Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Ya. Wang, A. S. Leonov, D. V. Lukyanenko, V. D. Shinkarev, A. G. Yagola, On phase correction in tomographic research , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 18–29

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.402>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 15:08:27

УДК 519.632.4:519.642

О КОРРЕКЦИИ ФАЗЫ В ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

© 2020 Я. Ван^{1a}, А. С. Леонов^{2b}, Д. В. Лукьяненко^{3c}, В. Д. Шинкарёв³,
А. Г. Ягола^{3d}

¹Институт геологии и геофизики Китайской АН, Пекин 100029, Китай,

²Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ),
Каширское шоссе, 31, Москва 115409, Россия,

³Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва 119992, Россия

E-mails: ^ayfwang@mail.iggcas.ac.cn, ^basleonov@mephi.ru,
^clukyanenko@physics.msu.ru, ^dyagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 01.06.2020 г.; после доработки 10.08.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Рассматривается проблема улучшения контрастности изображения, получаемого при обработке томографических проекций с фазовыми искажениями. В основу исследования положено известное уравнение переноса интенсивности. В отличие от других работ это уравнение решается в ограниченной области изменения томографических параметров. В области ставится краевая задача для уравнения переноса интенсивности, которая затем специализируется для трёхмерной параллельной томографической схемы. Рассматривается также случай двумерной томографии и соответствующая краевая задача для уравнения переноса интенсивности. Предлагаются численные методы решения введённых краевых задач коррекции фазы. Представляются результаты численных экспериментов коррекции томографических проекций и восстановления по ним структуры исследуемых объектов (в частности, среза геологического образца) с помощью кусочно-равномерной регуляризации.

Ключевые слова: томография, коррекция фазы, перенос интенсивности, методы регуляризации некорректных задач.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.402

ВВЕДЕНИЕ

Томографические исследования широко используются в современной науке и технике. В различных технических реализациях они применяются во многих отраслях медицины, технического контроля, геофизики и др. При использовании томографии часто возникают артефакты, ухудшающие получаемое изображение внутренней структуры образца. Один из них — недостаточный контраст изображения при исследованиях биологических, геологических и других структур. Он может возникать по различным причинам. Нас будет интересовать ухудшение контраста в томографии высокого разрешения из-за фазовых характеристик излучения, т. е. из-за дифракционных эффектов, связанных с набегом фазы при распространении излучения от исследуемого образца к регистрирующему детектору. Точнее, нас интересуют возможности коррекции этого эффекта. В литературе это иногда кратко называется коррекцией фазы, хотя на самом деле производится коррекция фазово-контрастного изображения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-51-53005-ГФЕН-а) и Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (проект 02.а03.21.0005).

Теоретической основой компьютерной томографии (КТ) являются соотношения

$$\frac{I(L)}{I_0} = \exp\{-\mu T(L)\}, \quad T(L) = \int_L m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь L — луч визирования, по которому распространяется излучение, I_0 — начальная интенсивность падающего по прямой L рентгеновского луча, $I(L)$ — интенсивность этого луча после прохождения образца, $T(L)$ — томографическая проекция тела по направлению L , $m(\mathbf{x})$ — коэффициент поглощения рентгеновских лучей в точке $\mathbf{x}$ исследуемого тела. Параметр μ — это коэффициент ослабления излучения, использованный ранее в работах [1–3]. Там он считается постоянным, и мы применяем это допущение ниже, взяв из этих работ конкретное значение параметра. Схема томографического исследования обычно выглядит так. Для некоторого набора прямых L измеряются величины I_0 , $I(L)$. По ним вычисляются проекции $T(L)$. Затем по найденным проекциям из интегрального уравнения $T(L) = \int_L m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ находится функция $m(\mathbf{x})$, определяющая внутреннюю структуру исследуемого образца.

Всё это верно без учёта дифракционных эффектов при томографических измерениях. Рассмотрим их на примере параллельной томографической схемы (см. рис. 1, а).

На рис. 1, а показано несколько параллельных лучей, направленных под углом θ к некоторой оси, а также две плоскости 1 и 2, перпендикулярных этим лучам. В этих плоскостях должны регистрироваться томографические проекции. Идеальным вариантом является положение плоскости регистрации вблизи исследуемого объекта (плоскость 1). Однако на практике по техническим причинам приходится это делать на плоскости 2, удалённой на некоторое расстояние R_2 от плоскости 1. Поэтому при прохождении излучения от плоскости 1 к плоскости 2 происходит искажения интенсивности, связанное с набегом фазы (см. [1, с. 34]), в данные $T(L)$ для интегрального уравнения вносятся возмущения, и это в итоге может выражаться в существенных ошибках решения этого уравнения.

Аналогичные эффекты возникают и в конической схеме томографии (рис. 1, б). Дифракционная картина томографических проекций здесь также искажается, и это выражается, в частности, именно в недостаточном контрасте. Таким образом, необходима коррекция фазы для получения качественных томографических проекций. Этому направлению исследований посвящена обширная литература, из которой отметим следующие исследования обзорного характера [1–3].

Рис. 1. Коррекция фазы в различных схемах томографии:
(а) в параллельной схеме; (б) в конусной схеме

В основе коррекции фазы лежит так называемое уравнение переноса интенсивности излучения. Следуя, например, работе [1], рассмотрим его для конической схемы томографии, изображённой на рис. 1, б. Отмеченные здесь плоскости 1 и 2 перпендикулярны некоторой

оси z , на которой находится источник излучения. Пусть в плоскости 1 при $z = 0$ положение точки задаётся вектором $\mathbf{r}$ (как на рис. 2, a).

Рис. 2. Детализация рис. 1:

- (a) плоскость 1 при $z = 0$ на рис. 1, b , для которой производится коррекция фазы;
 (b) трёхмерная геометрия коррекции фазы в параллельной схеме томографии с рис. 1, a

Обозначим интенсивность прошедшего луча на плоскости 2 при $z = R_2$ как $I(\mathbf{r})$ и будем сначала считать, что эта функция задана для всех $\mathbf{r}$. Подчеркнём, что эта функция координаты $\mathbf{r}$, заданной на плоскости 1 , измеряется на плоскости 2 . Тогда для «исправленной» проекции $T(L)$ — функции $T(\mathbf{r})$ на всей плоскости 1 справедливо уравнение (см. [1]):

$$\left(1 - \frac{R_2 \varepsilon}{\mu} \Delta\right) \exp\{-\mu T(\mathbf{r})\} = \frac{I(\mathbf{r})}{I_0}. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon = \text{Re}(n) - 1$; n — показатель преломления рентгеновских лучей в исследуемом веществе. Коэффициент ε обычно считается постоянным (см., например, [1–3]). При выводе уравнения (1) учитывается фаза проходящего излучения на плоскостях 1 и 2 . С учётом такого «переноса интенсивности», описанная выше схема томографического эксперимента модифицируется следующим образом.

Вводится функция $v(\mathbf{r}) = \exp\{-\mu T(\mathbf{r})\}$. Она находится из уравнения (1) с помощью преобразования Фурье. Затем по $v(\mathbf{r})$ вычисляются исправленные проекции $T(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu} \ln v(\mathbf{r})$, а по ним с помощью стандартных методов решения обратной задачи томографии находится функция $m(\mathbf{x})$. Такой подход применялся в работах [1–3] и др. и давал в рассмотренных там случаях достаточно хорошие результаты.

1. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ ПОДХОД К КОРРЕКЦИИ ФАЗЫ

Однако не всегда можно предполагать, что томографические проекции известны на всей плоскости $z = R_2$. В данной работе мы отказываемся от этого предположения и вместо уравнения (1) на всей плоскости $z = 0$ решаем для него краевую задачу в области G (см. рис. 2, a) — проекции исследуемого образца на плоскость $z = 0$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R_2 \varepsilon}{\mu} \Delta\right) v(\mathbf{r}) &= \frac{I(\mathbf{r})}{I_0}, \quad \mathbf{r} \in G \setminus \partial G, \\ v(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial G} &= v_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь число $v_0 = \exp\{-\mu T_0\}$ определяется фоновым значением проекций T_0 , т. е. интенсивностью, регистрируемой на плоскости $z = R_2$ вне проекции области G . Если считать, что эта интенсивность есть I_0 , то $v_0 = 1$. Область G зависит от формы образца и может быть достаточно сложной (см., например, рис. 2, а). Задача (2) решается на некотором функциональном классе V , адекватном проводимому томографическому исследованию. Допускается возможность поиска слабого решения. В дальнейшем мы предполагаем существование и единственность решения этой задачи в классе V . В случае достаточно гладких данных $I(\mathbf{r})$ для решения задачи (2) можно использовать хорошо известные разностные схемы решения краевых задач для эллиптических уравнений с учётом разреженности матрицы конечномерной аппроксимации краевой задачи (см., например, [4]). Можно также применять для решения задачи (2) различные варианты метода конечных элементов.

Теперь поставим задачу коррекции фазы в параллельной схеме томографии. Трёхмерная геометрия параллельной схемы представлена на рис. 2, б, двумерное сечение этого рисунка при некотором фиксированном z дано на рис. 1, а. В этой схеме для каждого слоя $z = \text{const}$, $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$, объект «просвечивается» лучами в плоскости координат (x, y) . При этом для каждого угла $\theta \in [0, \pi]$ на перпендикулярной лучу плоскости 2, которая удалена от объекта на расстояние R_2 , регистрируется интенсивность излучения $I(p, \theta, z)$. Здесь p , $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$, — прицельный параметр. В итоге такого послойного по z исследования получается функция $I(p, \theta, z)$. Нам нужно скорректировать эту величину, переходя к плоскостям типа 1 (см. рис. 1, а), которые расположены «достаточно близко» к исследуемому объекту. Реально это означает переход к плоскости 1, удалённой от плоскости 2 на R_2 . Задача коррекции фазы в такой схеме означает решение при каждом допустимом угле θ краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R_2 \varepsilon}{\mu} \Delta_{pz}\right) v(p, \theta, z) &= \frac{I(p, \theta, z)}{I_0}, \quad (p, z) \in G \setminus \partial G, \\ v(p, \theta, z)|_{(p, z) \in \partial G} &= 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$G = [p_{\min}, p_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}], \quad \Delta_{pz} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функция $I(p, \theta, z)$ измеряется на плоскостях типа 2 для разных θ . Искомая функция $v(p, \theta, z) \in V$ определяется на соответствующих плоскостях типа 1 из задачи (3). Мы будем считать, что плоскости типа 2 параллельны некоторой z -оси исследуемого объекта и находятся от неё на постоянном расстоянии; например, на рис. 1, а в проекции на плоскость O_{xy} они равноудалены от центра квадрата. Плоскости типа 1 находятся на постоянном расстоянии R_2 от плоскостей 2 независимо от угла θ . В итоге, решая краевую задачу (3) для различных z , мы получим вместо искажённых набегом фазы величин $I(p, \theta, z)/I_0$ скорректированную функцию $v(p, \theta, z)$, по которой найдём для каждого допустимого z скорректированные томографические проекции $T(p, \theta, z) = -\frac{1}{\mu} \ln v(p, \theta, z)$ и далее послойно по z найдём по ним функцию $m(x, y, z)$ из основного уравнения томографии

$$T(p, \theta, z) = \iint_{\mathbb{R}_{xy}^2} m(x, y, z) \bar{\delta}(x \cos \theta + y \sin \theta - p) dx dy. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\delta}(\cdot)$ — δ -функция.

В некоторых случаях приходится решать томографическую задачу только для одного разреза образца, т. е. считать $z = \text{const}$. Тогда в процедуре коррекции фазы можно полагать, что проекции $T(p, \theta, z)$ и искомая функция $v(p, \theta, z)$ в уравнении из (3) не зависят от z . Соответственно, краевая задача (3) становится одномерной по переменной p и параметрической по

величине θ :

$$\left(1 - \frac{R_2 \varepsilon}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) v(p, \theta) = \frac{I(p, \theta)}{I_0}, \quad p_{\min} < p < p_{\max}, \quad (5)$$

$$v(p_{\min}, \theta) = v(p_{\max}, \theta) = 1.$$

Задачи такого рода в случае достаточно гладких данных хорошо решаются методом прогонки [5]. Решив задачу (5) для всех допустимых углов θ , мы снова сможем найти скорректированные проекции.

2. КУСОЧНО-РАВНОМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ТОМОГРАФИИ

Запишем интегральные уравнения (4), зависящие от параметра z , в однотипном операторном виде $\mathcal{A}m = u$. Здесь $\mathcal{A}$ — интегральный оператор в формуле (4), действующий из некоторого подходящего банахова пространства Z в банахово пространство U томографических проекций. Обозначим решение этого уравнения как $\bar{m} \in Z$ и будем считать, что оно единственно. Выбор пространства Z определяется имеющейся априорной информацией об искомым решении. Обычно правая часть уравнения (4) известна с ошибкой, т. е. вместо функций $u = T(p, \theta, z)$ известны экспериментально найденные проекции $u_\delta = T_\delta(p, \theta, z) \in U$ такие, что $\|u(\theta, r, z) - u_\delta(\theta, r, z)\| \leq \delta$ для каждого допустимого z . Число δ — оценка ошибки данных считается известным. Кроме того, ядро $\bar{\delta}(x \cos \theta + y \sin \theta - p)$ уравнения (4) часто заменяется в расчётах на $K_h(\theta, r, x, y) = \delta_h(x \cos \theta + y \sin \theta - r)$, где δ_h — семейство гладких функций, аппроксимирующих δ -функцию. Тогда вместо точного операторного уравнения $\mathcal{A}m = u$ мы имеем дело с уравнением $\mathcal{A}_h m = u_\delta$, в котором $\mathcal{A}_h$ есть интегральный оператор вида (4) с ядром $K_h(\theta, r, x, y)$. Число $h > 0$ определяет точность задания оператора следующим образом: $\|\mathcal{A}_h m - \mathcal{A}m\|_U \leq h$ для любых $m \in Z$. Обозначим $\eta = (h, \delta)$ и будем предполагать, что $h \ll \delta$. Последнее достигается подходящим выбором семейства $\delta_h(\cdot)$.

Уравнение $\mathcal{A}_h m = u_\delta$ может быть решено с помощью различных регуляризующих алгоритмов [6–12]. Мы использовали метод регуляризации Тихонова. В нём приближённое решение ищется в виде $m^{\alpha(\eta)} \in Z$, где

$$m^\alpha = \arg \min \{ \alpha \Omega(m) + \|\mathcal{A}_h m - u_\delta\|_U^2 \mid m \in Z \}, \quad (6)$$

$\Omega(m)$ — регуляризующий функционал, $\alpha = \alpha(\eta) > 0$ — значение параметра регуляризации, которое находится специальным образом, например, по принципу невязки или его обобщениям [8–10, 12]. Регуляризующий функционал выбирается так, чтобы обеспечивался требуемый тип сходимости приближённых решений $m^{\alpha(\eta)}$ к точному при $\eta \rightarrow 0$. В задачах томографии, когда двумерные сечения решения $m(x, y, z)$ при фиксированных z могут быть кусочно-непрерывными, часто требуется получить кусочно-равномерную сходимость. Тогда при малых η гарантируется равномерная близость приближённого и точного решения в замкнутых областях непрерывности последнего. Метод регуляризации будет гарантировать такую сходимость, если априорно известно, что точное решение $\bar{m}(x, y, z)$ принадлежит при каждом z пространству $Z = \mathcal{VH}$ функций двух переменных с ограниченной VH -вариацией. Это пространство введено в работах [13–15] на основе обобщения понятия функции нескольких переменных с ограниченной вариацией типа Харди — Краузе. Функции из пространства $\mathcal{VH}$ могут быть кусочно-непрерывными, и это позволяет использовать их в методе регуляризации при решении обратных задач томографии. Оказывается, что их применение позволяет с хорошей точностью реконструировать кусочно-непрерывные решения вне малых окрестностей линий разрыва и контрастно выделять эти линии. Если предположить, что при каждом z функции двух переменных $m(x, y, z) \in \mathcal{VH}$, включая точное решение $\bar{m}(x, y, z) \in \mathcal{VH}$, определены в одном и том же прямоугольнике $\Pi = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$, причём $m(x, y, z) = 0$ на границе

$\partial\Pi$, то достаточно взять регуляризующий функционал в виде VH -вариации функции двух переменных $m(x, y, z)$ при фиксированном z . Тогда метод регуляризации будет обеспечивать кусочно-равномерную сходимость $m^{\alpha(\eta)}(x, y, z) \rightarrow \bar{m}(x, y, z)$ при $\eta \rightarrow 0$ для каждого z . Детали этого подхода и соответствующие вычислительные алгоритмы описаны в работах [13, 15, 16] и здесь для краткости не рассматриваются.

3. КОРРЕКЦИЯ ФАЗЫ ПРИ КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО СЕЧЕНИЯ

Приведём результаты численных экспериментов по коррекции фазы в томографических проекциях с кусочно-равномерной регуляризацией искомого томографического изображения. В этих примерах считалось, что имеется только один разрез образца. Поэтому для коррекции фазы использовалась задача (5) из разд. 2, которая решалась методом прогонки. В расчётах принималось, что изображения имеют размер 1×1 и были использованы следующие безразмерные параметры, оценённые из приведённых в работах [1–3, 16] типичных размерных величин: $R_2\varepsilon/\mu = 0,0005$, $\mu = 0,8$. Томографические проекции рассматривались для переменных θ , p на сетках размера 180×683 , а томографические изображения были найдены на сетке размера 683×683 .

Сначала рассмотрим стандартную тестовую задачу с решением в виде фантома Шеппа — Логана (рис. 3), не зависящего от z .

Рис. 3. Сравнение различных решений первой обратной задачи:

- (а) точное решение; (б) приближенное решение, найденное по точным томографическим проекциям (на плоскостях типа 1); (в) приближенное решение, найденное по томографическим проекциям на плоскостях типа 2 без коррекции фазы; (г) приближенное решение, найденное после коррекции фазы

На рис. 4, *а* показана истинная томографическая проекция этого объекта (на плоскостях типа 1). Рис. 4, *б* изображает искажённую набегом фазы проекцию на плоскостях типа 2; рис. 4, *в* содержит скорректированные проекции, полученные путём решения краевой задачи (5). Для всех этих трёх типов проекций была решена обратная томографическая задача с кусочно-равномерной регуляризацией. Результаты их решения даны на рис. 3, *б–г*. Видно, что решение для проекции, искажённой фазовым набегом (рис. 3, *в*), хуже разрешает мелкие детали и менее контрастно, чем решение для точной и скорректированной проекции. При этом решение для скорректированной проекции мало отличается от полученного по точной проекции.

Рис. 4. Томографические проекции для фантома Шеппа — Логана:
(*а*) истинные проекции; (*б*) проекции с набегом фазы; (*в*) проекции с коррекцией фазы

Более детальная информация представлена в табл. 1.

Таблица 1

Точности данных и точности полученных изображений (к рис. 3)

Рис. 3	(б)	(в)	(г)
δ	0	0,041	0,017
Δ_2	0,1254	0,6032	0,1316

В ней первая строка содержит наименование рисунка, на котором представлено результирующее томографическое изображение. Строка δ содержит относительную ошибку дискретных томографических проекций (матриц), используемых для решения обратной задачи на сетках переменных (p, θ) . Эта величина вычисляется как $\delta = \frac{\|T_{\text{ex}} - T_{\text{appr}}\|_2}{\|T_{\text{ex}}\|_2}$, где T_{ex} — матрица проекции, вычисленная по точному решению задачи m_{ex} (рис. 3, *а*), T_{appr} — приближённый

ная матрица проекции, используемая для решения обратной задачи. В случае (б) это точная проекция, в случае (в) — проекция без коррекции фазы, а в случае (г) — скорректированная проекция. В строке Δ_2 помещены относительные точности полученных изображений: $\Delta_2 = \frac{\|m_{\text{ex}} - m_{\text{appr}}\|_2}{\|m_{\text{ex}}\|_2}$. Здесь m_{appr} — приближённые решения обратной задачи, вычисленные по точной проекции в случае б), по проекции без коррекции в случае (в) и по скорректированной проекции в случае (г).

Теперь рассмотрим обратную задачу томографии с модельным решением, представляющим собой срез образца нефтеносного сланца [17]. Исследование таких образцов представляет большой интерес для геофизики. В этих обратных задачах весьма существенным является восстановление тонкой структуры пор образца, и здесь актуальна именно кусочно-равномерная регуляризация обратной задачи. Снова считаем, что срез единственный, и поэтому не зависит от z . На рис. 5, а приведено точное решение задачи; рис. 5, б–г представляют приближённые решения, найденные по истинной проекции, нескорректированной проекции и по проекции с коррекцией соответственно.

Рис. 5. Сравнение различных решений второй обратной задачи:

- (а) точное решение; (б) приближенное решение, найденное по точным томографическим проекциям (на плоскостях типа 1); (в) приближенное решение, найденное по томографическим проекциям на плоскостях типа 2 без коррекции фазы; (г) приближенное решение, найденное после коррекции фазы

Сами проекции показаны на рис. 6. Для коррекции фазы и решения обратной задачи использовались те же сетки, что и в предыдущем примере.

Детализированная информация по результатам приведена в табл. 2 в том же порядке, как и в табл. 1. Приведённые в табл. 2 значения ошибок решения показывают его улучшение при коррекции фазы.

Рис. 6. Томографические проекции образца сланца: (а) истинные проекции; (б) проекции с набегом фазы; (в) проекции с коррекцией фазы

Таблица 2

Точности данных и точности полученных изображений (к рис. 5)

Рис. 5	(б)	(в)	(г)
δ	0	0,017	0,004
Δ_2	0,052	0,061	0,014

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами этой работы являются: 1) постановка задачи коррекции фазы для образца конечного размера в конической схеме томографии; 2) постановка задачи коррекции фазы в параллельной томографической схеме в трёхмерном и двумерном случаях; 3) методика решения этих задач, основанная на разностных схемах и методе конечных элементов; 4) апробирование предложенной методики в случае единственного сечения образца; 5) сравнительное использование скорректированных и не скорректированных данных при кусочно-равномерной регуляризации обратных задач томографии в модельном и практическом случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paganin D., Mayo S. C., Gureyev T. E., Miller P. R., Wilkins S. W. Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object // J. Microscopy. 2001. V. 206, P. 33–40.
2. Mayo S. C., Davis T. J., Gureyev T. E., Miller P. R., Paganin D., Pogany A., Stevenson A. W.,

- Wilkins S. W. X-ray phase-contrast microscopy and microtomography. // Optics Express. 2003. V. 11, N 19. P. 2289-2302.
3. Beltran M. A., Paganin D. M., Uesugi K., and Kitchen M. J. 2D and 3D X-ray phase retrieval of multi-material objects using a single defocus distance. // Optics Express. 2010. V. 18, N 7. P. 6423-6436.
 4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
 5. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
 6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
 7. Иванов В. К., Васин В. В., Тихонов В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.
 8. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
 9. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
 10. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995; М.: Курс, 2017.
 11. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A., Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
 12. Леонов А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
 13. Леонов А. С. Функции нескольких переменных с ограниченной вариацией в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 9. С. 35–49.
 14. Леонов А. С. Замечания о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 1. С. 69–80.
 15. Leonov A. S. Numerical piecewise-uniform regularization for two-dimensional ill-posed problems // Inverse Probl. 1999. V. 15. P. 1165–1176.
 16. Leonov A. S., Wang Y., Yagola A. G. Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate // Inverse Probl. Sci. Engrg. 2019. V. 27. P. 1–11.
 17. Wang Y. F., Fan S. F., Leonov A. S., Lukyanenko D. V., Yagola A. G., Wang L. H., Wang Yu, Wang J. Q. Non-smooth regularization and fast optimization algorithm for micropore reconstruction of shale // Chinese J. Geophysics, 2019. V. 63, N 5. P. 2036-2042.

UDC 519.632.4:519.642

ON PHASE CORRECTION IN TOMOGRAPHIC RESEARCH

© 2020 Ya. Wang^{1a}, A. S. Leonov^{2b}, D. V. Lukyanenko^{3c}, V. D. Shinkarev³,
A. G. Yagola^{3d}¹Key Laboratory of Petroleum Resources Research, Institute of Geology and Geophysics,
Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 9825, Beijing 100029, P. R. China,²National Research Nuclear University (MEPhI),
Kashirskoye sh. 31, Moscow 115409, Russia,³Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory, Moscow 119991, RussiaE-mails: ^ayfwang@mail.iggcas.ac.cn, ^basleonov@mephi.ru,
^clukyanenko@physics.msu.ru, ^dyagola@physics.msu.ru

Received 01.06.2020, revised 10.08.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. Under consideration is the problem of improving the contrast of the image obtained by processing tomographic projections with phase distortion. The study is based on the well-known intensity transfer equation. Unlike other works, this equation is solved in a bounded region of variation of the tomographic parameters. In a domain, a boundary value problem is posed for the intensity transfer equation which is then specialized for a three-dimensional parallel tomographic scheme. The case of two-dimensional tomography is also considered, together with the corresponding boundary value problem for the intensity transfer equation. We propose numerical methods for solving the boundary value problems of phase correction. The results are given of the numerical experiments on correction of tomographic projections and reconstruction of the structure of the objects under study (in particular, a slice of a geological sample) by using piecewise uniform regularization.

Keywords: tomography, phase correction, intensity transfer, regularization, ill-posed problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.402

REFERENCES

1. Paganin D., Mayo S.C., Gureyev T.E., Miller P.R., Wilkins S. W. Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object. *J. Microscopy*, 2001, Vol. 206, pp. 33–40.
2. Mayo S.C., Davis T.J., Gureyev T.E., Miller P.R., Paganin D., Pogany A., Stevenson A.W., Wilkins S.W. X-ray phase-contrast microscopy and microtomography. *Optics Express*, 2003, Vol. 11, No. 19, pp. 2289–2302.
3. Beltran M.A., Paganin D.M., Uesugi K., and Kitchen M.J. 2D and 3D X-ray phase retrieval of multi-material objects using a single defocus distance. *Optics Express*, 2010, Vol. 18, No. 7, pp. 6423–6436.
4. Samarskii A.A. Introduction to the theory of difference schemes. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
5. Kalitkin N.N. Numerical methods. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Method of solving ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
7. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear ill-posed problems and its application. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).

8. Morozov V.A. Regular methods of solving ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
9. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical methods of solving ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
10. Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. Nonlinear ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1995; Moscow: Kurs, 2017.
11. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A., Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
12. Leonov A.S. Solution of ill-posed inverse problems. An outline of the theory, practical algorithms, and demonstrations by MATLAB. Moscow: LIBROKOM, 2009 (in Russian).
13. Leonov A.S. Functions of several variables of bounded variation in the ill-posed problems. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1996, Vol. 36, No. 9, pp. 35–49.
14. Leonov A.S. Some remarks on complete variation of functions of several variables and a multidimensional analog of Helly's choice principle. *Mat. Zametki*, 1998, Vol. 63, No. 1, pp. 69–80 (in Russian).
15. Leonov A.S. Numerical piecewise-uniform regularization for two-dimensional ill-posed problems. *Inverse Problems*, 1999, Vol. 15, pp. 1165–1176.
16. Leonov A.S., Wang Y., Yagola A.G. Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2019, Vol. 27, pp. 1–11.
17. Wang Y.F., Fan S.F., Leonov A.S., Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Wang L.H., Wang Yu, Wang J.Q. Non-smooth regularization and fast optimization algorithm for micropore reconstruction of shale. *Chinese J. Geophysics*, 2019, Vol. 63, No. 5, pp. 2036–2042.