Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, Optimization analysis of electrostatic cloaking problems , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 5–17

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.401>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 13:04:29

УДК 517.95:519.63

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ МАСКИРОВКИ

© 2020 Г. В. Алексеев^{1,2a}, А. В. Лобанов^{1,2b}¹*Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия*²*Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, г. Владивосток 690091, Россия*E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^balekslobanov1@mail.ruПоступила в редакцию 08.07.2020 г.; после доработки 31.07.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Рассматриваются обратные задачи электростатики, возникающие при проектировании двумерных многослойных экранирующих и маскировочных устройств. С использованием оптимизационного метода рассматриваемые обратные задачи сводятся к конечномерным экстремальным задачам, в которых постоянные диэлектрические проницаемости каждого слоя играют роль управляющих параметров. Разрабатывается численный алгоритм их решения, основанный на методе роя частиц. Показывается, что устройства, спроектированные с помощью предложенного алгоритма, обладают наивысшей маскировочной эффективностью и простотой технической реализации.

Ключевые слова: обратные задачи, электростатическая маскировка, метод оптимизации, метод роя частиц.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.401

ВВЕДЕНИЕ

Большое внимание в последние годы уделяется разработке методов решения задач дизайна маскировочных оболочек, концентраторов, вращателей и других специальных функциональных устройств, служащих для управления магнитными, электрическими, тепловыми и другими полями. В первых работах в этой области [1–4] авторы использовали transformation optics (ТО) method, разработанный в пионерских статьях [5, 6] для решения задач электромагнитной маскировки. Нужно отметить, что полученные с помощью данного метода решения играют важную в теоретическом плане роль, но они обладают и рядом недостатков. Одним из главных недостатков является трудность их технической реализации.

Ввиду указанного обстоятельства, в дополнение к ТО методу стали развиваться другие методы решения указанных задач дизайна. Среди них особую роль играет оптимизационный метод, который, начиная с пионерских работ А. Н. Тихонова (см., [7]), широко используется при решении обратных задач математической физики. Применению оптимизационного метода для решения задач дизайна тепловых и электрических функциональных устройств посвящён ряд статей. Отметим среди них статьи [8–15], в которых в качестве метода численной оптимизации используются методы топологической оптимизации и роя частиц. Альтернативный подход использовался в [16–18] при решении задач акустической маскировки. Упомянем также работы [19–22], посвящённые качественному теоретическому анализу задач акустической или электромагнитной маскировки на основе оптимизационного метода.

В настоящей работе оптимизационный метод применяется для решения обратных задач для 2D модели электростатики, возникающих при проектировании устройств маскировки и экранирования от электрических полей. На основе анализа вычислительных экспериментов, выполненных с использованием метода роя частиц по схеме, предложенной в [9], мы покажем, что разработанный метод позволяет проектировать маскировочные или экранирующие слоистые оболочки, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ

Рассмотрим область Ω в $\mathbb{R}^2$, имеющую в полярных координатах (r, φ) форму кругового кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b — положительные константы. Положим $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| < a\}$, $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| > b\}$. Будем предполагать, что введенные области Ω_i и Ω_e^∞ заполнены однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0 , тогда как область Ω заполнена неоднородной изотропной средой с переменной диэлектрической проницаемостью ε .

Обозначим через B_R круг $|\mathbf{x}| < R$ радиуса $R > b$, содержащий внутри себя области Ω_i и Ω . Будем предполагать, что за пределами B_R сосредоточены внешние источники. В частном случае, когда оболочка отсутствует, так что $\varepsilon = \varepsilon_0$ в Ω , они создают внешнее приложенное электрическое поле $\mathbf{E}_a = -\text{grad } \Phi_a$, где Φ_a — потенциал электрического поля. Присутствие оболочки (Ω, ε) внутри B_R приводит к появлению дополнительного поля $\tilde{\Phi}_s$ во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначив через Φ_i и Φ сужения результирующего поля $\tilde{\Phi} \equiv \Phi_a + \tilde{\Phi}_s$ на области Ω_i и Ω соответственно, а через Φ_s — сужение поля $\tilde{\Phi}_s$ на Ω_e^∞ , отметим, что указанные поля Φ_i , Φ и Φ_s являются решением следующей задачи сопряжения:

$$\varepsilon_0 \Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \text{div}(\varepsilon \nabla \Phi) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varepsilon_0 \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1)$$

$$\Phi_i = \Phi, \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} \text{ при } r = a, \quad (2)$$

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_s, \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial (\Phi_a + \Phi_s)}{\partial r} \text{ при } r = b, \quad (3)$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) и близкая задача сопряжения для модели магнитостатики были исследованы в работах [21, 22]. В них установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование и единственность слабого решения. Для задачи (1)–(4) в случае, когда ε — скалярная функция, описывающая диэлектрическую проницаемость неоднородной изотропной среды, заполняющей область Ω , указанные условия имеют вид

$$\varepsilon \in L^\infty(\Omega), \quad \varepsilon(\mathbf{x}) \geq \varepsilon^0 = \text{const} > 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta \Phi_a = 0 \text{ в } B_R. \quad (5)$$

Как уже указывалось, основное внимание в работе будет уделено численному анализу обратных коэффициентных задач для модели (1)–(4), возникающих при проектировании устройств, служащих для маскировки материальных тел. Указанные задачи состоят в нахождении неизвестного коэффициента диэлектрической проницаемости ε исходя из условий маскировки. Чтобы сформулировать их, обозначим через $\Phi^\varepsilon \equiv (\Phi_i^\varepsilon, \Phi^\varepsilon, \Phi_s^\varepsilon)$ решение задачи (1)–(4), отвечающее переменной проницаемости ε в Ω и постоянной проницаемости ε_0 в Ω_i и Ω_e^∞ . Будем ссылаться на Φ_i^ε (либо Φ_s^ε) как на внутреннее (либо рассеянное) поле. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Общая обратная задача, называемая задачей полной электростатической маскировки, состоит в нахождении диэлектрической проницаемости ε среды, заполняющей область Ω , исходя из следующих двух независимых условий:

$$\nabla \Phi_i^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_i \quad (\text{т. е. } \Phi_i^\varepsilon = \text{const}), \quad \Phi_s^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_e. \quad (6)$$

Подчеркнём, что второе условие в (6) эквивалентно условию $\Phi_s^\varepsilon = 0$ всюду в Ω_e^∞ . Действительно, поскольку Φ_s^ε является гармонической функцией, то указанный факт вытекает из принципа единственности продолжения гармонической функции.

Наряду с общей обратной задачей будем также рассматривать две частные обратные задачи. Первая задача, называемая задачей экранирования или задачей внутренней маскировки, состоит в нахождении функции ε исходя из выполнения первого условия, тогда как во второй задаче, называемой задачей внешней маскировки, ε ищется из выполнения второго условия в (6). На пару (Ω, ε) , обеспечивающую выполнение первого условия (либо обоих условий) в (6), мы будем ссылаться как на экранирующую (либо маскировочную) оболочку.

Первое условие в (5) заведомо выполняется в случае, когда материальная оболочка (Ω, ε) является слоистой и состоит из M элементарных кольцевых слоёв:

$$\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad R_0 = a, \quad R_M = b,$$

одинаковой ширины $d = (b - a)/M$. Каждый из них заполнен однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_m , $m = 1, 2, \dots, M$. Это означает, что диэлектрическая проницаемость ε , отвечающая слоистой оболочке, определяется формулой

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \chi_m(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ — характеристическая функция слоя Ω_m :

$$\chi_m(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_m, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_m. \end{cases}$$

2. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОГО ВНЕШНЕ ПРИЛОЖЕННОГО ПОЛЯ

Аналогично [23] будем рассматривать ниже важный частный случай, когда внешнее приложенное электрическое поле $\mathbf{E}_a$ постоянно во всей плоскости и направлено вдоль оси x . Это означает, что $\mathbf{E}_a$ представимо в виде

$$\mathbf{E}_a = -\nabla \Phi_a \text{ в } \mathbb{R}^2, \quad \Phi_a = -E_a r \cos \varphi, \quad E_a = |\mathbf{E}_a|. \quad (8)$$

Поскольку потенциал Φ_a , введённый в (8), и диэлектрическая проницаемость ε , определённая в (7), удовлетворяют условиям (5), то точное решение задачи (1)–(4), отвечающее указанной паре Φ_a и ε , которое нам будет удобно представить в виде $\Phi = (\Phi_i, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M, \Phi_e)$, где $\Phi_m = \Phi|_{\Omega_m}$, $m = 1, 2, \dots, M$, существует и единственно. Более того, его можно записать в явном виде, используя метод Фурье. В частном случае, когда число слоёв M равно двум, так что Ω разбивается на два слоя Ω_1 и Ω_2 , указанное точное решение $(\Phi_i, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_e)$ ($\Phi_1 = \Phi|_{\Omega_1}$, $\Phi_2 = \Phi|_{\Omega_2}$) можно представить, как и в случае близкой задачи магнитной маскировки [23], в следующем виде:

$$\Phi_i(r, \varphi) = \alpha_0 r \cos \varphi \text{ в } \Omega_i, \quad \Phi_e(r, \varphi) = (-E_a r + \beta_3/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_e, \quad (9)$$

$$\Phi_1(r, \varphi) = (\alpha_1 r + \beta_1/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_1, \quad \Phi_2(r, \varphi) = (\alpha_2 r + \beta_2/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_2. \quad (10)$$

Здесь неизвестные коэффициенты α_0 , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 и β_3 определяются из условий непрерывности полей Φ_i , Φ_1 , Φ_2 и Φ_e на общих границах $r = R_0 \equiv a$, $r = R_1 \equiv (a + b)/2$ и $r = R_2 \equiv b$.

Простой анализ показывает, что указанные условия имеют вид следующей системы шести линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\alpha_0 R_0^2 + \alpha_1 R_0^2 + \beta_1 &= 0, & -\varepsilon_0 \alpha_0 R_0^2 + \varepsilon_1 \alpha_1 R_0^2 - \varepsilon_1 \beta_1 &= 0, \\ -\alpha_1 R_1^2 + \alpha_2 R_1^2 - \beta_1 + \beta_2 &= 0, & -\varepsilon_1 \alpha_1 R_1^2 + \varepsilon_2 \alpha_2 R_1^2 + \varepsilon_1 \beta_1 - \varepsilon_2 \beta_2 &= 0, \\ -\alpha_2 R_2^2 - \beta_2 + \beta_3 &= H_a R_2^2, & -\varepsilon_2 \alpha_2 R_2^2 + \varepsilon_2 \beta_2 - \varepsilon_e \beta_3 &= \varepsilon_0 H_a R_2^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Решив систему (11) относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и подставив найденные значения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ в (9), (10), мы можем найти соответствующие поля Φ_i в Ω_i , Φ_1 в Ω_1 , Φ_2 в Ω_2 и Φ_e в Ω_e , образующие искомое решение задачи (1)–(4) при $M = 2$, и исследовать их свойства.

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае, когда оболочка (Ω, ε) состоит из любого числа M слоёв $(\Omega_m, \varepsilon_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$. В частности, поля Φ_i и Φ_e по прежнему определяются формулами (9), где следует β_3 заменить на β_{M+1} , а компоненты $\Phi_1 = \Phi|_{\Omega_1}, \dots, \Phi_M = \Phi|_{\Omega_M}$ определяются следующими формулами, обобщающими соотношения (10):

$$\Phi_m(r, \varphi) = (\alpha_m r + \beta_m/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

Константы α_m, β_m , входящие в (12), вместе с константами α_0 и β_{M+1} определяются из условий непрерывности смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на общих границах $r = R_m$, $m = 0, 1, \dots, M$, имеющих вид

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \varepsilon_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \varepsilon_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (\varepsilon_{M+1} = \varepsilon_0). \quad (13)$$

В (13) под Φ_0 мы понимаем Φ_i , а под Φ_{M+1} понимаем $\Phi_a + \Phi_s$. Условия (13) имеют вид системы

$$A^\varepsilon q = b, \quad (14)$$

состоящей из $2M + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно искомого вектора $q = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_M, \beta_M, \beta_{M+1})$. Система (14) с соответствующей $(2M + 2) \times (2M + 2)$ -матрицей A^ε , зависящей от проницаемости ε , в которой $b \in \mathbb{R}^{2M+2}$ — заданный вектор, имеющих только две ненулевые компоненты $b_{2M+1} = H_a R_M^2$ и $b_{2M+2} = \varepsilon_0 H_a R_M^2$, является обобщением системы (11) на случай M -слойной оболочки.

Вернувшись к сформулированной выше общей обратной задаче, отметим следующий важный факт, касающийся частного случая двухслойной оболочки. Оказывается, что в этом частном случае её решение, обеспечивающее точное выполнение условий (6), при выполнении условия (8) существует и определяется формулами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 \equiv 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 \equiv (R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2). \quad (15)$$

В справедливости этого факта можно убедиться непосредственно. Для этого нужно поставить значения ε_1^0 и ε_2^0 вместо ε_1 и ε_2 в (11) и выписать точное решение полученной системы, используя, например, пакет Wolfram Mathematica. Впервые указанный факт был установлен в [23] при исследовании близкой задачи магнитной маскировки.

Хотя построенное точное решение описывается простыми формулами (15), оно относится к классу сингулярных решений из-за отсутствия природных либо инженерных материалов, для которых диэлектрическая проницаемость равна нулю. Один из способов преодоления трудностей с технической реализацией решений задач электростатической маскировки состоит в замене исходных обратных задач соответствующими приближёнными задачами и в применении для решения последних оптимизационных методов, позволяющих учесть требования, связанные с технической реализацией отыскиваемых решений. Этим мы займёмся в следующем разделе.

3. ВВЕДЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Введём в рассмотрение M -мерный вектор $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M)$, на который будем ссылаться как на вектор диэлектрических проницаемостей, и определим ограниченное множество K в пространстве $\mathbb{R}^M$ формулой

$$K = \{\mathbf{e} \mid 0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon_{\max}, j = 1, 2, \dots, M\}. \quad (16)$$

Переобозначим $\tilde{\Phi}[\mathbf{e}] \equiv (\Phi_i[\mathbf{e}], \Phi[\mathbf{e}], \Phi_s[\mathbf{e}])$ для решения $\tilde{\Phi}^\varepsilon \equiv (\Phi_i^\varepsilon, \Phi^\varepsilon, \Phi_s^\varepsilon)$ задачи (1)–(4), отвечающего диэлектрической проницаемости ε в Ω , связанной с вектором $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M)$ формулой (7), и обозначение $(\Omega, \mathbf{e})$ для маскировочной оболочки вместо обозначения (Ω, ε) . В соответствии с оптимизационным методом [7] поставим в соответствие каждому из условий либо обоим условиям в (6) следующие функционалы качества:

$$J_i(\mathbf{e}) = \frac{\|\nabla \Phi_i[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i)}}, \quad J_e(\mathbf{e}) = \frac{\|\Phi_s[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J(\mathbf{e}) = 0,5[J_i(\mathbf{e}) + J_e(\mathbf{e})]. \quad (17)$$

Здесь $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$, $\Phi_a = -E_a r \cos \varphi$ — потенциал заданного внешне приложенного поля, а L^2 — нормы, входящие в (17), определяются формулами

$$\begin{aligned} \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_a|^2 d\mathbf{x}, \quad \|\nabla \Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \int_{\Omega_i} |\nabla \Phi_a|^2 d\mathbf{x}, \\ \|\Phi_s[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_s[\mathbf{e}]|^2 d\mathbf{x}, \quad \|\nabla \Phi_i[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \int_{\Omega_i} |\nabla \Phi_i[\mathbf{e}]|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Простой анализ формул (17), (18) показывает, что введённые выше функционалы $J_i(\mathbf{e})$, $J_e(\mathbf{e})$ и $J(\mathbf{e})$ имеют наглядный смысл среднеквадратичных интегральных ошибок выполнения первого, второго или обоих условий маскировки в (6) на векторе $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M)$. Отсюда следует, что именно выражения $J_i(\mathbf{e})$, $J_e(\mathbf{e})$ и $J(\mathbf{e})$ нужно использовать для количественного описания экранирующей или маскировочной эффективностей проектируемых оболочек. В частности, маскировочную эффективность оболочки $(\Omega, \mathbf{e})$ следует оценивать при помощи значения $J(\mathbf{e})$. Оно связано с ней обратной зависимостью: чем меньше значение $J(\mathbf{e})$, т. е. чем меньше ошибка выполнения обоих условий в (6), тем точнее выполняются оба условия маскировки (6), а следовательно, тем выше маскировочная эффективность оболочки $(\Omega, \mathbf{e})$, и наоборот. В результате сформулированные выше обратные задачи дизайна экранирующей либо маскировочной оболочек сводятся к экстремальным задачам нахождения минимайзеров одного из функционалов J_i , J_e и J . Мы будем более детально рассматривать следующие экстремальные задачи:

$$J_i(\mathbf{e}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{e} \in K, \quad (19)$$

$$J(\mathbf{e}) = 0,5[J_i(\mathbf{e}) + J_e(\mathbf{e})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{e} \in K. \quad (20)$$

Для решения задач (19), (20) применим численный алгоритм, основанный на методе роя частиц [24]. Мы будем использовать МРЧ по схеме, подробно описанной в [9]. Из неё следует, что наиболее затратной частью описанного выше алгоритма является процедура вычисления значения $J(\mathbf{e})$ минимизируемого функционала J для произвольного вектора $\mathbf{e} \in K$, моделирующего положение конкретной частицы используемого роя частиц.

В нашем случае, учитывая, что

$$\|\nabla \Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \int_{\Omega_i} |\nabla \Phi_a|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} E_a^2 r (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) dr d\varphi = \pi E_a^2 R_0^2, \quad (21)$$

$$\|\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} A_0^2 r (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) dr d\varphi = \pi \alpha_0^2 R_0^2, \quad (22)$$

$$\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 = \int_{\Omega_e} |\Phi_a|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_{R_M}^{R_{M+1}} E_a^2 r^3 \cos^2(\varphi) dr d\varphi = \frac{\pi}{4} E_a^2 (R_{M+1}^4 - R_M^4), \quad (23)$$

$$\|\Phi_s[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 = \beta_{M+1}^2 \int_0^{2\pi} \int_{R_M}^{R_{M+1}} \frac{1}{r} \left(\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right) dr d\varphi = \beta_{M+1}^2 \pi \ln \left(\frac{R_{M+1}}{R_M} \right), \quad (24)$$

где $R_{M+1} = R$, выражения для функционалов J_i и J_e можно записать в явном виде:

$$J_i(\mathbf{e}) = \sqrt{\frac{\|\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2}} = \frac{\alpha_0}{E_a}, \quad J_e(\mathbf{e}) = \sqrt{\frac{\|\Phi_s[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2}} = \frac{2\beta_{M+1}}{E_a} \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{R_{M+1}}{R_M} \right)}{R_{M+1}^4 - R_M^4}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что вычисление значений $J_i(\mathbf{e})$ и $J_e(\mathbf{e})$ для конкретного вектора $\mathbf{e} \in K$, описывающего положение частицы, состоит из двух этапов. На первом этапе мы находим две компоненты α_0 и β_{M+1} решения $q = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_{M+1})$ соответствующей системы линейных уравнений (14) с матрицей A^ε , где ε определяется по вектору $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ формулой (7). Далее мы подставляем найденные значения α_0 и β_{M+1} в (25) и вычисляем нужные значения $J_i(\mathbf{e})$ и $J_e(\mathbf{e})$ с необходимой степенью точности. Подчеркнём, что в силу плохой обусловленности системы (14) при больших M задание её коэффициентов, нахождение решения, а также все другие расчёты производились с достаточно высокой точностью, обеспечиваемой правилами пакета Wolfram Mathematica.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Обсудим здесь результаты численного решения рассматриваемых задач электростатической маскировки с использованием метода роя частиц (МРЧ). Все вычислительные эксперименты проводились для следующих исходных данных:

$$a = 0,04 \text{ м}, \quad b = 0,05 \text{ м}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad R = 0,1 \text{ м}. \quad (26)$$

Внешне приложенное электростатическое поле имеет вид (8). Цель численных экспериментов состояла в изучении зависимости свойств решений задач (19) и (20) от числа слоёв M проектируемой оболочки и от выбора множества управлений K в (16).

Мы начнём обсуждение полученных результатов с анализа результатов решения задачи (20) в простейшем случае двухслойной оболочки ($M = 2$). Напомним, что точное решение задачи полной маскировки в этом случае определяется сингулярной формулой (15). Учитывая, с учётом (15) и (16), что $R_0 = a = 0,04$ м, $R_1 = (a + b)/2 = 0,045$ м, $R_2 = b = 0,05$ м, имеем в силу (15) $\varepsilon_2^0 = (R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2) = 9,5263157895$ (с точностью 10^{-10}).

Полагая $\varepsilon_{\max} = 20$, выберем убывающую последовательность $\varepsilon_1^n = 10^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, и применим МРЧ для решения задачи (20) с данными ε_1^n и $\varepsilon_{\max}$. Полученные путём решения задачи (20) оптимальные проницаемости $\varepsilon_1^{\text{opt}}$, $\varepsilon_2^{\text{opt}}$ и отвечающие им оптимальные значения $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$, где $\mathbf{e}^{\text{opt}} = (\varepsilon_1^{\text{opt}}, \varepsilon_2^{\text{opt}})$, представлены вместе со значениями $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ и $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ (для сравнения) в табл. 1 для ряда значений ε_1^n , изменяющихся от 10^{-1} до 10^{-10} . Для удобства дальнейшего анализа в столбце 4, содержащем значения $\varepsilon_2^{\text{opt}}$, жирным шрифтом выделены верные цифры $\varepsilon_2^{\text{opt}}$, т. е. цифры, совпадающие с первыми цифрами точного решения ε_2^0 .

Анализ табл. 1 показывает, что для всех n значение $\varepsilon_1^{\text{opt}}$ совпадает с нижней $\varepsilon_{\min}$ (или верхней $\varepsilon_{\max}$) (при малых n) границей множества K и что количество верных цифр (в сравнении с ε_2^0) значения $\varepsilon_2^{\text{opt}}$ растёт с ростом n . Последнее означает, что найденные с помощью МРЧ оптимальные значения $\varepsilon_2^{\text{opt}}$ приближаются с увеличением n к точному решению ε_2^0 . Это подтверждает высокую точность используемого нами оптимизационного метода для решения задачи полной маскировки.

Обсудим теперь результаты решения задач (19) и (20) для общего случая многослойных оболочек. Ясно, что соответствующие результаты очень сильно зависят от выбора множества K , т. е. от выбора его нижней и верхней границ $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$. Ниже мы обсудим тесты, отвечающие следующим трём парам $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$:

$$(0,01,8), \quad (0,01,45), \quad (0,01,86). \quad (27)$$

Отметим, что все введённые в (27) значения, кроме $\varepsilon_{\min} = 0,01$, отвечают диэлектрическим проницаемостям известных материалов. Так, значение $\varepsilon_{\max} = 8$ описывает диэлектрическую проницаемость слюды, $\varepsilon_{\max} = 45$ описывает диэлектрическую проницаемость определённого сорта керамики, $\varepsilon_{\max} = 86$ описывает диэлектрическую проницаемость оксида титана.

Таблица 1

Задача полной маскировки:
 $M = 2$; $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_{\min}^n = 10^{-n}$; $n = 1, 2, \dots, 10$; $\varepsilon_{\max} = 20$

$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_1^{\text{opt}}$	$\varepsilon_2^{\text{opt}}$	$J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$
10^{-1}	20	20	0,1491115752	$3,67 \cdot 10^{-1}$	$2,91 \cdot 10^{-15}$	$1,84 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	20	10^{-2}	8,7857131627	$9,69 \cdot 10^{-2}$	$5,62 \cdot 10^{-16}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	20	10^{-4}	9,5182867673	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$2,23 \cdot 10^{-17}$	$5,26 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	20	10^{-6}	9,5262354316	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$5,88 \cdot 10^{-18}$	$5,26 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	20	10^{-8}	9,5263149859	$1,05 \cdot 10^{-7}$	$7,37 \cdot 10^{-18}$	$5,26 \cdot 10^{-8}$
10^{-10}	20	10^{-10}	9,5263157814	$1,05 \cdot 10^{-9}$	$1,80 \cdot 10^{-17}$	$5,26 \cdot 10^{-10}$

Оптимизационный анализ задачи экранирования (19) для первой пары $(0,01,8)$ в (27) так же, как и для других тестов, показал очень интересный факт. Оказалось, что при выполнении определённых условий на $\varepsilon_{\min}$, $\varepsilon_{\max}$ и, в частности, условия

$$\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\min}\varepsilon_{\max} \geq 0 \quad (28)$$

оптимальные значения $\varepsilon_m^{\text{opt}}$ всех параметров ε_m с нечётными индексами $m = 1, 3, \dots, M-1$ совпадают с $\varepsilon_{\min}$, тогда как оптимальные значения $\varepsilon_2^{\text{opt}}, \varepsilon_4^{\text{opt}}, \dots, \varepsilon_M^{\text{opt}}$ остальных параметров (с чётными индексами) совпадают с $\varepsilon_{\max}$. Таким образом, выполняются соотношения

$$\varepsilon_1^{\text{opt}} = \varepsilon_3^{\text{opt}} = \dots = \varepsilon_{\min}, \quad \varepsilon_2^{\text{opt}} = \varepsilon_4^{\text{opt}} = \dots = \varepsilon_M^{\text{opt}} = \varepsilon_{\max}, \quad (29)$$

называемые соотношениями чередующегося дизайна 1-го типа [14]. В некоторых случаях вместо (29) выполняются соотношения

$$\varepsilon_1^{\text{opt}} = \varepsilon_3^{\text{opt}} = \dots = \varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon_2^{\text{opt}} = \varepsilon_4^{\text{opt}} = \dots = \varepsilon_M^{\text{opt}} = \varepsilon_{\min}, \quad (30)$$

на которые мы будем ссылаться как на соотношения чередующегося дизайна второго типа. Соотношения (29), (30) можно рассматривать как проявление математического свойства bang-bang оптимального решения $\mathbf{e}^{\text{opt}} \equiv (\varepsilon_1^{\text{opt}}, \varepsilon_2^{\text{opt}}, \dots, \varepsilon_M^{\text{opt}})$, согласно которому каждая его компонента $\varepsilon_m^{\text{opt}}$ принимает одно из двух значений $\varepsilon_{\min}$, $\varepsilon_{\max}$, являющихся границами множества K [14].

Указанные свойства подтвердились при решении задачи (19) для всех пар исходных данных. При этом оказалось, как и в [13, 14], что экранирующие свойства решения задачи (19) очень сильно зависят от значения так называемого контраста $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min}$. Так, расчёты, проведённые для первой пары в (27) с низким контрастом $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 800$, показали, что при изменении M от 2 до 16 значение $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ функционала J_i изменяется от $1,010 \cdot 10^{-1}$ при $M = 2$ до значения $4,680 \cdot 10^{-2}$ при $M = 16$, отвечающего низкой экранирующей эффективности.

Однако если выбрать в качестве исходных данных вторую пару в (27) с существенно более высоким контрастом $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 4500$, то спроектированная путём решения задачи (19) оболочка обладает относительно высокой экранирующей эффективностью при M , близких к 16. В этом можно убедиться из анализа табл. 2, содержащей для второй пары в (27) оптимальные значения $\varepsilon_1^{\text{opt}}, \varepsilon_M^{\text{opt}}$ диэлектрических проницаемостей первого и последнего слоёв, совпадающие в (силу (29)) с $\varepsilon_{\min} = 0,01$ и $\varepsilon_{\max} = 45$ соответственно, и оптимальные значения $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ функционала $J_i(\mathbf{e})$, где $\mathbf{e}^{\text{opt}} = \mathbf{e}^{\text{alt}} \equiv (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}, \dots, \varepsilon_{\max})$, вместе со значениями $J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ и $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ (для сравнения) для чётных значений M , изменяющихся от 2 до 16. Остальные значения управлений $\varepsilon_m^{\text{opt}}, m = 2, 3, \dots, M - 1$ определяются из соотношений (29), где следует положить $\varepsilon_{\min} = 0,01, \varepsilon_{\max} = 45$. Анализ табл. 2 показывает, что с ростом M значения $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ изменяются от $3,34 \cdot 10^{-2}$ при $M = 2$ до значения $9,04 \cdot 10^{-4}$ при $M = 16$, отвечающего относительно высокой экранирующей эффективности.

Таблица 2

Задача экранирования:
 $\varepsilon_{\min} = 0,01, \varepsilon_{\max} = 45, \varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 4500$

M	$\varepsilon_1^{\text{opt}}$	$\varepsilon_M^{\text{opt}}$	$J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$
2	0,01	45	$3,34 \cdot 10^{-2}$	$2,82 \cdot 10^{-1}$	$1,58 \cdot 10^{-1}$
4	0,01	45	$6,47 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{-1}$	$9,46 \cdot 10^{-2}$
6	0,01	45	$2,79 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-1}$	$6,13 \cdot 10^{-2}$
8	0,01	45	$1,74 \cdot 10^{-3}$	$7,83 \cdot 10^{-2}$	$3,10 \cdot 10^{-2}$
10	0,01	45	$1,32 \cdot 10^{-3}$	$4,97 \cdot 10^{-2}$	$2,55 \cdot 10^{-2}$
12	0,01	45	$1,10 \cdot 10^{-3}$	$2,92 \cdot 10^{-2}$	$1,51 \cdot 10^{-2}$
14	0,01	45	$9,80 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$7,41 \cdot 10^{-3}$
16	0,01	45	$9,04 \cdot 10^{-4}$	$2,03 \cdot 10^{-3}$	$1,47 \cdot 10^{-3}$

Достигнутую в табл. 2 эффективность можно сделать ещё выше, если увеличить контраст $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min}$. В этом можно убедиться из табл. 3, являющейся аналогом табл. 2 для третьей пары $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ в (27). Анализ табл. 3 показывает, что значения $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$, где $\mathbf{e}^{\text{opt}} = \mathbf{e}^{\text{alt}}$, изменяются в пределах от $1,92 \cdot 10^{-2}$ до $8,06 \cdot 10^{-5}$ при увеличении M от 2 до 16. Последнее значение $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}}) = 8,06 \cdot 10^{-5}$ (при $M = 16$) соответствует достаточно высокой экранирующей эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{\text{opt}})$. В то же время значения $J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ и $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$, приведённые в двух последних столбцах табл. 2 и 3, достаточно велики, поскольку мы минимизируем именно функционал $J_i(\mathbf{e})$.

Перейдём теперь к анализу результатов, полученных при решении задачи маскировки (20). Наш оптимизационный анализ с использованием МРЧ показал, что для компонент $\varepsilon_m^{\text{opt}}$ оптимального решения $\mathbf{e}^{\text{opt}} \equiv (\varepsilon_1^{\text{opt}}, \varepsilon_2^{\text{opt}}, \dots, \varepsilon_M^{\text{opt}})$ задачи (20), вместо (29) или (30), выполняются соотношения почти чередующегося дизайна. Слово «почти» означает, что соотношения чередующегося дизайна (29) или (30) выполняются для всех компонент $\varepsilon_m^{\text{opt}}$ оптимального решения $\mathbf{e}^{\text{opt}}$, кроме последней $\varepsilon_M^{\text{opt}}$, которая принимает некоторое промежуточное значение между $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$. В этом состоит важное отличие решения задачи маскировки (20) от решения задачи экранирования (19). Что касается маскировочных свойств оптимальных решений, то так же, как и в случае задачи (19), они сильно зависят от значения контраста $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min}$.

Таблица 3

Задача экранирования:
 $\varepsilon_{\min} = 0,01$, $\varepsilon_{\max} = 86$, $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 8600$

M	$\varepsilon_1^{\text{opt}}$	$\varepsilon_M^{\text{opt}}$	$J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$
2	0,01	86	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$3,45 \cdot 10^{-1}$	$1,82 \cdot 10^{-1}$
4	0,01	86	$2,23 \cdot 10^{-3}$	$2,76 \cdot 10^{-1}$	$1,39 \cdot 10^{-1}$
6	0,01	86	$6,32 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-1}$	$1,12 \cdot 10^{-1}$
8	0,01	86	$2,88 \cdot 10^{-4}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	$9,27 \cdot 10^{-2}$
10	0,01	86	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$7,79 \cdot 10^{-2}$
12	0,01	86	$1,22 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-1}$	$6,65 \cdot 10^{-2}$
14	0,01	86	$9,59 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-1}$	$5,75 \cdot 10^{-2}$
16	0,01	86	$8,06 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$5,04 \cdot 10^{-2}$

В этой связи опять отметим, что решения, полученные для первой пары в (27) путём решения задачи (20) с помощью МРЧ, обладают низкой маскировочной эффективностью при всех M . Однако если выбрать в качестве исходных данных вторую пару в (27), то спроектированная путём решения задачи (20) оболочка обладает относительно высокой маскировочной эффективностью при M , близких к 16. Это видно из табл. 4, где представлены полученные с помощью МРЧ результаты решения задачи (20) в виде первого и последнего оптимальных управлений $\varepsilon_1^{\text{opt}}$ и $\varepsilon_M^{\text{opt}}$ и оптимальных значений $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ функционала J вместе со значениями $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ и $J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ (для сравнения). Остальные управления $\varepsilon_m^{\text{opt}}$, $m = 2, 3, \dots, M-1$, при $M \geq 4$ определяются из соотношений почти чередующегося дизайна первого типа (29). Анализ табл. 4 показывает, что при изменении M от 2 до 16 последнее управление $\varepsilon_M^{\text{opt}}$ изменяется от 8,785 при $M = 2$ до 44,24 при $M = 16$, тогда как минимальное значение $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ убывает от $4,85 \cdot 10^{-2}$ при $M = 2$ до значения $4,54 \cdot 10^{-4}$, отвечающего относительно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{\text{opt}})$.

Таблица 4

Задача маскировки:
 $\varepsilon_{\min} = 0,01$, $\varepsilon_{\max} = 45$, $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 4500$

M	$\varepsilon_1^{\text{opt}}$	$\varepsilon_M^{\text{opt}}$	$J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$
2	0,01	8,785	$9,69 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-12}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$
4	0,01	16,14	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-13}$	$5,62 \cdot 10^{-3}$
6	0,01	22,21	$3,86 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-13}$	$1,93 \cdot 10^{-3}$
8	0,01	27,41	$2,13 \cdot 10^{-3}$	$4,60 \cdot 10^{-14}$	$1,06 \cdot 10^{-3}$
10	0,01	32,05	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-13}$	$7,44 \cdot 10^{-4}$
12	0,01	36,33	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-13}$	$5,91 \cdot 10^{-4}$
14	0,01	40,37	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$2,83 \cdot 10^{-14}$	$5,07 \cdot 10^{-4}$
16	0,01	44,24	$9,08 \cdot 10^{-4}$	$6,68 \cdot 10^{-15}$	$4,54 \cdot 10^{-4}$

Следующая табл. 5, являющаяся аналогом табл. 4, содержит результаты решения задачи (20) для третьей группы данных в (27) в виде первого и последнего оптимальных управлений $\varepsilon_1^{\text{opt}}$ и $\varepsilon_M^{\text{opt}}$ и оптимальных значений $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ функционала J вместе со значениями $J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ и $J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$.

Остальные значения $\varepsilon_2^{\text{opt}}, \dots, \varepsilon_{M-1}^{\text{opt}}$ при $M \geq 4$ определяются из соотношений (29), отвечающих схеме почти чередующегося дизайна первого типа. Анализ табл. 5 показывает, что при

Таблица 5

Задача маскировки:
 $\varepsilon_{\min} = 0,01$, $\varepsilon_{\max} = 86$, $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min} = 8600$

M	$\varepsilon_1^{\text{opt}}$	$\varepsilon_M^{\text{opt}}$	$J_i(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{e}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$
2	0,01	8,785	$9,69 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-12}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$
4	0,01	16,03	$6,22 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-12}$	$3,11 \cdot 10^{-3}$
6	0,01	21,76	$1,32 \cdot 10^{-3}$	$7,17 \cdot 10^{-14}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$
8	0,01	26,25	$5,06 \cdot 10^{-4}$	$2,30 \cdot 10^{-13}$	$2,53 \cdot 10^{-4}$
10	0,01	29,84	$2,70 \cdot 10^{-4}$	$1,57 \cdot 10^{-14}$	$1,35 \cdot 10^{-4}$
12	0,01	32,78	$1,77 \cdot 10^{-4}$	$3,70 \cdot 10^{-14}$	$8,83 \cdot 10^{-5}$
14	0,01	35,24	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,03 \cdot 10^{-14}$	$6,54 \cdot 10^{-5}$
16	0,01	37,36	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$1,48 \cdot 10^{-14}$	$5,26 \cdot 10^{-5}$

изменении M от 2 до 16 последнее управление $\varepsilon_M^{\text{opt}}$ возрастает от значения 8,785 при $M = 2$ до 37,36 при $M = 16$, тогда как значение $J(\mathbf{e}^{\text{opt}})$ убывает от $4,85 \cdot 10^{-2}$ при $M = 2$ до значения $5,26 \cdot 10^{-5}$ при $M = 16$, отвечающего достаточно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{\text{opt}})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы обратные задачи электростатики, возникающие при проектировании двумерных многослойных экранирующих и маскировочных устройств для сценария однородного внешне приложенного электростатического поля. Выполненный анализ результатов решения обратных задач экранирования и маскировки показал, что применение для их решения оптимизационного метода с использованием метода роя частиц позволяет получить оптимальные решения, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе и простотой технической реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guenneau S., Amra C., Veynante D. Transformation thermodynamics: Cloaking and concentrating heat flux // Opt. Express. 2012. V. 20, N 7. P. 8207–8218.
2. Narayana S., Sato V. Heat flux manipulation with engineered thermal materials // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 214303.
3. Yang F., Mei Z. L., Jin T. Z., Cui T. J. DC electric invisibility cloak // Phys. Review Lett. 2012. V. 109. P. 053902.
4. Lan C. W., Yang Y., Zhou J., Li B. Electrostatic field invisibility // Cloak. Sci Rep. 2015. V. 5. P. 16416.
5. Pendry J. B., Shurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
6. Leonhardt U. Optical conformal mapping // Science. 2006. V. 312. P. 1777–1780.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. Dede E. M., Nomura T., Lee J. Thermal-composite design optimization for heat flux shielding, focusing, and reversal // Struct. Multidisc. Optim. 2014. V. 49. P. 59–68.
9. Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А. Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // Докл. АН. 2017. Т. 472, № 4. С. 398–402.
10. Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А. Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 5. С. 512–517.
11. Peralta I., Fachinotti V. D., Ciarbonetti A. A. Optimization-based design of a heat flux concentrator // Sci. Rep. 2017. V. 7. P. 40591.

12. *Fachinotti V. D., Ciarbonetti A. A., Peralta I., Rintoul I.* Optimization-based design to easy-to-make devices for heat flux manipulation // *Int. J. Therm. Sci.* 2018. V. 28. P. 38–48.
13. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2019. Т. 59, № 2. С. 217–234.
14. *Alekseev G. V., Tereshko D. A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 135. P. 1269–1277.
15. *Alekseev G. V., Tereshko D. A.* Optimization method in material bodies cloaking with respect to static physical fields // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2019. V. 27, N 6. P. 845–857.
16. *Романов В. Г.* Обратная задача дифракции для уравнений акустики // *Докл. АН.* 2010. Т. 431, № 3. С. 319–322.
17. *Романов В. Г., Чиркунов Ю. А.* Нерассеивающие акустические объекты в анизотропной среде специального вида // *Докл. АН.* 2013. Т. 448, № 4. С. 396–398.
18. *Chirkunov Yu. A.* Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification // *Acta Mechanica.* 2017. V. 228, N 7. P. 2533–2539.
19. *Алексеев Г. В., Лобанов А. В.* Оценки устойчивости решений обратных экстремальных задач для уравнения Гельмгольца // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2013. Т. 16, № 2. С. 14–25.
20. *Алексеев Г. В.* Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // *Дифференц. уравнения.* 2016. Т. 52, № 3. С. 366–377.
21. *Лобанов А. В., Спивак Ю. Э.* Оптимизационный метод в двумерных задачах электрической маскировки // *Дальневост. мат. журн.* 2019. Т. 19. С. 31–42.
22. *Спивак Ю. Э.* Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки // *Сиб. электрон. мат. известия.* 2019. Т. 16. С. 812–825.
23. *Gomory F., Solovyov M., Souc J., Navau C., Prat-Camps J., Sanchez A.* Experimental realization of a magnetic cloak // *Science.* 2012. V. 335. P. 1466–1468.
24. *Poli R., Kennedy J., Blackwell T.* Particle swarm optimization: an overview // *Swarm Intel.* 2007. V. 1. P. 33–57.

UDC 517.95:519.63

OPTIMIZATION ANALYSIS OF ELECTROSTATIC CLOAKING PROBLEMS

© 2020 G. V. Alekseev^{1,2a}, A. V. Lobanov^{1,2b}

¹*Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
ul. Radio 7, Vladivostok 690041, Russia,*

²*Far-Eastern Federal University,
ul. Sukhanova 8, Vladivostok 690091, Russia*

E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^balekslobanov1@mail.ru

Received 08.07.2020, revised 31.07.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. Under consideration are the inverse problems of electrostatics that arise in designing two-dimensional multilayer shielding and cloaking devices. Using optimization, we reduce these inverse problems to the finite-dimensional extremal problems in which the roles of control parameters are played by the constant dielectric permittivities of the layers. Basing on particle swarm optimization, we develop some numerical algorithm for solving these problems. We also show that the devices designed by the algorithm have the highest cloaking efficiency and simplicity of technical implementation.

Keywords: inverse problem, electrostatic cloaking, particle swarm optimization.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.401

REFERENCES

1. Guenneau S., Amra C., Veynante D. Transformation thermodynamics: Cloaking and concentrating heat flux. *Opt. Express*, 2012, Vol. 20, No. 7, pp. 8207–8218.
2. Narayana S., Sato V. Heat flux manipulation with engineered thermal materials. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, Vol. 108, pp. 214303.
3. Yang F., Mei Z.L., Jin T.Z., Cui T.J. DC electric invisibility cloak. *Phys. Review Lett.*, 2012, Vol. 109, pp. 053902.
4. Lan C.W., Yang Y., Zhou J., Li B. Electrostatic field invisibility. *Cloak. Sci. Rep.*, 2015, Vol. 5, pp. 16416.
5. Pendry J.B., Shurig D., Smith D.R. Controlling electromagnetic fields. *Science*, 2006, Vol. 312, pp. 1780–1782.
6. Leonhardt U. Optical conformal mapping. *Science*, 2006, Vol. 312, pp. 1777–1780.
7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods of solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
8. Dede E.M., Nomura T., Lee J. Thermal-composite design optimization for heat flux shielding, focusing, and reversal. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2014, Vol. 49, pp. 59–68.
9. Alekseev G.V., Levin V.A., Tereshko D.A. Optimizatsionnyi analiz zadachi teplovoi maskirovki tsilindricheskogo tela [Optimization analysis of the thermal cloaking problem for a cylindrical body]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2017, Vol. 472, No. 4, pp. 398–402 (in Russian).
10. Alekseev G.V., Levin V.A., Tereshko D.A. Optimizatsionnyi metod v zadachakh dizaina sfericheskikh sloistnykh teplovykh obolochek [The optimization method in design problems on spherical layered thermal shells]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2017, Vol. 476, No. 5, pp. 512–517 (in Russian).

11. Peralta I., Fachinotti V.D., Ciarbonetti A.A. Optimization-based design of a heat flux concentrator. *Sci. Rep.*, 2017, Vol. 7, pp. 40591.
12. Fachinotti V.D., Ciarbonetti A.A., Peralta I., Rintoul I. Optimization-based design to easy-to-make devices for heat flux manipulation. *Int. J. Therm. Sci.*, 2018, Vol. 28, pp. 38–48.
13. Alekseev G.V., Tereshko D.A. Optimization method for axisymmetric problems of electric cloaking of material bodies. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2019, Vol. 59, No. 2, pp. 207–223.
14. Alekseev G.V., Tereshko D.A. Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, Vol. 135, pp. 1269–1277.
15. Alekseev G.V., Tereshko D.A. Optimization method in material bodies cloaking with respect to static physical fields. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2019, Vol. 27, No. 6, pp. 845–857.
16. Romanov V.G. The inverse diffraction problem for acoustic equations. *Dokl. Akad. Nauk*, 2010, Vol. 431, No. 3, pp. 319–322 (in Russian).
17. Romanov V.G., Chirkunov Yu.A. Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of a special form. *Dokl. Akad. Nauk*, 2013, Vol. 448, No. 4, pp. 396–398 (in Russian).
18. Chirkunov Yu.A. Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification. *Acta Mechanica*, 2017, Vol. 228, No. 7, pp. 2533–2539.
19. Alekseev G.V., Lobanov A.V. Stability estimates of the solutions to inverse extremal problems for the Helmholtz equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 3, pp. 302–312.
20. Alekseev G.V. Analysis and optimization in problems of cloaking of material bodies for the Maxwell equations. *Differential Equations*, 2016, Vol. 52, No. 3, pp. 361–372.
21. Lobanov A.V., Spivak Yu.E. Optimizatsionnyi metod v dvumernykh zadachakh elektricheskoi maskirovki [Optimization method in two-dimensional electrical cloaking problems]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.*, 2019, Vol. 19, pp. 31–42 (in Russian).
22. Spivak Yu.E. Optimization method in 2D magnetic cloaking problems. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Vol. 16, pp. 812–825 (in Russian).
23. Gomory F., Solovyov M., Souc J., Navau C., Prat-Camps J., Sanchez A. Experimental realization of a magnetic cloak. *Science*, 2012, Vol. 335, pp. 1466–1468.
24. Poli R., Kennedy J., Blackwell T. Particle swarm optimization: an overview. *Swarm Intel.*, 2007, Vol. 1, pp. 33–57.