Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. E. Kirillova, On invariant surfaces in gene network models , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 69–76

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.405>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 12:57:02

УДК 514.745.82

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В МОДЕЛЯХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

© 2020 Н. Е. Кириллова

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: kne@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 12.06.2020 г.; после доработки 09.08.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Построена инвариантная двумерная поверхность в фазовом портрете одной шестимерной динамической системы, рассматриваемой в качестве модели функционирования кольцевой генной сети. Эта инвариантная поверхность содержит стационарную точку S_0 системы, и если S_0 является гиперболической, тогда эта поверхность содержит цикл этой системы. Условия существования цикла в этой и похожих системах были получены ранее.

Ключевые слова: модели кольцевых генных сетей, фазовые портреты, циклы, гиперболические стационарные точки, инвариантные поверхности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.405

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих публикациях были получены условия существования периодических траекторий (циклов) у динамических систем биохимической кинетики, моделирующих кольцевые генные сети [1–3]. Интерес к этим циклам связан с тем, что в функционировании организмов периодические процессы (циркадные и другие ритмы) играют важную роль. Поведение траекторий указанных динамических систем существенным образом зависит от геометрических характеристик их фазовых портретов: сепаратрис, границ областей притяжения аттракторов и т. п. [4, 5]. В настоящей работе, используя результаты монографии [6], мы строим в фазовом портрете одной такой динамической системы инвариантную поверхность, содержащую периодическую траекторию, существование которой было установлено в [7].

1. МОДЕЛЬ

Мы изучаем нелинейную динамическую систему вида (1) как математическую модель кольцевой генной сети:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -k_1 m_1 + f_1(p_3), & \frac{dp_1}{dt} &= \mu_1 m_1 - \nu_1 p_1, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -k_2 m_2 + f_2(p_1), & \frac{dp_2}{dt} &= \mu_2 m_2 - \nu_2 p_2, \\ \frac{dm_3}{dt} &= -k_3 m_3 + f_3(p_2), & \frac{dp_3}{dt} &= \mu_3 m_3 - \nu_3 p_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $f_j(p)$ — гладкие монотонно убывающие положительные функции неотрицательного аргумента, описывающие отрицательные обратные связи в моделируемой генной сети; k_j, μ_j, ν_j —

положительные константы, характеризующие динамику биохимических процессов. В частности, коэффициент k_j описывает скорость естественного распада мРНК с концентрацией m_j , ν_j соответствует скорости распада белка с концентрацией p_j , а параметр μ_j является коэффициентом пропорциональности концентрации мРНК с номером j и скоростью синтеза соответствующего ей белка в их положительной обратной связи (подробнее см. [8, 9]).

В частном случае имеем

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3, \quad f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) = \alpha(1 + p^\gamma)^{-1} + \alpha_0,$$

где $\alpha + \alpha_0$ — максимально возможное значение скорости синтеза, а α_0 — «фоновое» значение этой скорости. Такая система была предложена в [8] с целью моделирования динамики кольцевой геномной сети, связывающей три белка с концентрациями $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, репрессирующих друг друга по циклу, и соответствующие им мРНК с концентрациями $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$. Эта система, симметричная относительно циклической перестановки пар переменных, позднее рассматривалась в [9].

Главная задача работы — построить инвариантные многообразия несимметричной системы (1) в области $Q := \prod_{j=1}^3 ([0, A_j] \times [0, B_j])$. Здесь $A_j := f_j(0)/k_j$ и $B_j := \mu_j A_j / \nu_j$. В работах [1, 7] было установлено, что подобные области Q являются инвариантными для систем вида (1), и описан процесс поиска стационарных точек S_0 этих систем: координаты $(m_1^0; p_1^0; m_2^0; p_2^0; m_3^0; p_3^0)$ этой точки удовлетворяют соотношениям $\mu_j m_j = \nu_j p_j$ и находятся из уравнения

$$k_1 m_1 = f_1(\varphi_3(\varphi_2(\mu_1 m_1 / \nu_1))), \quad (2)$$

где функции $\varphi_j(p) := \frac{\mu_j}{\nu_j k_j} f_j(p)$ монотонно убывают. Правая часть уравнения (2) представляет собой композицию трёх гладких монотонно убывающих функций, а следовательно, монотонно убывает, если растёт концентрация m_1 . Левая часть этого уравнения — линейная функция, возрастающая с ростом m_1 . Этот факт доказывает то, что уравнение (2) имеет единственное решение, а система (1), в свою очередь, обладает только одной стационарной точкой S_0 . Пусть $-q_j$ — производная $\frac{df_j}{dp}$, вычисленная при $p = p_{j-1}^0$. Будем полагать, что $j - 1 := 3$ при $j = 1$.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА

Для описания поведения траекторий системы (1), следуя работам [1, 10], в которых такие построения проводились для других подобных динамических систем, разобьём инвариантный параллелепипед Q плоскостями $m_j = m_j^0$, $p_j = p_j^0$, проходящими через стационарную точку S_0 , на 2^6 более мелких параллелепипедов, которые мы будем называть блоками и нумеровать бинарными мультииндексами:

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6\} \quad (3)$$

Здесь нечётные номера соответствуют переменным m_j , чётные — переменным p_j .

Мы полагаем, что $\varepsilon_{2j-1} = 0$, если для всех точек рассматриваемого блока выполняется неравенство $m_j \leq m_j^0$; $\varepsilon_{2j} = 0$, если $p_j \leq p_j^0$, а также $\varepsilon_{2j-1} = 1$, если для всех точек рассматриваемого блока выполняется неравенство $m_j \geq m_j^0$, и $\varepsilon_{2j} = 1$, если $p_j \geq p_j^0$.

Опираясь на рассуждения, приведённые в [7, 10], мы можем сделать вывод, что при такой дискретизации фазового портрета системы (1) траектории всех точек общей пятимерной грани $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ любых двух смежных блоков $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ следуют либо из $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$), либо из $\mathcal{E}_2$ в $\mathcal{E}_1$

$(\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1)$. Алгоритм построения таких блоков подробно описан в [2].

Диаграмма (4) представляет собой циклическую последовательность блоков и содержит двенадцать блоков из дискретизации (3), по которым проходит цикл динамической системы (1).

Используя результаты [7], где система (1) рассматривалась в частном случае $\mu_j = \nu_j$, $j = 1, 2, 3$, мы можем проверить, что для каждого из перечисленных в диаграмме (4) блоков траектории динамической системы (1) могут переходить из него в другие блоки разбиения (3) только в направлении, указанном в этой диаграмме. Обозначим через Ω_1 объединение всех этих двенадцати блоков. Эти блоки имеют валентность 1; это означает, что из каждого из них траектории могут переходить только в один соседний блок. Будем говорить, что блок имеет валентность n , если из этого блока траектории переходят в n соседних блоков [1, 11].

Отметим, что в диаграмме (4) перечислены все блоки валентности 1, остальные 52 блока разбиения (3) имеют валентности, равные 3, и 5 — только нечётные. При этом блоков валентности 5 — из которых траектории могут следовать в 5 соседних блоков — в разбиении (3) тоже 12 (обозначим их объединение как Ω_5), а количество блоков валентности 3 (всех оставшихся блоков) — равно 40 (их объединение — это Ω_3).

Определение 1. Стационарная точка динамической системы называется гиперболической, если собственные числа соответствующей матрицы линеаризации имеют положительные и отрицательные вещественные части, но не являются мнимыми. В [6] такие точки называются элементарными.

Известно, что с помощью гладкой замены переменных, опираясь на теорему Гробмана — Хартмана [4], систему (1) можно линеаризовать в достаточно малой окрестности U гиперболической стационарной точки S_0 . Это означает, что поведение траекторий этой динамической системы в окрестности U можно проанализировать, используя собственные числа матрицы её линеаризации в точке S_0 . Если у матрицы линеаризации динамической системы имеются и мнимые собственные числа, то построение подобной окрестности U оказывается затруднительным или вообще невыполнимым, например, из-за возникновения аттракторов, а главным образом от того, что в таком случае система оказывается не в общем положении.

Рассмотрим матрицу линеаризации M_6 системы (1) в точке S_0 :

$$M_6 = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ \mu_1 & -\nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & -\nu_3 \end{pmatrix}.$$

Её характеристический полином можно представить в виде

$$P_6(\lambda) = \prod_{j=1}^3 (k_j + \lambda)(\nu_j + \lambda) + a^6, \quad \text{где} \quad a^6 := \prod_{j=1}^3 q_j \mu_j.$$

Лемма 1. *При достаточно больших значениях параметра a характеристический многочлен $P_6(\lambda)$ имеет в точности два комплексных корня с положительными вещественными частями и четыре комплексных корня с отрицательными вещественными частями.*

На рисунке схематично представлено расположение корней многочлена $P_6(\lambda)$ на комплексной плоскости.

Корни многочлена $P_6(\lambda)$

Далее всюду рассматривается случай, когда параметр a достаточно большой. Стоит отметить, что, поскольку параметр a^6 равен произведению μ_j и q_j , тот факт, что он велик, означает, что он велик по сравнению с коэффициентами k_j и ν_j (см. [7]).

Теорема 1. *Если характеристический многочлен матрицы M_6 имеет два корня с положительными вещественными частями и четыре корня с отрицательными вещественными частями, то динамическая система (1) имеет по крайней мере один цикл S_6 , содержащийся в области $\Omega' = \Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap U)$.*

В [7] аналогичная лемма, так же как и теорема, была установлена для системы (1) в частном случае, когда $\mu_j = \nu_j$ при всех $j = 1, 2, 3$. В рассматриваемом нами несимметричном случае доказательство леммы 1 вытекает, как и в [7], из принципа аргумента, а доказательство теоремы 1 — из теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Отметим, что для линеаризации системы (1) в некоторой окрестности стационарной точки S_0 мы используем свойство её гиперболичности в этой окрестности.

Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ — собственные числа матрицы M_6 , у которых $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 \neq 0$, и $z_{1,2} = x \pm iy$ — соответствующие комплексные собственные векторы. Тогда $M_6(x \pm iy) = (\alpha_1 \pm i\beta_1)(x \pm iy)$, здесь $x, y \in \mathbb{R}^6$. Следовательно,

$$M_6 x = \alpha_1 x - \beta_1 y, \quad M_6 y = \alpha_1 y + \beta_1 x. \quad (5)$$

Нетрудно показать, что вещественные вектора x и y неколлинеарны, значит, натянутая на них плоскость P_1^2 является инвариантным подпространством матрицы M_6 . Аналогично, пусть $P_2^2, P_3^2 \subset \mathbb{R}^6$ — двумерные плоскости, соответствующие парам собственных чисел λ_3, λ_4 и λ_5, λ_6 соответственно.

Лемма 2. Если точка S_0 является гиперболической, то пересечение $U \cap P_1^2$ лежит в области Ω_1 .

Доказательство. Пусть Z — комплексный собственный вектор матрицы M_6 , соответствующий собственному числу λ_1 с положительной вещественной частью, и пусть его координаты имеют вид $(1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ (этого можно добиться ввиду параллельности всех таких собственных векторов). Рассмотрим уравнение $(M_6 - \lambda_1 E)Z = 0$ и найдём знаки вещественных и мнимых частей координат вектора Z :

$$\begin{pmatrix} -k_1 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ \mu_1 & -\nu_1 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & -k_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\nu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_3 & -k_3 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & -\nu_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} z_6 &= -\frac{\lambda_1 + k_1}{q_1}, \quad z_5 = -\frac{(\lambda_1 + k_1)(\lambda_1 + \nu_3)}{q_1 \mu_3}, \quad z_4 = \frac{(\lambda_1 + k_1)(\lambda_1 + k_3)(\lambda_1 + \nu_3)}{q_1 q_3 \mu_3}, \\ z_3 &= \frac{(\lambda_1 + k_1)(\lambda_1 + \nu_2)(\lambda_1 + k_3)(\lambda_1 + \nu_3)}{q_1 q_3 \mu_2 \mu_3}, \\ z_2 &= -\frac{(\lambda_1 + k_1)(\lambda_1 + k_2)(\lambda_1 + \nu_2)(\lambda_1 + k_3)(\lambda_1 + \nu_3)}{q_1 q_2 q_3 \mu_2 \mu_3}, \quad z_1 = 1. \end{aligned}$$

Свободный член в многочлене $P_6(\lambda)$ равен $a^6 + \prod_{j=1}^3 (k_j \nu_j)$, где k_j и ν_j малы по сравнению с a .

Учитывая, что параметр a из характеристического полинома $P_6(\lambda)$ достаточно большой, а коэффициенты k_j и ν_j намного меньше, чем $|\lambda_j|$, мы получаем следующие знаки вещественной и мнимой частей координат вектора Z :

$$\operatorname{Re}(z) = (+ + - ? - -), \quad \operatorname{Im}(z) = (? - + + - -).$$

Здесь символы «?» означают, что из предыдущих формул знак $\operatorname{Re}(z_4)$ нельзя определить однозначно, так как $\operatorname{Re}(z_4) \approx \cos(\pi/2) = 0$, однако в диаграмме (4) присутствуют два подходящих блока: $\{110100\}$ и $\{110000\}$. Аналогично для $\operatorname{Im}(z_1)$, $z_1 = 1$, поэтому знак мнимой части неизвестен, но для $\operatorname{Im}(z)$ в диаграмме (4) тоже найдётся пара подходящих блоков — это блоки $\{001100\}$ и $\{101100\}$. Таким образом, каждый из векторов $\operatorname{Re}(z)$ и $\operatorname{Im}(z)$ лежит в объединении двух блоков из диаграммы (4) и, следовательно, плоскость P_1^2 , натянутая на эти векторы, окажется в Ω_1 . $\square$

Для остальных пар $\lambda_{3,4} = \alpha_3 \pm i\beta_3$ и $\lambda_{5,6} = \alpha_5 \pm i\beta_5$ собственных чисел матрицы M_6 аналогичным образом строятся плоскости $P_3^2 \subset \Omega_3$ и $P_5^2 \subset \Omega_5$ соответственно.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В [6] для широкого класса динамических систем в окрестностях их стационарных точек были сконструированы устойчивые и неустойчивые подмногообразия фазовых портретов. Пусть ξ — векторное поле на Q , задаваемое правыми частями системы (1), S_0 — критическая точка ξ , а $\varphi_t(x)$ — сдвиг вдоль траектории системы (1).

Определение 2. Будем говорить, что $W^+(\xi, S_0)$ — устойчивое многообразие поля ξ в точке S_0 , если

$$W^+(\xi, S_0) = \{x \in Q \mid \varphi_t(x) \rightarrow S_0 \text{ при } t \rightarrow \infty\}.$$

Определение 3. Будем говорить, что $W^-(\xi, S_0)$ — неустойчивое многообразие поля ξ в точке S_0 , если

$$W^-(\xi, S_0) = \{x \in Q \mid \varphi_t(x) \rightarrow S_0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

В случае, если многообразие является устойчивым, траектории системы (1) притягиваются к точке S_0 , в противном случае они отталкиваются от неё.

Определение 4. W^+ и W^- трансверсальны в точке x , если и только если $x \notin W^+ \cap W^-$ или $x \in W^+ \cap W^-$ и $T_x Q = T_x W^+ + T_x W^-$, где $T_x X$ — касательное пространство к многообразию Q .

Следующие две теоремы об устойчивых многообразиях были получены в [6].

Теорема 2 (о локально устойчивом многообразии). Пусть Q является конечномерным C^{r+1} многообразием ($r \geq 1$), ξ — векторное поле на Q , а S_0 — гиперболическая стационарная точка. Тогда существует открытая окрестность стационарной точки $V \subset Q$ такая, что:

- 1) $W^+(\xi|V, S_0) \cap W^-(\xi|V, S_0) = \{S_0\}$;
- 2) $W^+(\xi|V, S_0)$ и $W^-(\xi|V, S_0)$ — это C^r подмногообразия многообразия Q ;
- 3) $W^+(\xi|V, S_0)$ и $W^-(\xi|V, S_0)$ трансверсальны в точке S_0 .

Следствие. В открытой окрестности V гиперболической стационарной точки системы (1) существуют подмногообразия W^+ и $W^- \subset V$.

Определение 5. Отображение $\psi: P \rightarrow Q$ между конечномерными C^r многообразиями P и Q называется погружением, если и только если для каждого $p \in P$ касательное отображение $T_p \psi: T_p P \rightarrow T_{\psi(p)} Q$ инъективно. Подмножество $W \subset Q$ называется C^r -погружённым подмногообразием, если и только если $\psi: P \rightarrow Q$ и $W = \psi(P)$. В этом случае ψ называется параметризацией W , а P , в свою очередь, является параметрическим пространством ψ .

Теорема 3 (о глобально устойчивом многообразии). Пусть Q является компактным C^{r+1} многообразием ($r \geq 1$), ξ — векторное поле на Q , а S_0 — гиперболическая стационарная точка. Тогда $W^+(\xi, S_0)$ и $W^-(\xi, S_0)$ являются C^r -погружёнными подмногообразиями многообразия Q , параметризованные евклидовым пространством.

Пусть $F = \{001100\} \cap \{101100\}$ — общая пятимерная грань двух соседних блоков в диаграмме (4), а $U \approx D^2 \times D^4$ — достаточно малая открытая окрестность стационарной точки S_0 ; здесь двумерный диск $D^2 \subset \Omega_1$ параллелен плоскости P_1^2 (см. (5)), а четырёхмерный диск D^4 параллелен двумерной плоскости $P_3^2 \times P_5^2$. Плоскости $\{P_1^2, P_3^2, P_5^2\}$ порождают всё пространство $\mathbb{R}^6$.

Рассмотрим усечённую грань $F' = F \setminus (F \cap U)$. Траектории всех точек этой грани после прохождения по блокам диаграммы (4) возвращаются в F' . Траектории всех точек четырёхмерного диска D^4 обратно в этот диск не возвращаются. Из рассуждений в п. 2 вытекает следующая

Лемма 3. Неустойчивое многообразие W^- , существование которого показано выше в теоремах об устойчивом многообразии, содержится в области Ω_1 . Размерность этого неустойчивого многообразия равна 2.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что каждый из векторов $\text{Re}(z)$ и $\text{Im}(z)$ лежит в объединении двух блоков диаграммы (4) значит, плоскость $P_1^2 \subset \Omega_1$, натянутая на эти векторы, окажется в W^- , и поэтому $W^- \subset \Omega_1$. $\square$

Из леммы 3 вытекает основной результат этой работы.

Теорема 4. Если S_0 — гиперболическая стационарная точка, то через неё проходит инвариантная поверхность, содержащая цикл системы (1).

Доказательство. Как было отмечено выше, из результатов работы [6] следует, что точка $S_0 \in W^-$ неустойчива. Проведём в W^- дугу L через точку S_0 . Траектории точек этой дуги разворачиваются, оставаясь в W^- , но за границы области Q не выходят, так как область Q инвариантна. Каждая такая траектория пересекается с дугой L по последовательности точек, удаляющихся от S_0 . Поскольку эта последовательность ограничена, её предельная точка $Y \in L \subset W^-$ должна лежать на цикле системы (1), который по построению содержится в инвариантной поверхности W^- . $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе результаты о существовании устойчивых и неустойчивых подмножеств в фазовом портрете несимметричной модели кольцевой генной сети и о редукции размерности этого портрета позволяют упрощать численные эксперименты с такими моделями генных сетей и анализировать поведение траекторий динамических систем, моделирующих функционирование других генных сетей, в том числе и для систем больших размерностей. Например, в работе [1] рассматривалась симметричная система размерности 18, её исследование сводилось к шестимерной плоскости, что помогло обнаружить в этой системе более одного цикла. Подобные вычисления использовались и в работах [3, 11] ввиду симметрии систем, которые там изучались.

Автор выражает искреннюю благодарность Н. Б. Аюповой и В. П. Голубятникову за необходимые советы и обсуждения, анонимному рецензенту за полезные замечания, а также В. Н. Дятлову за техническую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубятников В. П., Кириллова Н. Е. О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 1. С. 54–63; DOI: 10.17377/PAM.2018.18.5
2. Кириллова Н. Е., Миушкина Л. С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Известия АлтГУ. 2019. Т. 108, № 4. С. 82–85; DOI: 10.14258/izvasu(2019)4-12
3. Bukharina T. A., Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E., et al. Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks // SEMR. 2018. V. 15. P. 1271–1283; DOI: 10.17377/semi.2018.15.103
4. Hartman P. Ordinary Differential Equations. N. Y.: Wiley, 1964.
5. Mischaikow K. Topological Techniques for Efficient Rigorous Computations in Dynamics // Acta Numerica. 2002. V. 11. P. 435–477; DOI: 10.1017/S0962492902000065
6. Abraham R., Robbin J. Transversal Mappings and Flows. N. Y.: W. A. Benjamin, 1967.
7. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Казанцев М. В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессилатора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 121–129; DOI: 10.15372/SJNM20170201
8. Elowitz M. B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000. V. 403. P. 335–338.
9. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Квазиустойчивые структуры в кольцевых генных сетях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 682–704; DOI: 10.7868/S0044466918050022
10. Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems // J. Differ. Equ. 1977. V. 25. P. 39–64; DOI: 10.1016/0022-0396(77)90179-6
11. Акиншин А. А., Голубятников В. П. Геометрические характеристики циклов в некоторых симметричных динамических системах // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2012. Т. 12, № 12. С. 3–12.

UDC 514.745.82

ON INVARIANT SURFACES IN GENE NETWORK MODELS

© 2020 N. E. Kirillova

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: kne@math.nsc.ru

Received 12.06.2020, revised 09.08.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. We construct an invariant two-dimensional surface in the phase portrait of a certain six-dimensional dynamical system which is considered as a model for the circular gene network functioning. This invariant surface contains an equilibrium point S_0 of the system, and if S_0 is hyperbolic then this surface contains a cycle of the system. The conditions for the existence of a cycle of this and similar systems were obtained earlier.

Keywords: circular gene network model, phase portrait, cycle, hyperbolic equilibrium point, invariant surface.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.405

REFERENCES

1. Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E. On cycles in models of functioning of circular gene networks. *J. Math. Sci.*, 2020, Vol. 246, No. 6, pp. 779–787; DOI: 10.1007/s10958-020-04780-7
2. Kirillova N. E., Minushkina L. S. About digitization of phase portraits of dynamical systems. *Izv. Altai. Gos. Univ.*, 2019, Vol. 108, No. 4, pp. 82–85 (in Russian); DOI: 10.14258/izvasu(2019)4-12
3. Bukharina T. A., Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E., et al. Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks. *SEMR*, 2018, Vol. 15, pp. 1271–1283; DOI: 10.17377/semi.2018.15.103
4. Hartman P. Ordinary Differential Equations. N. Y.: Wiley, 1964.
5. Mischaikow K. Topological techniques for efficient rigorous computations in dynamics. *Acta Numerica*, 2002. V. 11. P. 435–477; DOI: 10.1017/S0962492902000065
6. Abraham R., Robbin J. Transversal Mappings and Flows. N. Y.: W. A. Benjamin, 1967.
7. Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P., Kazantsev M. V. On the existence of a cycle in an asymmetric model of a molecular repressilator. *Numer. Analys. Appl.*, 2017, Vol. 10, pp. 101–107; DOI: 10.1134/S199542391702001X
8. Elowitz M. B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. *Nature*, 2000, Vol. 403, pp. 335–338.
9. Glyzin S. D., Kolesov A. Y., Rozov N. K. Quasi-stable structures in circular gene networks. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, Vol. 58, pp. 659–679; DOI: 10.1134/S0965542518050093
10. Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems. *J. Differ. Equ.*, 1977, Vol. 25, pp. 39–64; DOI: 10.1016/0022-0396(77)90179-6
11. Akin'shin A. A., Golubyatnikov V. P. Geometrical characteristics of cycles in some symmetrical dynamical systems. *Sibir. Zh. Chist. Prikl. Math.*, 2012, Vol. 12, No. 12, pp. 3–12 (in Russian).