Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. M. Kulikov, E. I. Vorobyov, I. G. Chernykh, V. G. Elbakyan, Application of geodesic grids for modeling the hydrodynamic processes in spherical objects , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 77–87

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.406>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.84.234.179

April 26, 2023, 14:33:21

УДК 519.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СФЕРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

© 2020 И. М. Куликов^{1a}, Э. И. Воробьёв^{2b}, И. Г. Черных^{1c},
В. Г. Элбакян^{3d}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики
СО РАН,

просп. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,

²Институт астрономии, Венский университет, ул. Тюркенишанцштрассе, 17,
г. Вена 1180, Австрия,

³НИИ физики Южного федерального университета,
просп. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия

E-mails: ^akulikov@ssd.sccc.ru, ^beduard.vorobiev@univie.ac.at,
^cchernykh@parbz.sccc.ru, ^dvgelbakyan@sfedu.ru

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.; после доработки 28.04.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Предложен новый численный метод на основе математического аппарата геодезических сеток. Такой подход позволяет моделировать сферические объекты без особенностей, которые имеют место при использовании сферических или цилиндрических координат. Детально описан метод решения гиперболических уравнений, который был расширен для решения уравнений гидродинамики и протестирован на задаче Седова о точечном взрыве. Разработанный подход к построению сеток позволил получить инвариантное относительно поворота численное решение в декартовых координатах, что позволяет достаточно эффективно использовать такой подход для моделирования произвольных сферических астрофизических объектов.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная астрофизика, геодезические сетки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.406

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование является основным инструментом для изучения образования и эволюции астрофизических объектов. В последнее время с помощью аппарата математического моделирования получен ряд важных результатов в изучении протопланетных систем [1, 2] и звёзд [3–5]. Геометрия большинства астрофизических объектов — звёзд, молекулярных облаков, протопланетных систем имеет сферическую, эллипсоидальную или дисковидную форму, что приводит к естественному использованию сферических или цилиндрических координат. В первую очередь это связано с инвариантностью численного решения, что особенно важно в задачах столкновения галактик [6] и коллапса молекулярных облаков [7, 8], а во вторую очередь с естественностью описания объектов в цилиндрической или сферической симметрии. В то же время использование таких координат приводит к особенностям в точках

и осях симметрии, что значительно усложняет их использование для моделирования астрофизических объектов. Одним из решений является использование подвижных сеток на основе полигонального подхода, как, например, в работе [9]. На основе такого подхода разработано несколько кодов. Кратко опишем некоторые из них.

AREPO [10]. В коде используется технология подвижных сеток, на основе триангуляции Вороного и Делоне с регуляризацией Ллойда [11]. Такой подход позволяет адаптировать сетку под решение, при этом в отличие от метода сглаженных частиц в основе кода находится эйлеров подход. В качестве основного решателя используется классический метод Годунова и MUSCL схема. Это связано с тем, что достаточно тяжело построить схему более высокого порядка на подвижной сетке. Такая проблема может быть решена с использованием метода конечных элементов в формулировке «разрывный метод Галеркина» [12, 13]. При всех достоинствах такого подхода он достаточно тяжёлый в плане вычислительных затрат, а также остаётся открытым вопрос о качестве решения в областях, описываемых менее подробными сеточными ячейками. Тем не менее, код AREPO является одним из наиболее используемых в мире в данный момент.

BETHE-HYDRO [14]. В основе данного кода лежит лагранжево-эйлеровый подход. Уравнения гидродинамики формулируются в лагранжевой неконсервативной форме и решаются на неструктурированной сетке. В основе численного метода — операторный подход, который позволяет построить (и в работе это построено) согласованные схемы для аппроксимации операторов градиента и дивергенции. К сожалению, код не был развит на трёхмерный случай.

GIZMO [15]. В программном коде разработан и реализован новый бессеточный подход к решению уравнений гравитационной газовой динамики. Подход основан на комбинации классических сеточных методов и метода сглаженных частиц. Метод состоит в использовании уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах, которые с использованием вариационного принципа Галеркина домножаются на пробные функции. Особенностью этих функций является тот факт, что они не привязаны к расчётной сетке, а привязаны к отдельным частицам, аналогичным по своей природе частицам метода сглаженных частиц. Для определения значений на границах области используется решение задачи Римана с использованием MUSCL схемы.

Сильным качеством и одновременно недостатком указанных выше кодов является их универсальность, приводящая к чрезвычайно дорогим вычислительным затратам. В концепции со-дизайна вычислительной модели [16] и её программной реализации для массивно-параллельных архитектур [17] мы говорим об адаптации задачи на уровне формализации к физической постановке задачи. Это в первую очередь связано с геометрией расчётной области и расчётной сетки. Одним из современных и эффективных подходов является использование геодезических сеток, которые позволяют избежать особенностей, связанных со сферическими и цилиндрическими координатами. Подробно такой подход описан в работах Диншоу Бальзары, например в [18]. Сериализация треугольной сетки от поверхности до центральной ячейки позволяет использовать регулярную декомпозицию вычислений, в том числе на специальные ускорители [19, 20].

В первом разделе настоящей статьи приведём основные алгоритмы и расчётные формулы для построения геодезической сетки. Второй раздел посвящён выводу численного метода решения гиперболических уравнений. В третьем разделе приведено решение классической задачи Седова о точечном взрыве на основе реализации геодезических сеток для решения уравнений гидродинамики.

1. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТОК ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В основе метода геодезических сеток лежит использование сериализации от максимального радиуса до центральной ячейки поверхности многогранника, построенного на основе из-

мельчения поверхности икосаэдра. Пример измельчения поверхности икосаэдра показан на рис. 1.

Рис. 1. Последовательность измельчения треугольной сетки на поверхности икосаэдра. Исходный икосаэдр (а) — 20 граней, первое разбиение икосаэдра (б) — 80 граней, второе разбиение икосаэдра (в) — 320 граней

Главным преимуществом использования таких сеток является инвариантность решения относительно произвольного поворота. Отметим, что все ячейки на поверхности являются равносторонними треугольниками. Это обстоятельство позволяет говорить об отсутствии выделенного направления в расчётной сетке при использовании вычислений в декартовых координатах. Далее приведём основные формулы и алгоритмы построения компонентов расчётной сетки.

Вначале опишем способ хранения исходного икосаэдра. Для этого введём V_i , $i = \overline{1, 12}$, — вершины многоугольника; L_j , $j = \overline{1, 30}$, — рёбра многоугольника; T_k , $k = \overline{1, 20}$, — треугольники, составляющие поверхность икосаэдра. Приведём формулы для определения вершин многоугольника:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(0, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), & V_2 &= \left(0, 1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), & V_3 &= \left(0, -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\ V_4 &= \left(0, -1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), & V_5 &= \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right), & V_6 &= \left(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ V_7 &= \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right), & V_8 &= \left(-1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right), & V_9 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 1\right), \\ V_{10} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, -1\right), & V_{11} &= \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 1\right), & V_{12} &= \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, -1\right). \end{aligned}$$

Треугольники в порядке точек A, B, C определим через вершины V_i и номера соседних треугольников, смежных через стороны AB, AC, BC :

$$\begin{aligned} T_1 &= \langle V_1, V_3, V_9; 2, 4, 12 \rangle, & T_2 &= \langle V_1, V_3, V_{11}; 1, 5, 13 \rangle, & T_3 &= \langle V_1, V_5, V_7; 4, 5, 8 \rangle, \\ T_4 &= \langle V_1, V_5, V_9; 3, 1, 17 \rangle, & T_5 &= \langle V_1, V_7, V_{11}; 3, 2, 19 \rangle, & T_6 &= \langle V_2, V_4, V_{10}; 7, 9, 15 \rangle, \\ T_7 &= \langle V_2, V_4, V_{12}; 6, 10, 16 \rangle, & T_8 &= \langle V_2, V_5, V_7; 9, 10, 3 \rangle, & T_9 &= \langle V_2, V_5, V_{10}; 8, 6, 17 \rangle, \\ T_{10} &= \langle V_2, V_7, V_{12}; 8, 7, 19 \rangle, & T_{11} &= \langle V_3, V_6, V_8; 12, 13, 14 \rangle, & T_{12} &= \langle V_3, V_6, V_9; 11, 1, 18 \rangle, \\ T_{13} &= \langle V_3, V_8, V_{11}; 11, 2, 20 \rangle, & T_{14} &= \langle V_4, V_6, V_8; 15, 16, 11 \rangle, & T_{15} &= \langle V_4, V_6, V_{10}; 14, 6, 18 \rangle, \\ T_{16} &= \langle V_4, V_8, V_{12}; 14, 7, 20 \rangle, & T_{17} &= \langle V_5, V_9, V_{10}; 4, 9, 18 \rangle, & T_{18} &= \langle V_6, V_9, V_{10}; 12, 15, 17 \rangle, \\ T_{19} &= \langle V_7, V_{11}, V_{12}; 5, 10, 20 \rangle, & T_{20} &= \langle V_8, V_{11}, V_{12}; 13, 16, 19 \rangle. \end{aligned}$$

Определим также рёбра L_j через вершины V_i :

$$\begin{aligned} L_1 &= [V_1, V_3], & L_2 &= [V_1, V_5], & L_3 &= [V_1, V_7], & L_4 &= [V_1, V_9], & L_5 &= [V_1, V_{11}], \\ L_6 &= [V_2, V_4], & L_7 &= [V_2, V_5], & L_8 &= [V_2, V_7], & L_9 &= [V_2, V_{10}], & L_{10} &= [V_2, V_{12}], \\ L_{11} &= [V_3, V_6], & L_{12} &= [V_3, V_8], & L_{13} &= [V_3, V_9], & L_{14} &= [V_3, V_{11}], & L_{15} &= [V_4, V_6], \\ L_{16} &= [V_4, V_8], & L_{17} &= [V_4, V_{10}], & L_{18} &= [V_4, V_{12}], & L_{19} &= [V_5, V_7], & L_{20} &= [V_5, V_9], \\ L_{21} &= [V_5, V_{10}], & L_{22} &= [V_6, V_8], & L_{23} &= [V_6, V_9], & L_{24} &= [V_6, V_{11}], & L_{25} &= [V_7, V_{11}], \\ L_{26} &= [V_7, V_{12}], & L_{27} &= [V_8, V_{11}], & L_{28} &= [V_8, V_{12}], & L_{29} &= [V_9, V_{10}], & L_{30} &= [V_{11}, V_{12}]. \end{aligned}$$

На рис. 2 изображено местоположение некоторых вершин. Координаты многогранника выбраны так, что длина рёбер равна двум.

Рис. 2. Базовый икосаэдр

Число вершин V_n , рёбер L_n и треугольников T_n при n -кратном дроблении поверхности задаётся уравнениями

$$T_n = 20 \times 4^n, \quad L_n = 30 \times 4^n, \quad V_n = 12 + 30 \times \sum_{k=0}^{n-1} 4^k.$$

Для получения набора вершин, рёбер и треугольников при $(n+1)$ -кратном дроблении будем считать, что нам известны наборы вершин V_n , рёбер L_n и треугольников T_n при n -кратном дроблении. Множество вершин V_{n+1} формируется из уже известных вершин V_n и середин рёбер L_n , спроецированных на сферу. Двукратное увеличение рёбер на первом этапе достигается дроблением рёбер, полученных на предыдущем шаге. Второй этап формирования множества рёбер осуществляется разбиением треугольников и добавлением внутренних рёбер разбитого на четыре части треугольника. Набор треугольников T_{n+1} формируется четвёрками с соответствующей нумерацией. Это позволяет достаточно легко определить соседние треугольники.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТКАХ

Сформулируем гиперболические уравнения в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} + \frac{\partial h(u)}{\partial z} = 0,$$

где u — вектор консервативных переменных, функции $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ — потоки по соответствующим направлениям. Дополнительно будем рассматривать вектор физических переменных $q(u)$. Считаем, что существует простая процедура их восстановления из вектора консервативных переменных. Рассмотрим произвольную ячейку с номером i , для описания множества соседних ячеек используем индекс j . Соседние ячейки достаточно просто определяются по разбиению сферы, описанному в предыдущем разделе. Определим внешние нормали n_{ij} ячейки i по направлению к ячейкам j при известном векторе $\overrightarrow{M_i M_{ij}}$ по формулам

$$n_{ij}^0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x - A_x & B_y - A_y & B_z - A_z \\ C_x - A_x & C_y - A_y & C_z - A_z \end{vmatrix},$$

где A , B и C — вершины грани между ячейками i и j ; M_i — центр ячейки i ; M_{ij} — центр грани между ячейками i и j ; внешняя нормаль определяется как

$$n_{ij} = \text{sgn}(\overrightarrow{M_i M_{ij}}, \overrightarrow{AB}) n_{ij}^0.$$

Также в расчётах будут необходимы площади граней и объёмы ячеек, которые будем рассчитывать с помощью триангуляции ячеек и граней между ними. Для нахождения площади треугольника ABC используем формулу Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $a = \|\vec{BC}\|$, $b = \|\vec{AC}\|$, $c = \|\vec{AB}\|$ и $p = \frac{a+b+c}{2}$, а объём тетраэдра $ABCD$ рассчитаем по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} B_x - A_x & B_y - A_y & B_z - A_z \\ C_x - A_x & C_y - A_y & C_z - A_z \\ D_x - A_x & D_y - A_y & D_z - A_z \end{pmatrix} \right|.$$

Проинтегрируем решаемые уравнения и рассмотрим конечный объём V_i с границей $\Gamma_i = \bigcup_j S_{ij}$, где S_{ij} — площадь грани между ячейками i и j . Получим

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{V_i} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} + \frac{\partial h(u)}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Используя формулу Остроградского, запишем интегральные уравнения в виде

$$V_i \frac{du}{dt} + \oint_{\Gamma_i} (fn^x + gn^y + hn^z) dS = 0.$$

Конечно-объёмная схема имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \sum_j \frac{S_{ij}}{V_i} (F_{ij} n_{ij}^x + G_{ij} n_{ij}^y + H_{ij} n_{ij}^z) = 0,$$

где F_{ij} , G_{ij} , H_{ij} — решение задачи Римана $\mathcal{R} = (w, u^L, u^R)$ для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w(u)}{\partial x} = 0$$

с начальными условиями $u(x, t) = u^L$ при $x < 0$ и $u(x, t) = u^R$ при $x \geq 0$. В качестве решения задачи Римана будем использовать схему типа Рusanова [21, 22]

$$\mathcal{R}(w, u^L, u^R) = \frac{w(u^L) + w(u^R)}{2} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial w}{\partial u} \right| (u^L - u^R).$$

Конечно-объёмная схема в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \sum_j \frac{S_{ij}}{V_i} \left(\frac{(F_i + F_j)n_{ij}^x + (G_i + G_j)n_{ij}^y + (H_i + H_j)n_{ij}^z}{2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \max \left(\frac{\partial F(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial G(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial H(u_i)}{\partial u} \right) (u_i - u_j) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для определения шага по времени τ определим для каждой ячейки минимальные расстояния между центрами граней:

$$d_i = \min_{jk} |\overrightarrow{M_{ik}M_{ij}}|.$$

Тогда шаг по времени можно вычислить по формуле

$$\tau = CFL \min_i \left(\frac{d_i}{\max \left(\frac{\partial F(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial G(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial H(u_i)}{\partial u} \right)} \right),$$

где $CFL < 1$ — число Куранта.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТКАХ

Будем рассматривать уравнения гидродинамики в переопределённой форме в виде законов сохранения массы, момента импульса, полной энергии и энтропии. Такой подход эффективно использован в работах [23–26] в части достижения неотрицательного значения давления в областях с высоким числом Маха и гарантирует неубывание энтропии в численном методе. Использование уравнения для энтропии позволяет записать систему в дивергентной векторной форме, для которой в разделе 2 был изложен численный метод:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ \rho S \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_x + p \\ \rho u_y u_x \\ \rho u_z u_x \\ \rho S u_x \\ (\rho E + p) u_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y u_y + p \\ \rho u_z u_y \\ \rho S u_y \\ (\rho E + p) u_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z \\ \rho u_y u_z \\ \rho u_z u_z + p \\ \rho S u_z \\ (\rho E + p) u_z \end{pmatrix} = 0,$$

где ρ — плотность газа, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор скорости, S — функция энтропии, $p = S\rho^\gamma$ — давление газа, $E = p/(\gamma - 1) + \rho \vec{u}^2/2$ — полная энергия, $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты. Достоинства и недостатки использования уравнения энтропии также подробно обсуждены в работе [27]. На рис. 3 изображена поверхность центральной ячейки расчётной области; для построения расчётной области используется сериализация центральной расчётной ячейки.

Сериализация центральной ячейки на примере выделенного треугольника на её поверхности показан на рис. 4. Процесс сериализации состоит в гомотетии каждого треугольника на поверхности центральной сферы с заданным шагом по радиусу. Затем соответствующие узлы треугольника соединяются, что даёт последовательность призм, сходящуюся к центральной

Рис. 3. Поверхность центральной ячейки

Рис. 4. Сериализация центральной ячейки

ячейке. Также на рис. 4 изображены две соседние ячейки i и j , и выделена их общая грань с вектором нормали $\vec{n}_{ij}$.

Задача Седова о точечном взрыве является основной тестовой задачей для численных методов и их программных реализаций при решении задач о взрыве сверхновых звёзд на основе коллапса ядра. Первоначальная инжекция энергии соответствует выделенной внутренней энергии ядра при коллапсе звезды. Мы будем рассматривать тест в безразмерных параметрах. Для этого рассмотрим область, ограниченную радиусом $R = 0,5$, используя показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, соответствующий нейтральному атомарному водороду, начальную плотность в области $\rho_0 = 1$ и начальное давление $p_0 = 10^{-5}$. Величина инжектируемой энергии в начальный момент времени равна $E_0 = 0,6$. Область взрыва ограничена радиусом $r = 0,01$, что соответствует центральной многогранной ячейке. Профиль плотности и момента импульса на момент времени $t = 0,05$ изображён на рис. 5.

Мы провели тестирование гидродинамического метода в двух постановках: первый тест (крестики на рис. 5), когда центр взрыва расположен в начале координат, который совпадает с центром сферической симметрии расчётной сетки, и второй тест (кружочки на рис. 5), когда центр взрыва смещён относительно центра симметрии расчётной сетки на 20%. Как мы видим, результаты моделирования для обеих постановок задач достаточно близки, что говорит об эффективности использования геодезических сеток и для несферических объектов. Также полученные результаты говорят о возможности численного метода получать инвариантные относительно поворота решения.

Тест Седова о точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность

Рис. 5. Плотность и момент импульса, полученные при численном решении задачи Седова о точечном взрыве (xxx — тест 1, oo — тест 2), сплошной линией изображено точное решение

метода воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха, что происходит при взрыве сферических объектов типа массивных звёзд. Скорость звука среды достаточно мала, поэтому число Маха достигает значения $M \approx 1500$. Как видно, разработанный численный метод достаточно хорошо воспроизводит фронт ударной волны. Максимальная величина плотности немного меньше точного значения, что связано с диссипацией ударной волны из-за использования метода первого порядка точности. В то же время метод очень хорошо передаёт профиль момента импульса, хотя также имеется незначительная диссипация на фронте ударной волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан численный метод решения уравнений гиперболических уравнений с использованием аппарата геодезических сеток для моделирования эволюции сферических систем. Разработанный в статье численный метод и подход к построению сеток позволил получить инвариантное относительно поворота численное решение в декартовых координатах, что в свою очередь позволяет достаточно эффективно использовать такой подход для моделирования произвольных сферических астрофизических объектов. На задаче Седова был верифицирован построенный численный метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadam K., Vorobyov E., Regaly Z., Kospal A., Abraham P. Dynamical gaseous rings in global simulations of protoplanetary disk formation // *Astrophys. J.* 2019. V. 882, N 2. Article Number 96.
2. Akiyama E., Vorobyov E., Baobabu Liu H., et al. A tail structure associated with a protoplanetary disk around SU Aurigae // *Astronom. J.* 2019. V. 157, N 4. Article Number 165.
3. Meyer D. M., Vorobyov E. I., Elbakyan V. G. Burst occurrence in young massive stellar objects // *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.* 2019. V. 482, N 4. P. 5459–5476.
4. Regaly Z., Vorobyov E. The circumstellar disk response to the motion of the host star // *Astronomy and Astrophys.* 2017. V. 601. Article Number A24.
5. Baraffe I., Elbakyan V. G., Vorobyov E. I., Chabrier G. Self-consistent evolution of accreting low-mass stars and brown dwarfs // *Astronomy and Astrophys.* 2017. V. 597. Article Number A19.
6. Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2011. V. 194, N 2. Article Number 47.

7. Kulikov I., Lazareva G., Snytnikov A., Vshivkov V. Supercomputer simulation of an astrophysical object collapse by the fluids-in-cell method // *Lecture Notes in Comput. Sci.* 2009. V. 5698. P. 414–422.
8. Kulikov I. The numerical modeling of the collapse of molecular cloud on adaptive nested mesh // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 1103. Article Number 012011.
9. Ardeljan N., Bisnovatyi-Kogan G., Moiseenko S. An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies // *Astronomy and Astrophys.* 1996. V. 115. P. 573–594.
10. Springel V. E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh // *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* 2010. V. 401. P. 791–851.
11. Lloyd S. Least squares quantization in PCM // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1982. V. 28, N 2. P. 129–137.
12. Mocz P., Vogelsberger M., Sijacki D., Pakmor R., Hernquist L. A discontinuous Galerkin method for solving the fluid and magnetohydrodynamic equations in astrophysical simulations // *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.* 2014. V. 437, N 1. P. 397–414.
13. Schaal K., et al. Astrophysical hydrodynamics with a high-order discontinuous Galerkin scheme and adaptive mesh refinement // *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.* 2015. V. 453, N 4. P. 4278–4300.
14. Murphy J., Burrows A. BETHE-Hydro: An arbitrary lagrangian-eulerian multidimensional hydrodynamics code for astrophysical simulations // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2008. V. 179. P. 209–241.
15. Hopkins P. A new class of accurate, mesh-free hydrodynamic simulation methods // *Monthly Not. Royal Astron. Soc.* 2015. V. 450, N 1. P. 53–110.
16. Glinsky B., Kulikov I., Chernykh I., et al. The co-design of astrophysical code for massively parallel supercomputers // *Lecture Notes in Comput. Sci.* 2016. V. 10049. P. 342–353.
17. Kulikov I., Chernykh I., Glinskiy B., Weins D., Shmelev A. Astrophysics simulation on RSC massively parallel architecture // *Proc. – 2015 IEEE/ACM 15 International Symposium on Cluster, Cloud, and Grid Computing, CCGrid 2015. Institute Electric. Electron. Engrg. Inc.* 2015. P. 1131–1134; DOI: 10.1109/CCGrid.2015.102
18. Balsara D., Florinski V., Garain S., Subramanian S., Gurski K. Efficient, divergence-free, high-order MHD on 3D spherical meshes with optimal geodesic meshing // *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.* 2019. V. 487, N 1. P. 1283–1314.
19. Kulikov I. GPUPEGAS: A new GPU-accelerated hydrodynamic code for numerical simulations of interacting galaxies // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2014. V. 214. Article Number 12.
20. Kulikov I. M., Chernykh I. G., Snytnikov A. V., Glinskiy B. M., Tutukov A. V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers // *Comput. Phys. Comm.* V. 186. P. 71–80.
21. Kulikov I. M., Chernykh I. G., Glinskiy B. M., Protasov V. A. An efficient optimization of Hll method for the second generation of Intel Xeon Phi Processor // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, N 4. P. 543–551.
22. Kulikov I. M., Chernykh I. G., Tutukov A. V. A new parallel Intel Xeon Phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, N 9. P. 1207–1216.
23. Balsara D., Spicer D. Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamic simulations // *J. Comput. Phys.* 1999. V. 148. P. 133–148.
24. Springel V., Hernquist L. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation // *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.* 2002. V. 333. P. 649–664.
25. Godunov S., Kulikov I. Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee // *Comput. Math. Math. Phys.* 2014. V. 54. P. 1012–1024.
26. Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations, dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests and model problems // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 2019. V. 243. Article Number 4.
27. Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 317. P. 318–346.

UDC 519.4

APPLICATION OF GEODESIC GRIDS FOR MODELING THE HYDRODYNAMIC PROCESSES IN SPHERICAL OBJECTS

© 2020 I. M. Kulikov^{1a}, E. I. Vorobyov^{2b}, I. G. Chernykh^{1c},
V. G. Elbakyan^{3d}

¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Department of Astrophysics, University of Vienna,
Tuerkenschanzstrasse 17, Vienna 1180, Austria,*

³*Research Institute of Physics, Southern Federal University,
pr. Stachki 194, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mails: ^akulikov@ssd.sccc.ru, ^beduard.vorobiev@univie.ac.at,
^cchernykh@parbz.sccc.ru, ^dvgelbakyan@sfedu.ru

Received 14.02.2020, revised 28.04.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. We propose a new numerical method that bases on the mathematical apparatus of geodesic grids. This approach allows us to simulate spherical objects without any singularities that occur in using the spherical or cylindrical coordinates. Solution of the hyperbolic equations is described in detail. The method is expanded to solve the equations of hydrodynamics and tested on the Sedov point explosion problem. The numerical method and the approach to grid construction make it possible to compute a rotation invariant solution in Cartesian coordinates. This in turn allows us to use this approach effectively for simulating various spherical astrophysical objects.

Keywords: numerical simulation, computational astrophysics, geodesic grid.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.406

REFERENCES

1. Kadam K., Vorobyov E., Regaly Z., Kospal A., Abraham P. Dynamical gaseous rings in global simulations of protoplanetary disk formation. *Astrophys. J.*, 2019, Vol. 882, No. 2, article No. 96.
2. Akiyama E., Vorobyov E., Baobabu Liu H., et al. A tail structure associated with a protoplanetary disk around SU Aurigae. *Astronom. J.*, 2019, Vol. 157, No 4, article No. 165.
3. Meyer D.M., Vorobyov E.I., Elbakyan V.G. Burst occurrence in young massive stellar objects. *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.*, 2019, Vol. 482, No 4, pp. 5459–5476.
4. Regaly Z., Vorobyov E. The circumstellar disk response to the motion of the host star. *Astronomy and Astrophys.*, 2017, Vol. 601, article No. A24.
5. Baraffe I., Elbakyan V.G., Vorobyov E.I., Chabrier G. Self-consistent evolution of accreting low-mass stars and brown dwarfs. *Astronomy and Astrophys.*, 2017, Vol. 597, article No. A19.
6. Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A. Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2011, Vol. 194, No. 2, article No. 47.
7. Kulikov I., Lazareva G., Snytnikov A., Vshivkov V. Supercomputer simulation of an astrophysical object collapse by the fluids-in-cell method. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2009, Vol. 5698, pp. 414–422.

8. Kulikov I. The numerical modeling of the collapse of molecular cloud on adaptive nested mesh. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, Vol. 1103, article No. 012011.
9. Ardeljan N., Bisnovatyi-Kogan G., Moiseenko S. An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies. *Astronomy and Astrophys.*, 1996, Vol. 115, pp. 573–594.
10. Springel V. E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. *Monthly Not. Royal Astron. Soc.*, 2010, Vol. 401, pp. 791–851.
11. Lloyd S. Least squares quantization in PCM. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1982, Vol. 28, No. 2, pp. 129–137.
12. Mocz P., Vogelsberger M., Sijacki D., Pakmor R., Hernquist L. A discontinuous Galerkin method for solving the fluid and magnetohydrodynamic equations in astrophysical simulations. *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.*, 2014, Vol. 437, No. 1, pp. 397–414.
13. Schaal K., et al. Astrophysical hydrodynamics with a high-order discontinuous Galerkin scheme and adaptive mesh refinement. *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.*, 2015, Vol. 453, No. 4, pp. 4278–4300.
14. Murphy J., Burrows A. BETHE-Hydro: An arbitrary lagrangian-eulerian multidimensional hydrodynamics code for astrophysical simulations. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2008, Vol. 179, pp. 209–241.
15. Hopkins P. A new class of accurate, mesh-free hydrodynamic simulation methods. *Monthly Not. Royal Astron. Soc.*, 2015, Vol. 450, No. 1, pp. 53–110.
16. Glinsky B., Kulikov I., Chernykh I., et al. The co-design of astrophysical code for massively parallel supercomputers. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2016, Vol. 10049, pp. 342–353.
17. Kulikov I., Chernykh I., Glinskiy B., Weins D., Shmelev A. Astrophysics simulation on RSC massively parallel architecture. Proc. – 2015 IEEE/ACM 15 International Symposium on Cluster, Cloud, and Grid Computing, CCGrid 2015. *Institute Electric. Electron. Engrg. Inc.*, 2015, pp. 1131–1134; DOI: 10.1109/CCGrid.2015.102
18. Balsara D., Florinski V., Garain S., Subramanian S., Gurski K. Efficient, divergence-free, high-order MHD on 3D spherical meshes with optimal geodesic meshing. *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.*, 2019, Vol. 487, No. 1, pp. 1283–1314.
19. Kulikov I. GPUPEGAS: A new GPU-accelerated hydrodynamic code for numerical simulations of interacting galaxies. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2014, Vol. 214, article No. 12.
20. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Snytnikov A.V., Glinskiy B.M., Tutukov A.V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers. *Comput. Phys. Comm.*, Vol. 186, pp. 71–80.
21. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A. An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi Processor // *Lobachevskii J. Math.* 2018. Vol. 39, No. 4, pp. 543–551.
22. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Tutukov A.V. A new parallel Intel Xeon Phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, Vol. 39, No. 9, pp. 1207–1216.
23. Balsara D., Spicer D. Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamic simulations. *J. Comput. Phys.*, 1999, Vol. 148, pp. 133–148.
24. Springel V., Hernquist L. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation. *Monthly Not. Royal Astronom. Soc.*, 2002, Vol. 333, pp. 649–664.
25. Godunov S., Kulikov I. Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, Vol. 54, pp. 1012–1024.
26. Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations, dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests and model problems. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2019, Vol. 243, article No. 4.
27. Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows. *J. Comput. Phys.*, 2016, Vol. 317, pp. 318–346.