y(t)$, где $Y(t)$ — решение задачи Коши (2) с учётом (8). Таким образом, можно считать, что при достаточно малом отношении массы пружины упругой балки к массе платформы задача Коши (2) описывает колебания платформы на пружине с регулируемым коэффициентом жёсткости G в виде формулы (8), устанавливающей зависимость G от параметров упругой балки.

Завершает описание математической модели преобразование перехода в уравнениях модели к безразмерным величинам. Пусть T и $d + h/\varepsilon$ — масштабы времени и линейных размеров для переменных в задаче Коши (2). Дополнительно потребуем, чтобы масштаб времени T определялся из условия равенства единице безразмерной комбинации GT^2/M . После перехода в (2)–(4) к безразмерному времени τ и безразмерному линейному размеру y по формулам

$$t = T\tau, \quad Y = (d + h/\varepsilon)y, \quad T = \sqrt{M/G}, \quad (9)$$

получим преобразованную задачу Коши в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k, \quad \tau \geq 0, \\ y(0) &= 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$f_0 = \begin{cases} \frac{q}{(1-y)^2}, & \tau \in (0, \delta], \\ 0, & \tau \notin (0, \delta], \end{cases} \quad f_k = \begin{cases} \frac{q}{(1-y)^2}, & \tau \in (\tau_k + \gamma, \tau_k + \gamma + \delta], \\ 0, & \tau \notin (\tau_k + \gamma, \tau_k + \gamma + \delta], \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Значения τ_k определяются из условий

$$y(\tau_k) = y_k = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k) = y'_k > 0. \quad (12)$$

Отметим, что формулировка задачи Коши (10) в безразмерных переменных содержит только четыре безразмерных параметра q , δ , γ и b , представляющих комбинации размерных параметров задачи Коши (2):

$$q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G(d + h/\varepsilon)^3}, \quad b = B \sqrt{\frac{1}{MG}}, \quad \delta = H \sqrt{\frac{G}{M}}, \quad \tau_k = t_k \sqrt{\frac{G}{M}}, \quad \gamma = Z \sqrt{\frac{G}{M}}. \quad (13)$$

Это позволяет достаточно компактно в виде диаграмм отобразить характерные свойства решений изучаемой математической модели в зависимости от параметров.

В дальнейшем будет использоваться терминология, относящаяся к описанию колебаний решением задачи Коши (10) без упоминания о «безразмерности» величин.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть решение $y(\tau)$ задачи Коши (10) описывает ограниченные колебания платформы, возникающие под воздействием повторяющихся со сдвигом γ прямоугольных импульсов длительности δ и постоянной амплитудой q силы электростатического притяжения платформы. В соответствии с формулами (11) непрерывное решение задачи Коши (10) с учётом условий (12) представляется в виде последовательности решений задач Коши, относящихся к полуинтервалам, составляющим отрезки $[0, \tau_1]$ и $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$. При этом отрезок $[0, \tau_1]$ содержит полуинтервалы $(0, \gamma]$, $(\gamma, \tau_1]$, а отрезки $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ содержат полуинтервалы $(\tau_k, \tau_k + \gamma]$, $(\tau_k + \gamma, \tau_k + \gamma + \delta]$, $(\tau_k + \gamma + \delta, \tau_{k+1}]$.

Рассмотрим последовательность задач Коши, относящихся к отрезку $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \geq 1$, полагая, что из предшествующих вычислений известно решение задачи Коши (10) при $\tau = \tau_k$. Это позволяет продолжить решение (10) на весь отрезок $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, последовательно обращаясь к решению трёх задач Коши.

Задача 1. Найти функцию $y(\tau)$, являющуюся решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= 0, \quad \tau \in (\tau_k, \gamma], \\ y(\tau_k) &= u_k = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k) = v_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $u_k = 0$ в силу условия (12), значение v_k считается известным из предшествующих вычислений.

Решение задачи (14) имеет вид

$$\begin{aligned} y(\tau) &= e^{-b\eta} \frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} v_k, \quad \eta = \tau - \tau_k, \quad \Delta = \sqrt{1 - b^2}, \quad b^2 < 1, \\ \frac{dy}{d\tau}(\tau) &= e^{-b\eta} \left(\cos(\Delta\eta) - b \frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} \right) v_k. \end{aligned}$$

Значения $u'_k = y(\tau_k + \gamma)$, $v'_k = \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \gamma)$ используются далее как начальные условия задачи 2, решение которой продолжает решение задачи 1.

Задача 2. Найти функцию $y(\tau)$, являющуюся решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= \frac{q}{(1 - y)^2}, \quad \tau \in (\tau_k + \gamma, \tau_k + \gamma + \delta], \\ y(\tau_k + \gamma) &= u'_k, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \gamma) = v'_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Численное решение задачи Коши (15) может быть найдено, например, применением классического метода Рунге — Кутты 4-го порядка. Из решения определяются начальные данные u''_k и v''_k задачи 3, имеющие вид

$$u''_k = y(\tau_k + \gamma + \delta), \quad v''_k = \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \gamma + \delta).$$

Задача 3. Найти функцию $y(\tau)$, являющуюся решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= 0, \quad y(\tau_k + \gamma + \delta) = u_k'', \quad \tau \in (\tau_k + \gamma + \delta, \tau_{k+1}], \\ \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \gamma + \delta) &= v_k''. \end{aligned} \quad (16)$$

Точное решение задачи Коши (16) имеет вид

$$\begin{aligned} y(\tau) &= e^{-b\eta} \left[\left(\cos(\Delta\eta) + b \frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} \right) u_k'' + \frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} v_k'' \right], \\ \eta &= \tau - \tau_k - \gamma - \delta, \quad \Delta = \sqrt{1 - b^2}, \quad b^2 < 1, \\ \frac{dy}{d\tau}(\tau) &= e^{-b\eta} \left[-\frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} u_k'' + \left(\cos(\Delta\eta) - b \frac{\sin(\Delta\eta)}{\Delta} \right) v_k'' \right]. \end{aligned}$$

Из точного решения следует, что ближайшее к τ_k значение τ_{k+1} , при котором выполняются условия $y(\tau_{k+1}) = 0$, $\frac{dy}{d\tau}(\tau_{k+1}) > 0$, определяется начальными данными задачи Коши (16) по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{3\pi}{2} + \arctg \left(\frac{bu_k'' + v_k''}{\Delta u_k''} \right) \right], \quad u_k'' > 0, \\ \tau_{k+1} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{bu_k'' + v_k''}{\Delta u_k''} \right) \right], \quad u_k'' \leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

После вычисления $u_{k+1} = y(\tau_{k+1}) = 0$, $v_{k+1} = \frac{dy}{d\tau}(\tau_{k+1})$ продолжение решения задачи Коши (10) на отрезок $[\tau_{k+1}, \tau_{k+2}]$ повторяет описание продолжения решения на отрезок $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Наконец, колебания на отрезке $[0, \tau_1]$ описываются решением задачи Коши (10), которая с учётом определения f_0 на полуинтервале $(0, \delta]$ в формулах (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= \frac{q}{(1 - y)^2}, \\ y(0) &= 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Затем решение (18) продолжается на полуинтервал $(\delta, \tau_1]$ решением задачи Коши для однородного уравнения (см. задачи 2 и 3):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= 0, \\ y(\delta) &= u_0'', \quad \frac{dy}{d\tau}(\delta) = v_0''. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь u_0'' и v_0'' — решение задачи Коши (18) при $\tau = \delta$. Из точного решения (19) следуют формулы, определяющие τ_1 :

$$\tau_1 = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3\pi}{2} + \arctg \left(\frac{bu_0'' + v_0''}{\Delta u_0''} \right) \right), & u_0'' > 0, \\ \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{bu_0'' + v_0''}{\Delta u_0''} \right) \right), & u_0'' \leq 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Ограничение $b^2 < 1$ в формулах точного решения задач Коши для однородного уравнения (14), (16) является естественным, поскольку в математической модели генератора исследуются колебания платформы. При этом практический интерес представляет случай, когда $b^2 \ll 1$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Численное исследование решения задачи Коши (10), как нелинейной проблемы, представляющей математическую модель генератора, указывает на ряд характерных свойств решения в зависимости от параметров q , b , δ и γ .

Из физических соображений понятно, что с увеличением разности потенциалов сила электростатического воздействия на платформу за конечное время с момента запуска генератора приведёт к соударению платформы с поверхностью диэлектрика, покрывающего неподвижный электрод. В рамках математической модели микрорезонатора это означает, что в этом случае ограниченное решение $y(\tau)$ задачи Коши (10), $y(t) < 1$, может существовать только на конечном временном отрезке. Поэтому основной целью численного исследования является определение условий на параметры q , b , δ и γ , при которых решение задачи Коши для всех $\tau > 0$ будет описывать колебания в генераторе без соударений (ограниченные колебания). Приведём примеры, иллюстрирующие нелинейные эффекты. Заметим, что при представлении решения задачи Коши в фазовой плоскости используются обозначения

$$y_1(\tau) = y(\tau), \quad y_2(\tau) = \frac{dy}{d\tau}(\tau). \quad (20)$$

3.1. Проблема существования ограниченных колебаний

На рис. 3 в фазовой плоскости представлено решение задачи Коши (10). На рис. 3, а представлено решение задачи Коши (10) в виде графика фазовой траектории при следующих значениях параметров модели: $b = 0,04$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $q = 0,1172$. Кроме того, пусть импульс, запускающий колебания в генераторе, происходит при разности потенциалов, которой соответствует значение $q = q_0 = 0,4$ в формуле (11) для f_0 . Как следует из рисунка, в рассматриваемом случае поведение фазовой траектории на некотором временном отрезке можно интерпретировать как стремление к предельному циклу. Однако продолжение вычислений показывает, что непрерывное ограниченное решение существует только на конечном отрезке и, следовательно, отсутствует предельный цикл.

Рис. 3. Представление в фазовой плоскости решения задачи Коши (10) при $b = 0,04$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $q_0 = 0,4$ в окрестности бифуркационного значения q :

- а) отсутствие предельного цикла при $q = 0,1172$;
б) выход на предельный цикл с периодом $T_p = 6,9637$ фазовой траектории при $q = 0,1171$

3.2. Бифуркационное значение параметра

Рассмотрим ту же задачу Коши, внося изменение только в значение параметра q , полагая, что теперь $q = 0,1171$.

Результаты вычислений, представленные на рис.3, б, показывают, что малая вариация значения параметра q приводит к качественно иному поведению решения задачи Коши (10), которое при новом значении параметра q описывает в фазовой плоскости выход на предельный цикл с периодом $T_p = 6,9637$. Значение параметра $q = 0,1171$, найденное численно, будем называть бифуркационным.

Предположим, что в плоскости параметров (q, δ) определена зависимость бифуркационного значения параметра q от δ , график которой проходит через точку (q_*, δ_*) . Тем самым в окрестности точки (q_*, δ_*) определена граница между двумя областями: области, в которой решение задачи Коши описывает ограниченные колебания, выходящие на предельный цикл, и области, в которой предельный цикл не существует. В дальнейшем будет предложен численный метод построения границы с иллюстрацией результатов его применения в плоскости параметров (q, δ) и (γ, δ) .

3.3. Устойчивость предельного цикла

Существование устойчивого предельного цикла в определённой области значений параметров является важным свойством решения задачи Коши (10), которое даёт основание рассматривать задачу Коши как математическую модель генератора. Возникающие при этом периодические колебания будут устойчивы в рамках модели к внешним возмущениям. Результаты вычислений в рассмотренном ниже примере иллюстрируют это свойство.

На рис. 4 приведено решение задачи Коши (10) при $b = 0,4$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $q = 0,08$ и различных значениях q_0 , представленных в фазовой плоскости. При $q_0 = 0,08$ (рис. 4, а) фазовая траектория «наматывается» изнутри на предельный цикл с периодом $T_p = 6,9437$. При $q_0 = 0,04$ (рис. 4, б) фазовая траектория «наматывается» снаружи на тот же предельный цикл, иллюстрируя независимость результата от возмущения q_0 . Предельный цикл приведён на рис. 4, в. Соответствующие предельному циклу периодические колебания, построенные на одном периоде $T_p = 6,9437$, представлены на рис. 4, г.

Из численных экспериментов следует, что траектории в фазовой плоскости, определяемые ограниченными решениями задачи Коши (10), с ростом τ стремятся к устойчивому предельному циклу, представляя в пределе устойчивые колебания с периодом $T_p = \tau_{k+1} - \tau_k$. Аналогично, вычисление амплитуды колебаний на последовательности отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ позволяет в пределе определить амплитуду периодических колебаний.

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Из определения устойчивого предельного цикла следует, что соответствующие предельному циклу периодические колебания с периодом T_p описываются решением задачи Коши (10)–(12), если начальные условия принадлежат предельному циклу. В этом случае решение задачи Коши $y(\tau)$ на отрезке, равном периоду, можно рассматривать как решение краевой задачи относительно $y(\tau)$ и T_p , формулировка которой с учётом (10)–(12) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= f, \quad 0 \leq \tau \leq T_p, \quad 0 \leq \tau \leq T_p, \\ y(0) &= y(T_p), \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{dy}{d\tau}(T_p) - \text{условия периодичности,} \\ y(0) &= 0 - \text{условия трансверсальности.} \end{aligned}$$

Рис. 4. Устойчивость предельного цикла в задаче Коши (10) с параметрами $b = 0, 4$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $q = 0, 08$ при разных значениях q_0 : $q_0 = 0, 08$ (а); $q_0 = 0, 4$ (б).

Выход фазовых траекторий на один и тот же предельный цикл (в) и соответствующие предельному циклу периодические колебания с периодом $T_p = 6, 9437$, представленные на одном периоде (г), где выделен временной отрезок длительности $\delta = 1$ импульсного воздействия

Используя обозначения (20), перепишем формулировку краевой задачи в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = f - y_1 - 2by_2, \quad 0 \leq \tau \leq T_p, \\ y_1(0) &= y_1(T_p), \quad y_2(0) = y_2(T_p) - \text{условия периодичности,} \\ y_1(0) &= 0 - \text{условия трансверсальности,} \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$f = \begin{cases} \frac{q}{(1 - y_1)^2}, & \tau \in (\gamma, \gamma + \delta], \\ 0, & \tau \notin (\gamma, \gamma + \delta]. \end{cases} \quad (22)$$

Период T_p подлежит определению.

Для сравнения рассмотрим математическую модель микрорезонатора — прибора класса MEMS, вырабатывающего эталонную частоту колебаний подвижного электрода под воздействием последовательности сосредоточенных электростатических импульсов с заданным периодом при отсутствии сдвига [6]. В этом случае в определённой области параметров модели возникают устойчивые периодические колебания с тем же периодом, для описания которых формулируется краевая задача на временном отрезке, равном заданному периоду.

Представление проблемы в виде двухточечной краевой задачи (21) позволяет применить эффективный способ изучения нелинейных колебаний в зависимости от параметров q , γ , δ и b методом продолжения по параметру решения краевой задачи. Метод основывается на использовании дифференциальных прогонок метода множественной стрельбы [7, 8]. С этой целью краевая задача (21) с разрывной правой частью дифференциального уравнения (22) преобразуется к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} &= \gamma u_2, & \frac{du_2}{ds} &= -\gamma(2bu_2 + u_1), & \frac{du_3}{ds} &= \delta u_4, \\ \frac{du_4}{ds} &= \delta \left(\frac{q}{(1-u_3)^2} - 2bu_4 - u_3 \right), & \frac{du_5}{ds} &= (T_p - \delta - \gamma)u_6, \\ \frac{du_6}{ds} &= -(T_p - \delta - \gamma)(2bu_6 + u_5), & \frac{dT_p}{ds} &= 0, \\ 0 &\leq s \leq 1, \end{aligned} \quad (23)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_5(1) = 0, & u_2(0) &= u_6(1), & u_1(1) &= u_3(0), \\ u_2(1) &= u_4(0), & u_3(1) &= u_5(0), & u_4(1) &= u_6(0). \end{aligned} \quad (24)$$

Компоненты решения краевой задачи (23), (24) определяют компоненты $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$ решения краевой задачи (21), (22) по формулам

$$y_1(\tau) = \begin{cases} u_1(s), & s = \tau/\gamma, \\ u_3(s), & s = \frac{\tau - \gamma}{\delta}, \\ u_5(s), & s = \frac{\tau - \gamma - \delta}{T_p - \gamma - \delta}, \end{cases} \quad y_2(\tau) = \begin{cases} u_2(s), & s = \tau/\gamma, \\ u_4(s), & s = \frac{\tau - \gamma}{\delta}, \\ u_6(s), & s = \frac{\tau - \gamma - \delta}{T_p - \gamma - \delta}. \end{cases} \quad (25)$$

Предлагаемый вариант метода продолжения по параметру ориентирован на исследование двухточечной краевой задачи на конечном отрезке, сформулированной для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными краевыми условиями достаточно общего вида [7, 8]. В методе предполагается, что функции, входящие в формулировку краевой задачи, непрерывны по совокупности аргументов в некоторой области их определения. (Рассматриваемая краевая задача (16), (17) представляет частный случай.) При использовании дифференциальных прогонок проблема редуцируется к системе нелинейных уравнений, определённой на серии задач Коши метода прогонок, относительно сеточных значений решения в узлах разбиения отрезка. Далее применяется метод продолжения по параметру решения нелинейной системы уравнений, который учитывает возможность ветвления решений типа «поворот» в некоторой области изменения параметра в процессе продолжения по параметру.

Неформализуемой проблемой применения метода продолжения по параметру является задание приемлемого начального приближения решения краевой задачи при стартовом значении параметра, поскольку это требует учёта индивидуальных особенностей задачи. В случае краевой задачи (23), (24) эффективным решением этой проблемы является использование решения задачи Коши (10) для определения периода и формы периодических колебаний. Это позволяет получить достаточно хорошее начальное приближение стартового решения краевой задачи. Далее следует стандартная реализация метода продолжения по параметру начиная со стартового значения параметра. Применительно к краевой задаче (23), (24) метод продолжения по параметру использовался для построения областей в пространстве параметров модели, в которых существуют решения краевой задачи и, следовательно, предельные циклы задачи Коши (10), включая неустойчивые.

5. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

Приведённые на рис. 4, в и рис. 4, г графики, полученные при интегрировании задачи Коши (10) с указанными на рисунке значениями параметров модели, представляют решение краевой задачи (23), (24). Действительно, легко проверить, что предельный цикл задачи Коши, рассматриваемый на одном периоде, удовлетворяет как условиям периодичности, так и условиям трансверсальности.

Применение метода продолжения по параметру к краевой задаче (23), (24) позволяет численно строить диаграммы, характеризующие зависимость решения краевой задачи от параметров, включая случай неединственности решения, когда диаграмма содержит особые точки типа поворот. На рис. 5 представлен график зависимости периода T_p от параметра q , полученный в результате применения метода продолжения по параметру решения краевой задачи (23), (24) с параметрами $b = 0,04$, $\delta = 1$, $\gamma = 0$. Как показали вычисления, при возрастании q от нуля до $q_* = 0,09045$ решение краевой задачи, представленное зависимостью периода T_p от параметра q , описывает устойчивые периодические решения. Точка поворота на графике при $q = q_*$ принадлежит границе множественности решений (два решения). При продолжении решения возрастающая с убыванием q ветвь графика после точки поворота представляет неустойчивые периодические решения. Поэтому в этой области существует только один устойчивый предельный цикл задачи Коши (10).

Рис. 5. Диаграмма зависимости периода T_p от параметра q краевой задачи (23), (24) при $b = 0,04$, $\delta = 1$, $\gamma = 0$, полученная методом продолжения по параметру q , с точкой поворота при $q = 0,09045$

Для численного определения устойчивости предельного цикла использовалось решение задачи Коши (10) с начальными данными при $\tau = 0$, принадлежащими решению краевой задачи. В случае устойчивости решение задачи Коши будет повторять решение краевой задачи при всех $\tau > 0$.

Максимальное значение периода T_p на отрезке $[0, q_*]$ соответствует естественному ограничению $y(\tau) < 1$ на решение краевой задачи. В некоторой окрестности точки поворота при $q > q_*$ краевая задача не имеет решения и, следовательно, отсутствуют ограниченные колебания.

Рассмотрим проблему построения границы в плоскости параметров (q, δ) между областью, в которой существует решение краевой задачи (23), (24) (в дальнейшем область 1), и областью, в которой краевая задача не имеет решения (в дальнейшем область 2). При этом значения параметров b и γ фиксированы.

Пусть в некоторой области изменения параметра δ результат продолжения решения по параметру q может быть представлен в виде диаграммы, аналогичной диаграмме на рис. 4, с точкой поворота при $q = \phi(\delta)$. Пусть, далее, результат продолжения решения по параметру δ в некоторой области изменения параметра q имеет аналогичное представление в виде диаграммы с точкой поворота при $\delta = \psi(q)$. Выполнение этих условий позволяет органи-

зовать численное построение границы между областью 1 и областью 2, состоящей из точек поворота на диаграммах указанных типов.

На рис. 6 представлены диаграммы с областями 1 и 2 в плоскости параметров (δ, q) и (δ, γ) . На рис. 6, а представлены области 1 и области 2 для краевой задачи (23), (24) в плоскости параметров (δ, q) при $\gamma = 0$ и различных значениях параметра b , указанных на рисунке. В качестве примера выделена область 2 с границей, отмеченной значением $b = 0,04$. В областях 2 краевая задача (23), (24) не имеет решения и, следовательно, отсутствуют ограниченные колебания. Вне области 2, т. е. в области 1, задача Коши (10) описывает устойчивые колебания, предельный цикл которых в фазовой плоскости описывается решением краевой задачи (23), (24).

Рис. 6. Диаграммы с областями 1 и 2.

В качестве примеров тонировкой выделены области 2:

- а) с границей, отмеченной значением $b = 0,04$, б) с границей, отмеченной значением $q = 0,08$.

Вне области 2 решение задачи Коши (10) стремится к устойчивому предельному циклу

Ограничение $\delta < 6$ связано с правилом задания последовательности импульсных воздействий (12). В связи с этим рассматриваются только те решения, у которых на временном отрезке импульсного воздействия производная может принимать нулевое значение не более одного раза.

Аналогичным образом, в плоскости параметров (δ, γ) строится граница между областью 1, в которой существует решение краевой задачи (23), (24), и областью 2, в которой краевая задача не имеет решения. На рис. 6, б приведены области 2 при различных значениях параметра q , указанных на рисунке, и фиксированном значении параметра $b = 0,04$. При этом для построения границы определяются точки поворота в серии диаграмм, полученных методом продолжения по параметрам δ или γ . В качестве примера выделена область 2 с границей, отмеченной значением $q = 0,08$.

Отметим, что диаграмма, иллюстрирующая неединственность решения краевой задачи (23), (24), заимствована из работы [9], в которой рассматривается математическая модель микрогенератора без учёта сдвига. Из этой же работы приведена диаграмма на рис. 6, а.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное исследование математической модели генератора, представленной задачей Коши (10), показало, что ограниченные решения задачи Коши стремятся в фазовой плоскости к устойчивому предельному циклу. Таким образом, периодические колебания в генераторе, описываемые в рамках модели, устойчивы к внешним возмущениям.

В связи с этим важным результатом исследования решения задачи Коши является построение областей в пространстве параметров модели, в которых существует устойчивый предельный цикл. Существенно, что для описания свойств предельного цикла в зависимости от

параметров предложено представление проблемы в виде краевой задачи с условиями периодичности и трансверсальности. Это позволило эффективно использовать метод продолжения по параметру решения краевой задачи для построения в пространстве параметров модели границы между областью, в которой существует решение краевой задачи и, следовательно, устойчивый предельный цикл, и областью, в которой краевая задача не имеет решения и, следовательно, отсутствуют периодические колебания.

Полученные результаты могут быть полезны при разработке генераторов тактовой частоты указанного типа для оценок параметров.

Автор выражает благодарность Э. Г. Косцову, по инициативе которого проводились исследования математической модели генератора, а также В. В. Когаю и В. К. Королёву за участие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косцов Э. Г. Состояние и перспективы микро- и наноэлектромеханики // Автометрия. 2009. Т. 45, № 3. С. 3–52.
2. Гринберг Я. С., Пашкин Ю. А., Ильичёв Е. В. Наномеханические резонаторы // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182, № 4. С. 407–436.
3. Косцов Э. Г., Фадеев С. И. Новые электромеханические резонаторы для гигагерцевых частот // Автометрия. 2013. Т. 49, № 2. С. 115–122.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. Фадеев С. И., Косцов Э. Г., Пиманов Д. О. Исследование математической модели микроэлектромеханического резонатора типа платформа // Вычисл. технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 63–87.
6. Фадеев С. И., Пиманов Д. О. Исследование периодических решений в математических моделях микромеханики при импульсном периодическом воздействии // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 122–140.
7. Когай В. В., Фадеев С. И. Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1. С. 83–101.
8. Фадеев С. И., Когай В. В. Линейные и нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд. НГУ, 2018.
9. Фадеев С. И., Когай В. В. Моделирование нелинейных колебаний в микрогенераторе тактовой частоты // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 499–511.

UDC 519.62:621.38

NUMERICAL STUDY OF NONLINEAR OSCILLATIONS IN A CLOCK FREQUENCY MEMS-GENERATOR

© 2020 S. I. Fadeev

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: fadeev@math.nsc.ru

Received 29.08.2019, revised 29.11.2019, accepted 05.12.2019

Abstract. Under consideration is some mathematical model of a clock frequency generator, a device of the MEMS class (microelectromechanical systems). We numerically study the solution of the corresponding second-order ordinary differential equation with nonlinear right-hand side and show that there is a region of the model parameters in which the bounded solutions tend to a stable limit cycle in the phase plane and, therefore, the periodic oscillations are stable with respect to the external perturbations. To determine the boundary of the region, we use the parameter continuation method of the solution of the boundary value problem defining the limit cycle. The model leads to the numerical identification of the region of generator operability.

Keywords: mathematical model, frequency generator, periodic oscillations, limit cycle, stability, phase plane, boundary value problem, parameter continuation method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.210

REFERENCES

1. Kostsov E.G. Sostoyanie i perspektivy mikro- i nanoelektromekhaniki [State of the art and future trends of micro and nanoelectromechanics]. *Avtometriya*, 2009, Vol. 45, No. 3, pp. 3–52 (in Russian).
2. Grinberg Ya.S., Pashkin Yu.A., Il'ichev E.V. Nanomekhanicheskie rezonatory [Nanomechanical Resonators]. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 2012, Vol. 182, No. 4, pp. 407–436 (in Russian).
3. Kostsov E.G., Fadeev S.I. Novye elektromekhanicheskie rezonatory dlya gigagertsevykh chastot [New Electromechanical Resonators for Gigahertz Frequencies]. *Avtometriya*, 2013, Vol. 49, No. 2, pp. 115–122 (in Russian).
4. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
5. Fadeev S.I., Kostsov E.G., Pimanov D.O. Issledovanie matematicheskoi modeli mikroelektromekhanicheskogo rezonatora tipa platforma [Study of Mathematical Model of a Microelectromechanical Resonator of a Platform Type]. *Vychisl. Tekhnologii*, 2016, Vol. 21, No. 2, pp. 63–87 (in Russian).
6. Fadeev S.I., Pimanov D.O. Issledovanie periodicheskikh reshenii v matematicheskikh modelyakh mikromekhaniki pri impul'snom periodicheskom vozbuzhdenii [Studying the Periodic Solutions of Mathematical Models of Micromechanics under Periodic Step Impact]. *Vestnik Novosib. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2013, Vol. 13, vyp. 3, pp. 122–140 (in Russian).
7. Kogai V. V., Fadeev S. I. Primenenie prodolzheniya po parametru na osnove metoda mnozhestvennoi strel'by dlya chislennogo issledovaniya nelineynykh kraevykh zadach [Application of the Parameter

Continuation Approach Based on the Multishooting Method to Numerical Studying the Nonlinear Boundary Value Problems]. *Sibir. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2001, Vol. 4, No 1, pp. 83–101 (in Russian).

8. Fadeev S.I., Kogai V.V. Lineinye i nelineinye kraevye zadachi dlya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk: Izd. Novosib. Gos. Univ., 2018 (in Russian).
9. Fadeev S.I., Kogai V.V. Modelirovanie nelineinykh kolebaniy v mikrogeneratore taktovoi chasty [Modeling of Nonlinear Oscillations in a Clock Frequency MEMS-Generator]. *Sib. Zhurn. Vychisl. Matematiki*, 2019, Vol. 22, No. 4, pp. 499–511 (in Russian).