Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. L. Karchevsky, Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 48–68

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.404>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.93.64.190

April 26, 2023, 17:52:09

УДК 519.624.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЛЮБОГО ВИДА

© 2020 А. Л. Карчевский

¹ *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: karchevs@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.06.2020 г.; после доработки 31.07.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Получено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида. Вычисления для получения решения сводятся к сложению, умножению и обращению квадратных матриц второго порядка. Формулы получены в таком виде, при использовании которых при послойном пересчёте ошибка округления не накапливается, поскольку экспоненты, содержащиеся в некоторых выражениях, имеют показатели, действительные части которых неположительны.

Ключевые слова: уравнение поперечных колебаний балки, метод послойного пересчёта.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.404

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий.

Под термином кусочно-однородный понимается, что функция жёсткости при изгибе балки и функция интенсивности массы балки являются кусочно-постоянными. Работа [1] является хорошим и обширным обзором, посвящённым задачам о колебаниях неоднородных балок — составных, переменного сечения, с неоднородными параметрами вследствие неравномерного прогрева и т. д. Для нахождения функции прогиба неоднородной балки в основном применяются различные методы: конечно-разностный, конечных элементов и различные приближенные методы. При использовании данных методов, как правило, численные программы требуют значительного времени для вычислений, что препятствует их применению для решения обратных задач оптимизационным методом. В настоящей работе получены достаточно простые аналитические выражения для кусочно-однородной балки, которые позволяют получить решение точно и быстро, что может дать возможность численно решать обратные задачи, возникающие в этой области.

Для получения выражений был использован метод послойного пересчёта. Первый подобный алгоритм, пригодный для машинной реализации, был предложен в работе [2], однако в некоторых случаях его использование было ограничено из-за накопления ошибок округления при послойном пересчёте, поскольку выражения содержали экспоненты, действительные части показателей которых были положительными. Данный недостаток был исправлен в работах [3, 4]. Был предложен метод послойного пересчёта, суть которого заключалась в сведении решения дифференциального уравнения второго порядка к решению дифференциального

уравнения Риккати. Данный подход позволил получить для расчётов выражения, в которых отсутствовали экспоненты, действительные части показателей которых были положительными. Это не приводило к накоплению ошибок округления при послойном пересчёте. Далее алгоритм был развит в работах [5–14], где применялся уже к системам дифференциальных уравнений второго порядка и приходилось решать дифференциальное матричное уравнение Риккати. Данный подход позволил создавать быстрые алгоритмы решения прямой задачи.

В данной работе метод послойного пересчёта применён к дифференциальному уравнению четвёртого порядка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки под действием точечной нагрузки

$$(r(z) \mathbf{u}'')'' + m(z) \ddot{\mathbf{u}} = f(t) \delta(z).$$

Здесь штрих и точка обозначают производные по пространственной переменной z и временной переменной t соответственно, $r(z)$ — жёсткость при изгибе балки, $m(z)$ — интенсивность массы балки. Под термином кусочно-однородный понимаем то, что функции $r(z)$ и $m(z)$ являются кусочно-постоянными. Поскольку $r(z) = EJ$ и $m = \rho F$, где E — модуль Юнга, J — момент инерции площади поперечного сечения, ρ — плотность, F — площадь поперечного сечения, то кусочно-постоянными функциями могут быть любые из перечисленных.

Целью настоящей работы является получение аналитических выражений для функции $u = u(z, \omega)$, которая является образом Фурье функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z, t)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(r(z) u'')'' - m(z) \omega^2 u = f(\omega) \delta(z). \quad (1)$$

Считаем, что начало координат совпадает с точкой действия нагрузки на балку (см. рисунок), следовательно, $z \in [-l_l, l_r]$, точки разрыва z_k , $k = \overline{-I, J}$; $z_{-I} = -l_l$; $z_J = l_r$. Точка $z_0 = 0$ не совпадает ни с одной точкой разрыва z_k . В точках разрыва действуют условия склейки

$$[u]_{z_k} = 0, \quad [u']_{z_k} = 0, \quad [r u'']_{z_k} = 0, \quad [(r u'')']_{z_k} = 0.$$

Балка и система координат

Поскольку правая часть (1) является δ -функцией, то нетрудно показать, что дифференциальное уравнение (1) эквивалентно этому же однородному уравнению с условиями склейки в точке $z_0 = 0$:

$$[u]_{z_0} = 0, \quad [u']_{z_0} = 0, \quad [r u'']_{z_0} = 0, \quad [(r u'')']_{z_0} = f(\omega).$$

Далее требуется рассматривать два случая: 1) $\omega \neq 0$, 2) $\omega = 0$.

2. СЛУЧАЙ $\omega \neq 0$

2.1. Переформулировка постановки задачи

Для удобства рассмотрим функцию $v(z, \omega) = r(z)u''(z, \omega)$ и следующие обозначения для вектор-столбцов и матрицы:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/r \\ m\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ell_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Функция $v(z, \omega)$ является изгибающим моментом в точке z .

Суммируя вышесказанное, от уравнения (1) переходим к следующей дифференциальной матричной постановке

$$U'' = AU, \tag{2}$$

$$[U]_{z_k} = 0, \quad [U']_{z_k} = 0, \quad k = \overline{-I+1, J-1}, \quad k \neq 0, \tag{3}$$

$$[U]_{z_0} = 0, \quad [U']_{z_0} = f(\omega)\ell_2. \tag{4}$$

Для того чтобы определить U однозначно, к соотношениям (2)–(4) необходимо добавить краевые условия на концах балки, т. е. должны быть поставлены краевые условия в точках $z = -l_l$ и $z = l_r$.

Ниже будут рассмотрены условия шарнирного закрепления, жёсткой заделки, свободный конец, упругоопёртый конец и точечный груз на конце. Для этих условий будут получены аналитические выражения для вектор-столбца U и будет показано, как получить данные аналитические выражения, когда на разных концах балки поставлены различные типы краевых условий.

2.2. Предварительные построения

Условимся писать нижний индекс у кусочно-постоянной функции или матрицы, элементами которой являются кусочно-постоянные функции, например, m_k или A_k . Данный нижний индекс означает, что значение кусочно-постоянной функции берётся из интервала $[z_{k-1}, z_k]$.

Обозначим $h_k = z_k - z_{k-1}$.

2.2.1. Решение уравнения $R^2 = A$ и вычисление матричной экспоненты. Известно (см., например, [15]), что существует четыре различных матрицы R , удовлетворяющих матричному уравнению $R^2 = A$. Собственными числами матрицы R будут корни из собственных чисел матрицы A : $\mu_1 = \omega\sqrt{m/r}$ и $\mu_2 = -\omega\sqrt{m/r}$, откуда получаем, что собственными числами матрицы R могут быть следующие пары чисел: $(\lambda, i\lambda)$, $(-\lambda, -i\lambda)$, $(\lambda, -i\lambda)$ и $(-\lambda, i\lambda)$, где $\lambda = \sqrt{\omega^4 m/r}$ и i — мнимая единица.

Для дальнейших рассмотрений нам нужны только два решения R_+ и R_- , у которых собственными числами является первая и вторая пара соответственно.

Получим выражение для матрицы R_+ . Во-первых, имеем равенство $R_+^2 = A$, во-вторых, матрица R_+ должна удовлетворять своему характеристическому уравнению

$$R_+^2 - (\lambda + i\lambda)R_+ + i\lambda^2 E = 0.$$

Откуда, как легко видеть, следует $R_+ = \frac{1}{\lambda(1+i)}(A + i\lambda^2 E)$. Для матрицы R_- аналогично получаем $R_- = -\frac{1}{\lambda(1+i)}(A + i\lambda^2 E)$. Таким образом, везде ниже под матрицей R будем понимать матрицу R_+ , и, как нетрудно видеть, $R_- = -R$.

Приведём выражение для вычисления матричной экспоненты, воспользовавшись результатом [16]. В нашем случае имеем следующее соотношение:

$$e^{Rz} = Ee^{\lambda z} + \frac{e^{\lambda z} - e^{i\lambda z}}{\lambda(1-i)}(R - \lambda E).$$

2.2.2. Решения соответствующих матричных уравнений. Введём матрицу S и вектор-столбец L , которые связаны с вектор-столбцом U соотношением

$$U' = SU + L. \quad (5)$$

Подставим (5) в (2) и получим, что они удовлетворяют следующим дифференциальным матричным уравнениям:

$$S' + S^2 = A, \quad L' + SL = 0. \quad (6)$$

Условия склейки (3) позволяют положить

$$[S]_{z_k} = 0, \quad [L]_{z_k} = 0. \quad (7)$$

Получим решения этих матричных уравнений. Исходя из опыта предыдущих работ [11, 14] получим эти выражения в виде, который позволяет вычислять их без накопления ошибок округления. Другими словами, полученные выражения должны содержать матричные экспоненты, у которых в показателе находятся матрицы с собственными числами, у которых действительные части неположительные.

Построим решение S дифференциального матричного уравнения Риккати (6) на интервале $[z_{k-1}, z_k]$. Будем считать, что известное краевое условие находится в точке z_k . С целью получения выражения для вычисления S сделаем ряд замен:

$$\begin{aligned} S &= Y + R_k, \quad \text{где матрица } Y \text{ удовлетворяет уравнению } Y' + Y^2 + R_k Y + Y R_k = 0; \\ Z &= Y^{-1}, \quad \text{где матрица } Z \text{ удовлетворяет уравнению } Z' = R_k Z + Z R_k + E; \\ Z &= W - \frac{1}{2}R_k, \quad \text{где матрица } W \text{ удовлетворяет уравнению } W' = R_k W + W R_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее матричное уравнение имеет решение $W = e^{R_k(z-z_k)} W^k e^{R_k(z-z_k)}$, где $W^k = W|_{z=z_k-0}$.

Возвращаясь по цепочке замен назад, получим

$$S(z) = [e^{R_k(z-z_k)} ((S^k - R_k)^{-1} + R_k^{-1}/2) e^{R_k(z-z_k)} - R_k^{-1}/2]^{-1} + R_k, \quad (9)$$

здесь $S^k = S|_{z=z_k}$ (в силу условий склейки $S|_{z=z_k+0} = S|_{z=z_k-0}$).

Заметим, что выражение (9) вычисляется устойчиво для любого $z \in [z_{k-1}, z_k]$, так как устойчиво вычисляются матричные экспоненты, поскольку действительные части собственных чисел матрицы $(z - z_k)R_k$ неположительны (см. построение матрицы R в п. 2.2.1).

Если будем считать, что известное краевое условие находится в точке z_{k-1} , то для построения устойчивого для вычислений выражения матрицы S нужно сделать замену:

$$S = Y - R_k, \quad \text{где матрица } Y \text{ удовлетворяет уравнению } Y' + Y^2 - R_k Y - Y R_k = 0, \quad (10)$$

и далее аналогично по цепочке замен. После этого аналогично получим решение S в виде

$$S(z) = [e^{-R_k(z-z_{k-1})} ((S^{k-1} + R_k)^{-1} - R_k^{-1}/2) e^{-R_k(z-z_{k-1})} + R_k^{-1}/2]^{-1} - R_k. \quad (11)$$

Заметим, что выражение (11) так же вычисляется устойчиво для любого $z \in [z_{k-1}, z_k]$, поскольку действительные части собственных чисел матрицы $-(z - z_{k-1})R_k$ неположительны.

Таким образом, получены выражения для устойчивого вычисления матрицы S справа-налево (9) и слева-направо (11).

Получим выражения для устойчивого вычисления вектор-столбца L (см. (6)) на интервале $[z_{k-1}, z_k]$, пусть известное краевое условие находится в точке z_k .

Решение для вектор-столбца L ищется с помощью матрицанта Q , который есть решение задачи

$$Q' + SQ = 0, \quad Q|_{z=z_k} = Q^k, \quad (12)$$

где $L = Q^k L^k$ и $L^k = L|_{z=z_k}$.

Нетрудно видеть, матрица $G = Q^{-1}$ удовлетворяет следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$G' - GS = 0 \quad \text{или} \quad G' - G(Y + R_k) = 0. \quad (13)$$

Умножим слева уравнение (8) на G , умножим справа уравнение (13) на Y и сложим, получим $(GY)' + (GY)R_k = 0$, решение которого имеет вид $GY = (GY)|_{z=z_k} e^{-R_k(z-z_k)}$. Отсюда получаем

$$Q(z) = (S(z) - R_k) e^{R_k(z-z_k)} (S^k - R_k)^{-1} Q^k. \quad (14)$$

Если известное краевое условие находится в точке z_{k-1} , тогда матрица G удовлетворяет уравнению

$$G' - GS = 0 \quad \text{или} \quad G' - G(Y - R_k) = 0, \quad (15)$$

Умножим слева уравнение (10) на G , умножим справа уравнение (15) на Y и сложим, в результате получим уравнение $(GY)' - (GY)R_k = 0$, решение которого имеет вид $GY = (GY)|_{z=z_{k-1}} e^{R_k(z-z_{k-1})}$. Отсюда получаем

$$Q(z) = (S(z) + R_k) e^{-R_k(z-z_{k-1})} (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1}. \quad (16)$$

Заметим, что выражения (14) и (16) вычисляются устойчиво для любого $z \in [z_{k-1}, z_k]$, поскольку действительные части собственных чисел матриц $(z - z_k)R_k$ и $-(z - z_{k-1})R_k$ неположительны.

Когда матрицы S и L известны, можно найти решение матричного уравнения (5). Будем искать решение на интервале $[z_{k-1}, z_k]$. Если матрицы S и L вычислялись с помощью счёта слева-направо, то уравнение (5) должно решаться справа-налево, т. е. начальное условие должно быть поставлено в точке z_k .

С дифференциальным уравнением (5) для вектор-столбца U связано дифференциальное уравнение для матрицанта W :

$$W' = SW + Q = (Y - R_k)W + Q. \quad (17)$$

Умножим слева уравнение (10) на W , умножим справа уравнение (17) на Y и сложим, получим $(YW)' - R_k(YW) = YQ$, решение которого можно записать в виде

$$YW = e^{R_k(z-z_k)} (YW)|_{z=z_k} + \int_{z_k}^z e^{R_k(z-s)} Y(s) Q(s) ds.$$

Используя (16), получим

$$(S(z) + R_k)W(z) = e^{R_k(z-z_k)} (S^k + R_k)W^k + \int_{z_k}^z e^{R_k(z-s)} Y^2(s) e^{-R_k(s-z_{k-1})} ds (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1}.$$

Заменим Y^2 , используя уравнение (10), тогда

$$\begin{aligned}
 (S(z) + R_k)W(z) &= e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)W^k \\
 &\quad - \int_{z_k}^z e^{R_k(z-s)}(Y' - RY - YR)e^{-R_k(s-z_{k-1})} ds (S^{k-1} + R_k)^{-1}Q^{k-1} \\
 &= e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)W^k + \int_z^{z_k} \frac{d}{ds}(e^{R_k(z-s)}Y(s)e^{-R_k(s-z_{k-1})}) ds (S^{k-1} + R_k)^{-1}Q^{k-1} \\
 &= e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)W^k + (e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)e^{-R_k h_k} \\
 &\quad - (S(z) + R_k)e^{-R_k(z-z_{k-1})})(S^{k-1} + R_k)^{-1}Q^{k-1}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Если матрицы S и L искались с помощью счёта справа-налево, то уравнение (5) должно решаться слева-направо, т. е. начальное условие должно быть поставлено в точке z_{k-1} . Аналогично приведённым действиям получим

$$\begin{aligned}
 (S(z) - R_k)W(z) &= e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)W^{k-1} + (e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)e^{-R_k h_k} \\
 &\quad - (S(z) - R_k)e^{R_k(z-z_k)})(S^k - R_k)^{-1}Q^k. \quad (19)
 \end{aligned}$$

2.3. Модельные постановки задач

Здесь будут приведены несколько модельных постановок задач. Например, постановка задачи, когда оба конца балки имеет шарнирное опирание или жёсткую заделку. Очевидно, что практика не исчерпывается такого рода задачами, например, интересный случай представляет консольная балка, где один конец жёстко заделан, второй конец – свободный. Тем не менее, примеры модельных задач помогут понять, как построить аналитические формулы для балки, у которой на различных концах поставлены различные краевые условия. Таким образом, можно будет получить решение для любого вида краевых условий на разных концах балки.

Обозначим

$$O_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.1. Модельная задача 1. Оба конца балки шарнирно закреплены. Шарнирному закреплению концов балки соответствуют следующие краевые условия:

$$u|_{z=-l_l} = 0, \quad u''|_{z=-l_l} = 0, \quad u|_{z=l_r} = 0, \quad u''|_{z=l_r} = 0. \quad (20)$$

В случае матричной постановки условия (20) можно переписать в следующем виде:

$$U|_{z=-l_l} = 0, \quad U|_{z=l_r} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, имеем задачу (2)–(4), (21).

Для получения аналитических выражений для вектор-столбца U в любой точке балки послойный пересчёт будет организован следующим образом.

1. На интервале $[0, l_r]$ решения матричных уравнений (6) будет вестись слева-направо, а решение уравнения (5) – справа-налево.

2. На интервале $[-l_l, 0]$ решения матричных уравнений (6) будет вестись справа-налево, а решение уравнения (5) – слева-направо.

Разберём подробно построение решения на интервале $[0, l_r]$.

Положим $S|_{z=+0} = -R_1$, тогда, используя формулы (11) и условия склейки (7), можно вычислить $S(z)$ в любой точке z и в частности S^k , $k = \overline{1, J}$. Используя формулы (16), учитывая условия склейки (7) и $Q|_{z=+0} = E$, можно вычислить $Q(z)$ в любой точке z и, в частности, Q^k , $k = \overline{1, J}$; $L(z) = Q(z)L_r$ в любой точке z ($L_r \equiv L|_{z=+0}$). Начальное значение L_r будет определено позже.

Итак, S^k и Q^k , $k = \overline{1, J}$, известны. В соотношении (18) положим $z = z_{k-1}$, получим

$$W^{k-1} = (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) W^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1}.$$

Если умножить данное равенство на L_r слева, то получим

$$U^{k-1} = (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) U^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} L_r. \quad (22)$$

Учитывая, что $U^J = 0$, получим, что $U^{J-1} = P_r^{J-1} L_r$, т. е. двигаясь рекуррентно от $J-1$ до 0, получим $U^k = P_r^k L_r$, где матрицы P_r^k рассчитываются по рекуррентным формулам, которые будут приведены ниже.

Теперь разберём построение решения на интервале $[-l_l, 0]$ подробно.

Положим $S|_{z=-0} = R_0$. Тогда, используя формулы (9) и условия склейки (7), можно вычислить $S(z)$ в любой точке z и, в частности, S^k , $k = \overline{-1, -I}$. Используя формулы (14), учитывая условия склейки (7) и $Q|_{z=-0} = E$, можно вычислить $Q(z)$ в любой точке z и, в частности, Q^k , $k = \overline{-1, -I}$. Очевидно, что $L(z) = Q(z)L_l$ в любой точке z ($L_l \equiv L|_{z=-0}$). Начальное значение L_l будет определено позже.

Замечание. В силу принятых обозначений $R_0 = R_1$, поскольку на интервале $[z_{-1}, z_1]$ функции $m(z)$, $r(z)$ и связанные с ними кусочно-постоянные функции не рвутся.

Итак, S^k и Q^k , $k = \overline{0, -I}$, известны. В соотношении (19) положим $z = z_k$, получим

$$W^k = (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) W^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k.$$

Если умножить данное равенство на L_l слева, то получим

$$U^k = (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) U^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k L_l. \quad (23)$$

Учитывая, что $U^{-I} = 0$, получим, что $U^{-I+1} = P_l^{-I+1} L_l$, т. е. двигаясь рекуррентно от $-I+1$ до 0, получим $U^k = P_l^k L_l$, где матрицы P_l^k рассчитываются по рекуррентным формулам, которые будут приведены ниже.

Воспользуемся условиями склейки (4) и полученными равенствами, тогда

$$\begin{aligned} S(+0)U(+0) + L_r &= S(-0)U(-0) + L_l + \ell_2 f(\omega), \\ U(+0) &= U(-0), \\ U(+0) &= P_r^0 L_r, \quad U(-0) = P_l^0 L_l, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда получим выражения для вектор-столбцов L_r и L_l , которые будут приведены ниже.

Таким образом, для вычисления вектор-столбца U проведём предварительные вычисления.

Порядок вычислений 1.

1. Для каждого интервала $[z_{k-1}, z_k]$, $k = \overline{-I+1, J}$, вычисляем

$$\lambda_k = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{m_k/r_k} \quad \text{и} \quad R_k = \frac{1}{\lambda_k(1+i)}(A_k + i\lambda_k^2 E)$$

(см. п. 2.2.1).

2. На интервале $[0, l_r]$:

— вычисляем S^k и Q^k , $k = \overline{1, J}$, рекуррентно:

$$\begin{aligned} S(+0) &\equiv S^0 = -R_1, \\ S^k &= \left[e^{-R_k h_k} ((S^{k-1} + R_k)^{-1} - R_k^{-1}/2) e^{-R_k h_k} + \frac{1}{2} R_k^{-1} \right]^{-1} - R_k, \\ Q^0 &= E, \\ Q^k &= (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} \end{aligned}$$

(см. условия склейки (7), соотношения (11) и (16));

— вычисляем P_r^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$P_r^J = 0,$$

$$\begin{aligned} P_r^{k-1} &= (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) P_r^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1}. \end{aligned}$$

3. На интервале $[-l_l, 0]$:

— вычисляем S^k и Q^k , $k = \overline{0, -I+1}$, рекуррентно:

$$\begin{aligned} S(-0) &\equiv S^0 = R_0, \\ S^{k-1} &= \left[e^{-R_k h_k} ((S^k - R_k)^{-1} + R_k^{-1}/2) e^{-R_k h_k} - \frac{1}{2} R_k^{-1} \right]^{-1} + R_k, \\ Q^0 &= E, \\ Q^{k-1} &= (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} (S^k - R_k)^{-1} Q^k \end{aligned}$$

(см. условия склейки (7), соотношения (9) и (14));

— вычисляем P_l^k , $k = \overline{-I+1, 0}$, рекуррентно:

$$P^{-I} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_l^k &= (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) P_l^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k. \end{aligned}$$

4. Вычисляем

$$\begin{aligned} L_r &= [-2R_0 P_r^0 + E - (P_l^0)^{-1} P_r^0]^{-1} \ell_2 f(\omega), \\ L_l &= [-2R_0 P_l^0 - E + (P_r^0)^{-1} P_l^0]^{-1} \ell_2 f(\omega) \end{aligned}$$

(см. (24)). После проведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z .

Пусть $z < 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{0, -I+1}$, тогда

$$U(z) = (S(z) - R_k)^{-1} e^{-R_k(z-z_{k-1})} (S^{k-1} - R_k) U^{k-1} + (S(z) - R_k)^{-1} (e^{-R_k(z-z_{k-1})} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} - (S(z) - R_k) e^{R_k(z-z_k)}) (S^k - R_k)^{-1} Q^k L_l,$$

здесь $U^{k-1} = P_l^{k-1} L_l$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (9).

Пусть $z > 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{1, J}$, тогда

$$U(z) = (S(z) + R_k)^{-1} e^{R_k(z-z_k)} (S^k + R_k) U^k + (S(z) + R_k)^{-1} (e^{R_k(z-z_k)} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S(z) + R_k) e^{-R_k(z-z_{k-1})}) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} L_r,$$

здесь $U^k = P_r^k L_r$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (11).

2.3.2. Модельная задача 2. Оба конца балки жёстко защемлены. Жёсткому защемлению концов балки соответствуют следующие краевые условия:

$$u|_{z=-l_l} = 0, \quad u'|_{z=-l_l} = 0, \quad u|_{z=l_r} = 0, \quad u'|_{z=l_r} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, имеем задачу (2)–(4), (25).

Для получения аналитических выражений для вектор-столбца U в любой точке балки послойный пересчёт будет организован так же, как при решении модельной задачи 1.

Первые шаги счёта совпадают с порядком вычислений 1, т. е. считаем, что S^k и Q^k ($k = \overline{1, J}$ и $k = \overline{-1, -I}$) вычислены. Будем считать, что $L(z) = Q(z) C_r V_r$ ($z > 0$) и $L(z) = Q(z) C_l V_l$ ($z < 0$), где

$$V_r = \begin{bmatrix} v(l_r) \\ v'(l_r) \end{bmatrix}, \quad V_l = \begin{bmatrix} v(-l_l) \\ v'(-l_l) \end{bmatrix},$$

и их значения будут определены позже. Матрица C_r должна быть выбрана так, чтобы было верно равенство

$$U'|_{z=l_r} = (SU)|_{z=l_r} + L|_{z=l_r} = S^J U|_{z=l_r} + Q^J C_r V_r.$$

Принимая во внимание краевые условия (25) на правом конце, из данного равенства следует

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v'(l_r) \end{bmatrix} = S^J \begin{bmatrix} 0 \\ v(l_r) \end{bmatrix} + Q^J C_r V_r \quad \text{или} \quad O_{22} V_r = (S^J O_{21} + Q^J C_r) V_r,$$

откуда вычисляется матрица C_r . Аналогично из равенства $O_{22} V_l = (S^{-I} O_{21} + Q^{-I} C_l) V_l$ определяется матрица C_l . Соответствующие выражения будут приведены ниже.

Аналогично п. 2.3.1 в соотношении (18) положим $z = z_{k-1}$, умножим получившееся равенство на $C_r V_r$ слева и получим

$$U^{k-1} = (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) U^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} C_r V_r.$$

Учитывая равенство $U^J = O_{21} V_r$, получим $U^{J-1} = T_r^{J-1} V_r$, т. е. двигаясь рекуррентно от $J-1$ до 0, получим $U^k = T_r^k V_r$, где матрицы T_r^k рассчитываются по рекуррентным формулам, которые будут приведены ниже.

Так же аналогично п. 2.3.1 в соотношении (19) положим $z = z_k$, умножим получившееся равенство на $C_l V_l$ слева и получим

$$U^k = (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) U^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k C_l V_l.$$

Учитывая равенство $U^{-I} = O_{21}V_l$, получим $U^{-I+1} = T_l^{-I+1}V_l$, т. е. двигаясь рекуррентно от $-I+1$ до 0, получим $U^k = T_l^k V_l$, где матрицы T_l^k рассчитываются по рекуррентным формулам, которые будут приведены ниже.

Воспользуемся условиями склейки (4) и полученными выше равенствами, тогда

$$\begin{aligned} S(+0)U(+0) + C_r V_r &= S(-0)U(-0) + C_l V_l + \ell_2 f(\omega), \\ U(+0) &= U(-0), \\ U(+0) &= T_r^0 V_r, \quad U(-0) = T_l V_l, \end{aligned} \quad (26)$$

откуда получим выражения для вектор-столбцов V_r и V_l , которые будут приведены ниже.

Таким образом, для вычисления вектор-столбца U проведём предварительные вычисления.

Порядок вычислений 2.

1. Совпадает с порядком вычислений 1.
2. На интервале $[0, l_r]$:
 - совпадает с порядком вычислений 1;
 - вычисляем $C_r = (Q^J)^{-1}(O_{22} - S^J O_{21})$;
 - вычисляем T_r^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$T_r^J = O_{21},$$

$$\begin{aligned} T_r^{k-1} &= (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) T_r^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} C_r. \end{aligned}$$

3. На интервале $[-l_l, 0]$:
 - совпадает с порядком вычислений 1;
 - вычисляем $C_l = (Q^{-I})^{-1}(O_{22} - S^{-I} O_{21})$;
 - вычисляем T_l^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$T_l^{-I} = O_{21},$$

$$\begin{aligned} T_l^k &= (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) T_l^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k C_l. \end{aligned}$$

4. Вычисляем

$$\begin{aligned} V_r &= [-2R_0 T_r^0 + C_r - C_l (T_l^0)^{-1} T_r^0]^{-1} \ell_2 f(\omega), \\ V_l &= [-2R_0 T_l^0 - C_l + C_r (T_r^0)^{-1} T_l^0]^{-1} \ell_2 f(\omega) \end{aligned}$$

(см. (26)). После проведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z .

Пусть $z < 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{0, -I+1}$, тогда

$$\begin{aligned} U(z) &= (S(z) - R_k)^{-1} e^{-R_k(z-z_{k-1})} (S^{k-1} - R_k) U^{k-1} + (S(z) - R_k)^{-1} (e^{-R_k(z-z_{k-1})} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S(z) - R_k) e^{R_k(z-z_k)}) (S^k - R_k)^{-1} Q^k C_l V_l. \end{aligned}$$

Здесь $U^{k-1} = T_l^{k-1} C_l V_l$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (9).

Пусть $z > 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{1, J}$, тогда

$$U(z) = (S(z) + R_k)^{-1} e^{R_k(z-z_k)} (S^k + R_k) U^k + (S(z) + R_k)^{-1} (e^{R_k(z-z_k)} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S(z) + R_k) e^{-R_k(z-z_{k-1})}) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} C_r V_r.$$

Здесь $U^k = T_r^k V_r$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (11).

2.3.3. Модельная задача 3. Оба конца балки свободные. Свободным концам балки соответствуют следующие краевые условия:

$$r u''|_{z=-l_l} = 0, \quad (r u'')'|_{z=-l_l} = 0, \quad r u''|_{z=l_r} = 0, \quad (r u'')'|_{z=l_r} = 0,$$

которые с учётом обозначений могут быть переписаны в виде

$$v|_{z=-l_l} = 0, \quad v'|_{z=-l_l} = 0, \quad v|_{z=l_r} = 0, \quad v'|_{z=l_r} = 0. \quad (27)$$

Таким образом, имеем постановку задачи (2)–(4), (27).

Для получения аналитических выражений для вектор-столбца U в любой точке балки послойный пересчёт будет организован так же, как и в предыдущих пунктах. Решение будет строиться точно таким же образом, как для модельной задачи 2, поэтому введём необходимые обозначения и приведём порядок вычислений.

Положим $L(z) = Q(z) C_r U_r$ ($z > 0$) и $L(z) = Q(z) C_l U_l$ ($z < 0$), где

$$U_r = \begin{bmatrix} u(l_r) \\ u'(l_r) \end{bmatrix}, \quad U_l = \begin{bmatrix} u(-l_l) \\ u'(-l_l) \end{bmatrix}.$$

Матрицы C_r должны быть выбраны так, чтобы были верны равенства

$$U'|_{z=l_r} = S^J U|_{z=l_r} + Q^J C_r U_r, \quad U'|_{z=-l_l} = S^J U|_{z=-l_l} + Q^J C_l U_l.$$

Таким образом, вектор-столбец U можем вычислить следующим образом.

Порядок вычислений 3.

1. Совпадает с порядком вычислений 1.
2. На интервале $[0, l_r]$
 - совпадает с порядком вычислений 1;
 - вычисляем $C_r = (Q^J)^{-1} (O_{12} - S^J O_{11})$;
 - вычисляем F_r^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$F_r^J = O_{11},$$

$$F_r^{k-1} = (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) F_r^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} C_r.$$

3. На интервале $[-l_l, 0]$:

- совпадает с порядком вычислений 1;
- вычисляем $C_l = (Q^{-I})^{-1} (O_{12} - S^{-I} O_{11})$;
- вычисляем F_l^k , $k = \overline{-I+1, 0}$, рекуррентно:

$$F_l^{-I} = O_{11},$$

$$F_l^k = (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) F_l^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k C_l.$$

4. Вычисляем

$$\begin{aligned} U_r &= [-2R_0F_r^0 + C_r - C_l(F_l^0)^{-1}F_r^0]^{-1}\ell_2f(\omega), \\ U_l &= [-2R_0F_l^0 - C_l + C_r(F_r^0)^{-1}F_l^0]^{-1}\ell_2f(\omega). \end{aligned}$$

После проведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z .

Пусть $z < 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{0, -I + 1}$, тогда

$$\begin{aligned} U(z) &= (S(z) - R_k)^{-1}e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)U^{k-1} + (S(z) - R_k)^{-1}(e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S(z) - R_k)e^{R_k(z-z_k)})(S^k - R_k)^{-1}Q^k C_l U_l, \end{aligned}$$

здесь $U^{k-1} = F_l^{k-1}C_l U_l$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (9).

Пусть $z > 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{1, J}$, тогда

$$\begin{aligned} U(z) &= (S(z) + R_k)^{-1}e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)U^k + (S(z) + R_k)^{-1}(e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S(z) + R_k)e^{-R_k(z-z_{k-1})})(S^{k-1} + R_k)^{-1}Q^{k-1}C_r U_r. \end{aligned}$$

Здесь $U^k = F_r^k C_r U_r$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (11).

2.3.4. Модельная задача 4. Точечный груз на концах стержня или упругоопёртые концы стержня. Точечному грузу с массой m_0 на концах балки соответствуют краевые условия

$$r u''|_{z=-l_l} = 0, \quad (r u'')'|_{z=-l_l} = m_0 \omega^2 u|_{z=-l_l}, \quad r u''|_{z=l_r} = 0, \quad (r u'')'|_{z=l_r} = -m_0 \omega^2 u|_{z=l_r};$$

упругоопёртые концы стержня

$$r u''|_{z=-l_l} = 0, \quad (r u'')'|_{z=-l_l} = \varkappa u|_{z=-l_l}, \quad r u''|_{z=l_r} = 0, \quad (r u'')'|_{z=l_r} = -\varkappa u|_{z=l_r}.$$

Данные условия можно записать в общем виде:

$$v|_{z=-l_l} = 0, \quad v'|_{z=-l_l} = \eta u|_{z=-l_l}, \quad v|_{z=l_r} = 0, \quad v'|_{z=l_r} = -\eta u|_{z=l_r}, \quad (28)$$

где $\eta = \omega^2 m_0 / r$ в первом случае и $\eta = \varkappa / r$ во втором.

Таким образом, имеем постановку задачи (2)–(4), (28). Для вычисления вектор-столбца U можем записать.

Порядок вычислений 4.

1. Совпадает с порядком вычислений 1.
2. На интервале $[0, l_r]$:
 - совпадает с порядком вычислений 1;
 - вычисляем $C_r = (Q^J)^{-1}(O_{12} - \eta O_{21} - S^J O_{11})$;
 - совпадает с порядком вычислений 3.
3. На интервале $[-l_l, 0]$:
 - совпадает с порядком вычислений 1;
 - вычисляем $C_l = (Q^{-I})^{-1}(O_{12} + \eta O_{21} - S^{-I} O_{11})$;
 - совпадает с порядком вычислений 3.
4. Совпадает с порядком вычислений 3.

После приведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z . Выражения для вектор-столба U совпадают с выражениями из предыдущего п. 2.3.3.

2.4. Практическая постановка задачи

Рассмотрим практическую постановку на примере консольной балки. У данной балки один конец свободен, а второй жёстко закреплён. Для определённости будем считать, что левый конец свободный:

$$v|_{z=-l_l} = 0, \quad v'|_{z=-l_l} = 0,$$

а правый жёстко закреплён:

$$u|_{z=l_r} = 0, \quad u'|_{z=l_r} = 0.$$

Решение комбинируется из решений модельных задач, рассмотренных выше.

Порядок вычислений 5.

1. Для каждого интервала $[z_{k-1}, z_k]$, $k = \overline{-I+1, J}$, вычисляем

$$\lambda_k = \sqrt{\omega^4 m_k / r_k} \quad \text{и} \quad R_k = \frac{1}{\lambda_k(1+i)} (A_k + i\lambda_k^2 E).$$

2. На интервале $[0, l_r]$:

— вычисляем S^k и Q^k , $k = \overline{1, J}$, рекуррентно:

$$\begin{aligned} S(+0) &\equiv S^0 = -R_1, \\ S^k &= [e^{-R_k h_k} ((S^{k-1} + R_k)^{-1} - R_k^{-1}/2) e^{-R_k h_k} + R_k^{-1}/2]^{-1} - R_k, \\ Q^0 &= E, \\ Q^k &= (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1}; \end{aligned}$$

— вычисляем $C_r = (Q^J)^{-1} (O_{22} - S^J O_{21})$;

— вычисляем T_r^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$T_r^J = O_{21},$$

$$\begin{aligned} T_r^{k-1} &= (S^{k-1} + R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) T_r^k + (S^{k-1} + R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^k + R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^{k-1} + R_k)) (S^{k-1} + R_k)^{-1} Q^{k-1} C_r. \end{aligned}$$

3. На интервале $[-l_l, 0]$:

— вычисляем S^k и Q^k , $k = \overline{0, -I+1}$, рекуррентно:

$$\begin{aligned} S(-0) &\equiv S^0 = R_0, \\ S^{k-1} &= [e^{-R_k h_k} ((S^k - R_k)^{-1} + R_k^{-1}/2) e^{-R_k h_k} - R_k^{-1}/2]^{-1} + R_k, \\ Q^0 &= E, \\ Q^{k-1} &= (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} (S^k - R_k)^{-1} Q^k; \end{aligned}$$

— вычисляем $C_l = (Q^{-I})^{-1} (O_{12} - S^{-I} O_{11})$;

— вычисляем F_l^k , $k = \overline{-I+1, 0}$, рекуррентно:

$$F_l^{-I} = O_{11},$$

$$\begin{aligned} F_l^k &= (S^k - R_k)^{-1} e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) F_l^{k-1} + (S^k - R_k)^{-1} (e^{-R_k h_k} (S^{k-1} - R_k) e^{-R_k h_k} \\ &\quad - (S^k - R_k)) (S^k - R_k)^{-1} Q^k C_l. \end{aligned}$$

4. Вычисляем

$$V_r = [-2R_0T_r^0 + C_r - C_l(F_l^0)^{-1}T_r^0]^{-1}\ell_2f(\omega),$$

$$U_l = [-2R_0F_l^0 - C_l + C_r(T_r^0)^{-1}F_l^0]^{-1}\ell_2f(\omega).$$

После проведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z .

Пусть $z < 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{0, -I+1}$, тогда

$$U(z) = (S(z) - R_k)^{-1}e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)U^{k-1} + (S(z) - R_k)^{-1}(e^{-R_k(z-z_{k-1})}(S^{k-1} - R_k)e^{-R_k h_k} - (S(z) - R_k)e^{R_k(z-z_k)})(S^k - R_k)^{-1}Q^k C_l U_l.$$

Здесь $U^{k-1} = F_l^{k-1}C_l U_l$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (9).

Пусть $z > 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{1, J}$, тогда

$$U(z) = (S(z) + R_k)^{-1}e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)U^k + (S(z) + R_k)^{-1}(e^{R_k(z-z_k)}(S^k + R_k)e^{-R_k h_k} - (S(z) + R_k)e^{-R_k(z-z_{k-1})})(S^{k-1} + R_k)^{-1}Q^{k-1}C_r V_r.$$

Здесь $U^k = T_r^k C_r V_r$ и $S(z)$ вычисляется по формуле (11).

3. СЛУЧАЙ $\omega = 0$

3.1. Переформулировка постановки задачи

Здесь целью является получение аналитических выражений для функции $u = u(z, 0)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(r(z)u'')' = f(0)\delta(z). \quad (29)$$

Аналогично случаю $\omega \neq 0$ получаем

$$U'' = AU, \quad A = \frac{1}{r}O_{12}, \quad (30)$$

$$[U]_{z_k} = 0, \quad [U']_{z_k} = 0, \quad k = \overline{-I+1, J-1}, \quad k \neq 0, \quad (31)$$

$$[U]_{z_0} = 0, \quad [U']_{z_0} = f(0)\ell_2. \quad (32)$$

Заметим, что для определения U к соотношениям (30)–(32) необходимо добавить краевые условия. Это будет сделано ниже.

Также заметим, если $f(0) = 0$, то $u(z) = 0$, поэтому предполагаем, что $f(0) \neq 0$. В следующем разделе будут получены основные выражения, которые позволят искать функцию $u(z)$ на любом интервале $[z_{k-1}, z_k]$, $k = \overline{-I+1, J}$.

3.2. Решения соответствующих матричных уравнений

Так же, как и в п. 2.2.2, введём матрицу S и вектор-столбец L , которые связаны с вектор-столбцом U соотношением

$$U' = SU + L. \quad (33)$$

Как и выше, получим, что данные матрицы удовлетворяют следующим дифференциальным матричным уравнениям:

$$S' + S^2 = \frac{1}{r}O_{12}, \quad L' + SL = 0 \quad (34)$$

и условиям склейки

$$[S]_{z_k} = 0, \quad [L]_{z_k} = 0. \quad (35)$$

Поскольку $A = \frac{1}{r}O_{12}$, уравнение $R^2 = A$ не имеет решений, поэтому построение выражений для решений уравнений (33), (34) будет отличаться от построений п. 2.2.2.

Дифференциальное матричное уравнение Риккати имеет $n^2 + 2$ различных решений (n — размерность матрицы). Для наших нужд построения выражений для решения уравнения (1) будет достаточно решения вида

$$S(z) = \begin{bmatrix} n(z) & j(z) \\ 0 & n(z) \end{bmatrix}.$$

Более простые выражения для вычислений получаются для матрицы $Y = S^{-1}$, которая удовлетворяет дифференциальному матричному уравнению

$$-Y'' + E = \frac{1}{r}YO_{12}Y \quad (36)$$

и так же будет верхнетреугольной

$$Y(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ 0 & a(z) \end{bmatrix},$$

где функции $n(z)$ и $j(z)$ связаны следующими соотношениями с функциями $a(z)$ и $b(z)$:

$$a(z) = \frac{1}{n(z)}, \quad b(z) = -\frac{j(z)}{n^2(z)}.$$

Подставляя данное представление в (36), нетрудно получить выражения для функций $a(z)$ и $b(z)$ на интервале $[z_{k-1}, z_k]$. Для пересчёта слева-направо, т. е. когда начальное условие ставится в точке z_{k-1}

$$a(z) = z - z_{k-1} + a^{k-1}, \quad b(z) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{3}(z - z_{k-1})^3 + a^{k-1}(z - z_{k-1})^2 + (a^{k-1})^2(z - z_{k-1}) \right) + b^{k-1}. \quad (37)$$

Для пересчёта справа-налево, т. е. когда начальное условие ставится в точке z_k ,

$$a(z) = z - z_k + a^k, \quad b(z) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{3}(z - z_k)^3 + a^k(z - z_k)^2 + (a^k)^2(z - z_k) \right) + b^k. \quad (38)$$

Здесь

$$Y|_{z=z_k} \equiv Y^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ 0 & a^k \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$Y(z) = a(z)E + b(z)O_{12}. \quad (39)$$

Найдём решение второго дифференциального уравнения (34). Решение для вектор-столбца L ищется с помощью матрицанта Q , который удовлетворяет задаче

$$Q' + SQ = 0, \quad Q|_{z=z_k} = Q^k, \quad (40)$$

где $L = Q^k L^k$ и $L^k = L|_{z=z_k}$.

Перепишем дифференциальное уравнение (40) в виде $YQ' + Q = 0$, умножим (39) справа на Y и вычтем эти два выражения одно из другого. В результате получим

$$(YQ)' = -\frac{1}{r_k}YO_{12}(YQ).$$

Принимая во внимание $YO_{12} = a(z)O_{12}$ (см. (39)), получим

$$Q(z) = S(z) \left(E - \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2}(z - z_{k-1})^2 + a^{k-1}(z - z_{k-1}) \right) O_{12} \right) Y^{k-1} Q^{k-1}, \quad (41)$$

когда краевое условие ставится в точке z_{k-1} , и

$$Q(z) = S(z) \left(E - \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2}(z - z_k)^2 + a^k(z - z_k) \right) O_{12} \right) Y^k Q^k, \quad (42)$$

когда краевое условие ставится в точке z_k . При получении выражений (41) и (42) воспользовались выражением для матричной экспоненты $e^{xO_{12}} = E + xO_{12}$.

Получим решение дифференциального уравнения (33), которое связано с решением матричного уравнения для матрицанта W : $W' - SW = Q$. Умножим слева данное уравнение на матрицу S , получим

$$SW' - S^2W = SQ \Rightarrow SW' + S'W = -Q' \Rightarrow (SW + Q)' = 0.$$

Таким образом, можем написать

$$W(z) = Y(z)(S^{k-1}W^{k-1} + Q^{k-1} - Q(z)), \quad (43)$$

когда краевое условие ставится в точке z_{k-1} , и

$$W(z) = Y(z)(S^k W^k + Q^k - Q(z)), \quad (44)$$

когда краевое условие ставится в точке z_k .

3.3. Практическая постановка задачи

В предыдущем разделе получены все необходимые выражения для того, чтобы вычислить функцию $u(z, 0)$ в любой точке z . Данные выражения получены в виде, который позволяет вычислять необходимые величины в том же порядке, что и в случае $\omega \neq 0$. По этой причине мы не будем приводить решения модельных задач, приведём только решение задачи для консольной балки. Здесь будет ясно, что для остальных случаев все выражения выписываются по аналогии.

Рассмотрим консольную балку, у которой левый конец свободный:

$$v|_{z=-l_l} = 0, \quad v'|_{z=-l_l} = 0,$$

а правый жёстко закреплён:

$$u|_{z=l_r} = 0, \quad u'|_{z=l_r} = 0.$$

Порядок вычислений 6.

1. На интервале $[0, l_r]$:

— вычисляем Y^k , $S^k = (Y^k)^{-1}$ и Q^k , $k = \overline{1, J}$, рекуррентно:

$$\begin{aligned} Y(+0) &\equiv Y^0 = z_1 E, \quad (\text{т. е. } a^0 = z_1, \quad b^0 = 0), \\ Y^k &= a^k E + b^k O_{12}, \quad a^k = h_k + a^{k-1}, \quad b^k = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{3} h_k^3 + a^{k-1} h_k^2 + (a^{k-1})^2 h_k \right) + b^{k-1}, \\ Q^0 &= E, \\ Q^k &= S^k \left(E - \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2} h_k^2 + a^{k-1} h_k \right) O_{12} \right) Y^{k-1} Q^{k-1}; \end{aligned}$$

- вычисляем $C_r = (Q^J)^{-1}(O_{22} - S^J O_{21})$;
- вычисляем T_r^k , $k = \overline{J, 1}$, рекуррентно:

$$T_r^J = O_{21},$$

$$T_r^{k-1} = Y^{k-1}(S^k T^k + (Q^k - Q^{k-1})C_r).$$

2. На интервале $[-l_l, 0]$:

- вычисляем Y^k , $S^k = (Y^k)^{-1}$ и Q^k , $k = \overline{0, -I+1}$, рекуррентно:

$$Y(+0) \equiv Y^0 = z_{-1}E, \quad (\text{т.е., } a^0 = z_{-1}, \quad b^0 = 0),$$

$$Y^{k-1} = a^{k-1}E + b^{k-1}O_{12}, \quad a^{k-1} = -h_k + a^k, \quad b^{k-1} = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{3}h_k^3 + a^k h_k^2 - (a^k)^2 h_k \right) + b^k,$$

$$Q^0 = E,$$

$$Q^{k-1} = S^{k-1} \left(E - \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{2}h_k^2 - a^k h_k \right) O_{12} \right) Y^k Q^k;$$

- вычисляем $C_l = (Q^{-I})^{-1}l(O_{12} - S^{-I}O_{11})$;
- вычисляем F_l^k , $k = \overline{-I+1, 0}$, рекуррентно:

$$F_l^{-I} = O_{11},$$

$$F_l^k = Y^k(S^{k-1}F^{k-1} + (Q^{k-1} - Q^k)C_l).$$

3. Вычисляем

$$V_r = [(z_1 - z_{-1})T_r^0 + C_r - C_l(F_l^0)^{-1}T_r^0]^{-1}l_2 f(0),$$

$$U_l = [(z_1 - z_{-1})F_l^0 - C_l + C_r(T_r^0)^{-1}F_l^0]^{-1}l_2 f(0).$$

После приведённых вычислений можно вычислить U в любой точке z .

Пусть $z < 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{0, -I+1}$, тогда

$$U(z) = Y(z)(S^k U^k + (Q^k - Q(z))C_l U_l),$$

здесь $U^k = F_l^k C_l U_l$ и $Y(z)$ вычисляется по формуле (39), где функции $a(z)$ и $b(z)$ вычисляются по формулам (37).

Пусть $z > 0$ и $z \in [z_{k-1}, z_k]$, где k — любое значение из $\overline{1, J}$, тогда

$$U(z) = Y(z)(S^{k-1}U^{k-1} + (Q^{k-1} - Q(z))C_r V_r),$$

здесь $U^{k-1} = T_r^{k-1}C_r V_r$ и $Y(z)$ вычисляется по формуле (39), где функции $a(z)$ и $b(z)$ вычисляются по формулам (38).

4. ЗАМЕЧАНИЯ

4.1. Некоторые обобщения

Продemonстрированный выше подход к получению аналитических выражений для решения дифференциального уравнения (1) легко распространяется на случай, например, дифференциального уравнения, описывающего затухающие колебания по Фойгту в вынужденном режиме:

$$(r(z)\mathbf{u}'')'' + \alpha(r(z)\dot{\mathbf{u}}'')'' + m(z)\ddot{\mathbf{u}} = f(t)\delta(z)$$

или на случай поперечных колебаний балки, когда действует постоянная продольная сила:

$$(r(z)\mathbf{u}'')'' + N\mathbf{u}'' + m(z)\ddot{\mathbf{u}} = f(t)\delta(z).$$

В данных случаях изменится вид матрицы A , однако подход и основные соотношения останутся прежними.

Если необходимо решить задачу с несколькими источниками, например,

$$(r(z)\mathbf{u}'')'' + m(z)\ddot{\mathbf{u}} = f^1(t)\delta(z - z^1) + f^2(t)\delta(z - z^2),$$

то следует представить решение в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ и решать две задачи:

$$(r(z)\mathbf{u}_1'')'' + m(z)\ddot{\mathbf{u}}_1 = f^1(t)\delta(z - z^1), \quad (r(z)\mathbf{u}_2'')'' + m(z)\ddot{\mathbf{u}}_2 = f^2(t)\delta(z - z^2).$$

4.2. Другие типы краевых условий

Возможны другие условия на концах балки, не те, которые рассмотрены выше. Например,

- пружина растяжения $\mathbf{u}'' = 0$, $(r\mathbf{u}'')' = c_1\mathbf{u}$;
- пружина кручения $r\mathbf{u}'' = c_2\mathbf{u}'$, $(r\mathbf{u}'')' = 0$;
- скользящая заделка с пружиной растяжения $\mathbf{u}' = 0$, $(r\mathbf{u}'')' = c_1\mathbf{u}$;
- шарнирная опора с пружиной кручения $\mathbf{u} = 0$, $r\mathbf{u}'' = c_2\mathbf{u}'$;
- скользящая заделка с демпфером смещения и пружиной растяжения $\mathbf{u}' = 0$, $(r\mathbf{u}'')' = c_1\mathbf{u} - c_3\dot{\mathbf{u}}$;
- шарнирная опора с пружиной кручения и демпфером поворота $\mathbf{u} = 0$, $r\mathbf{u}'' = c_2\mathbf{u}' - c_3\dot{\mathbf{u}}'$ и другие [17].

Очевидно, что все эти условия укладываются в общую схему, предложенную выше, изменение приведённых выше выражений затронет только матрицы C_r и C_l .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида. Вычисления для получения решения сводятся к сложению, умножению и обращению квадратных матриц второго порядка. Формулы получены в таком виде, при использовании которых при послойном пересчёте ошибка округления не накапливается, поскольку экспоненты, содержащиеся в некоторых выражениях, имеют показатели, действительные части которых неположительны. Использование полученных в работе выражений для решения уравнения поперечных колебаний балки позволит создать достаточно быстрый алгоритм решения прямой задачи, что позволит при необходимости решать обратную задачу оптимизационным методом по поиску неизвестных коэффициентов дифференциального уравнения или неизвестных функций в краевых условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев Б. В., Саурин В. В. О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3; <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>
2. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчёта электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах // Известия АН СССР. Сер. геофизическая. 1956. № 3. С. 251–254.
3. Дмитриев В. И. Общий метод расчёта электромагнитного поля в слоистой среде // Вычисл. методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 55–65.
4. Дмитриев В. И., Фёдорова Э. А. Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах // Вычисл. методы и программирование. 1980. Вып. 32. С. 150–183.

5. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Численные методы в геофизике. 1979. М.: Изд-во МГУ. С. 3–12.
6. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. С. 272–286.
7. Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г. Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. С. 834–839.
8. Фатьянов А. Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989. (Препринт/Вычисл. Центр СО АН СССР; № 857).
9. Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. С. 323–327.
10. Pavlov V. M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space // Proc. Int. Conf. «Problems of Geocosmos». St. Peterburg, 03–08 June 2002. St. Peterburg: Publ. St. Peterburg Univ. P. 320–323.
11. Карчевский А. Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 3. С. 339–351.
12. Карчевский А. Л. Прямая динамическая задача сейсмоки для горизонтально-слоистых сред // Сиб. электрон. мат. известия. 2005. Т. 2, С. 23–61; <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
13. Карчевский А. Л. Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
14. Karchevsky A. L., Rysbayuly B. R. Analytical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 55–67.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
16. Годунов С. К. Матричная экспонента, матрица Грина и условия Лопатинского. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
17. Доев В. С. Поперечные колебания балок: Учебное пособие. М.: Кнорус, 2016.

UDC 519.624.3

**ANALYTICAL SOLUTIONS TO THE DIFFERENTIAL EQUATION
OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS
BEAM IN THE FREQUENCY DOMAIN FOR THE BOUNDARY
CONDITIONS OF VARIOUS TYPES**

© 2020 A. L. Karchevsky

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: karchevs@math.nsc.ru

Received 10.06.2020, revised 31.07.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. We obtain an analytical solution for the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for various types of boundary conditions. All calculations involved are addition, multiplication, and inversion of square matrices of second order. The formulas are such that, when using them for layer-by-layer recalculation, the rounding error does not accumulate since the exponential functions in some expressions have exponents with nonpositive real parts.

Keywords: equation of transverse vibrations of a beam, layer-by-layer recalculation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.404

REFERENCES

1. Gusev B.V., Saurin V.V. On vibrations of inhomogeneous beams. *Engrg. J. of Don*, 2017, No. 3 (in Russian); <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>
2. Tikhonov A.N., Shakhshvarov D.N. Metod rascheta elektromagnitnykh polei, vozbuzhdaemykh peremennym tokom v sloistyx sredakh [A method for calculation of electromagnetic fields excited by alternating current in layered media]. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geofiz.*, 1956, No 3, pp. 251–254 (in Russian).
3. Dmitriev V.I. Obshchii metod rascheta elektromagnitnogo polya v sloistoi srede [A general method for calculation of an electromagnetic field in a layered medium]. *Vychisl. Met. and Programmir.*, 1968, Vyp. 10, pp. 55–65 (in Russian).
4. Dmitriev V.I., Fedorova E.A. Chislennyye issledovaniya elektromagnitnykh polei v sloistyx sredakh [Numerical studies of electromagnetic fields in layered media]. *Vychisl. Met. and Programmir.*, 1980, Vyp. 32, pp. 150–183 (in Russian).
5. Akkuratov G.V., Dmitriev V.I. Metod rascheta polya ustanovivshikhsya uprugikh kolebaniy v sloistoi srede [A method for calculation of the field of sustained elastic vibrations in a layered medium]. *Numerical Methods in Geophysics*, 1979. Moscow: Publ. MGU; pp. 3–12 (in Russian).
6. Akkuratov G.V., Dmitriev V.I. Metod rascheta polya ustanovivshikhsya uprugikh kolebaniy v sloistoi srede [A method for calculation of the field of sustained elastic vibrations in a layered medium]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1984, Vol. 24, pp. 272–286 (in Russian).
7. Fat'yanov A.G., Mikhailenko B.G. Metod rascheta nestatsionarnykh volnovykh polei v neuprugikh sloisto-neodnorodnykh sredakh [Method for calculation of the unsteady wave fields in inelastic layered-inhomogeneous media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 301, pp. 834–839 (in Russian).

8. Fat'yanov A.G. Nestatsionarnye seismicheskie volnovye polya v neodnorodnykh anizotropnykh sredakh s pogloshcheniem energii [Unsteady seismic wave fields in inhomogeneous anisotropic media with energy absorption]. Novosibirsk, 1989. (Preprint/ Vychisl. Tsentr Sibir. Otdel. Akad. Nauk SSSR; No. 857 (in Russian)).
9. Fat'yanov A.G. Poluanaliticheskiy metod resheniya pryamykh dinamicheskikh zadach v sloistnykh sredakh [Semianalytical method for solving the direct dynamical problems in layered media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, Vol. 310, pp. 323–327 (in Russian).
10. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space. *Proc. Int. Conf. Problems of Geocosmos* (St. Petersburg, 03–08 June 2002). St. Petersburg: Publ. St. Petersburg Univ., 2002, pp. 320–323.
11. Karchevsky A.L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2005, Vol. 46, No. 3, pp. 339–351.
12. Karchevsky A.L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media. *Siberian Electr. Math. Rep.*, 2005, Vol. 2, pp. 23–61 (in Russian); <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
13. Karchevsky A.L. A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 689–695 (in Russian).
14. Karchevsky A.L., Rysbayuly B.R. Analytical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 4, pp. 55–67.
15. Gantmakher F.R. The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
16. Godunov S.K. Matrix exponent, Green matrix, and Lopatinskii conditions. Novosibirsk: NGU Press, 1983 (in Russian).
17. Doev V.S. Transverse vibrations of beams. Moscow: Knorus, 2016 (in Russian).