Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Mikhailov, A. Yu. Chudnovsky, Asymptotic expansion of the solution of the equation of a slow axisymmetric electrovortex flow between two planes, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 88–100

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.407>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 13:07:19

УДК 51-72

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

© 2020 Е. А. Михайлов^{1а}, А. Ю. Чудновский^{2б}¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, 1, г. Москва 119991, Россия,²АО «Латво», ул. Ганибу Дамбис, 53, г. Рига LV-1005, ЛатвияE-mails: ^аea.mikhajlov@physics.msu.ru, ^бeivf19@gmail.comПоступила в редакцию 13.05.2020 г.; после доработки 13.05.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Электровихревые течения представляют большой интерес как с точки зрения теоретической магнитной гидродинамики, так и для приложений. Они возникают при прохождении электрического тока переменной плотности через проводящую среду (например, жидкий металл). Взаимодействие тока с собственным магнитным полем индуцирует вихревую электромагнитную силу, которая вызывает вихревое течение жидкости. В качестве модельной задачи мы рассматриваем стационарное течение между двумя параллельными плоскостями. Оно описано с помощью функции тока, для которой получается нелинейное уравнение в частных производных четвёртого порядка. Для не слишком больших значений параметра электровихревого течения задача исследуется с помощью асимптотического разложения решения в ряд по его степеням. Представлен процесс последовательного получения приближений различного порядка. Приведена картина течения, которую можно получить, ограничившись двумя первыми слагаемыми. Показано, что такое асимптотическое разложение очень близко к численному решению задачи.

Ключевые слова: электровихревые течения, малые числа Рейнольдса, уравнение Навье — Стокса, асимптотическое разложение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.407

ВВЕДЕНИЕ

Электровихревые течения (ЭВТ) возникают в проводящей среде (например, жидком металле), через которую протекает электрический ток. Ток взаимодействует с собственным магнитным полем и порождает электромагнитную силу, которая во многих случаях имеет вихревой характер и вызывает вихревые движения среды. ЭВТ представляют большой интерес для технологических приложений таких, как электросварка, электрошлаковый переплав, дуговые печи, печи для плавки флюсов, солей и др. Систематические исследования ЭВТ были начаты в 70-е годы и с этого времени они интенсивно изучались в Институте физики (г. Рига) [1, 2], Институте механики сплошных сред (г. Пермь) [3], Объединённом институте высоких температур (г. Москва) [4], а также в Шеффилдском университете (Англия) [5, 6] и в Университете штата Колорадо (США). Приложения к технологическим процессам поддерживали Всесоюзный научно-исследовательский институт электротермического оборудования (ВНИИЭТО, г. Москва) [7], Институт электросварки им. Е. О. Патона (г. Киев) [8], а также многочисленные

предприятия, в том числе за рубежом, которые осуществляли численные расчёты конкретных электроагрегатов и внедрение полученных результатов. Начиная с 90-х годов и в наше время исследование ЭВТ и их приложений к электрометаллургии продолжилось в России [9], Латвии [10, 11], Украине [12], Германии [13] и в других странах мира.

Первая задача о медленном ЭВТ около точечного источника тока была сформулирована и решена С. Лундквистом [14]. Позднее особенности такого типа течений изучали К. Созоу [15], В. В. Бояревич с соавторами [1], В. Штерн [16] и другие авторы. К. Созоу и У. Пикеринг [5, 6] с позиций математической физики построили разложение решения для течения в полусфере (с бесконечно малым электродом либо в случае плоского электрода) с помощью аппарата специальных функций. И. О. Тепляков, Е. А. Михайлов и К. Ю. Малышев изучили [17, 18] ЭВТ в полусфере с центральным электродом конечных размеров. Авторы показали, что точное решение в стоковом режиме может быть описано с помощью одной-двух специальных функций, которые получаются при разложении решения по собственным функциям определённого оператора. Общий метод построения решений для медленных ЭВТ изложен в [1].

В. Бояревич [19] изучал нелинейное автомодельное осесимметричное ЭВТ между параллельными плоскостями путём разложения решения в ряд по степеням параметра течения в постоянном токе. В работе [20] этот же метод был использован для случая, когда электромагнитная сила возбуждается переменным током и зависит от толщины скин-слоя. В [11] численно изучалось возникновение автоколебаний в нестационарной постановке задачи об ЭВТ между плоскостями.

С развитием вычислительной техники и стандартных пакетов для решения уравнений гидродинамики исследования стали все чаще носить численный характер, среди которых отметим работы [21–23]. В отличие от численных результатов, которые описывают ЭВТ с учётом большого числа конструктивных деталей электроагрегата, решения аналитических, асимптотических и автомодельных задач показывают в деталях физические эффекты, появления которых можно ожидать во всех ваннах агрегатов с подобными геометрией и условиями токоподвода. В настоящей работе исследуется стационарное осесимметричное ЭВТ в слое проводящей жидкости между двумя твёрдыми параллельными плоскостями. Задача моделирует приосевое течение в цилиндрической ванне между двумя электродами, плоские торцы которых касаются жидкого металла сверху и снизу, а ток замыкается на условную цилиндрическую поверхность большого радиуса. Ток распространяется от верхней плоскости вниз и осесимметрично натекает в окрестности критической точки на условную срединную плоскость, которая делит по высоте область течения на две симметричные части (рис. 1). От нижней плоскости электрический ток распространяется таким же образом, натекая снизу на ту же критическую точку (срединную плоскость). Таким образом, картина растекания тока имеет вид осесимметричных встречных токовых струй, зеркально-симметричных относительно срединной плоскости. За счёт этого в окрестности оси возбуждаются ЭВТ, которые также имеют форму встречных осесимметричных струй проводящей жидкости. Течение описывается с помощью уравнений магнитной гидродинамики в предположениях об однородности среды и о пренебрежимо малой тепловой конвекции. Кроме того, используется электродинамическое приближение, согласно которому векторное произведение скорости течения и магнитного поля достаточно мало (индуцированные токи малы по сравнению с током проводимости). Поэтому закон Ома записывается в форме $\vec{J} = \lambda \vec{E}$ ($\vec{J}$ — плотность тока, λ — проводимость, $\vec{E}$ — напряжённость электрического поля). Как численные исследования, так и эксперименты показывают, что ЭВТ при не слишком большом значении силы тока за достаточно короткое время переходят к постоянному распределению скоростей, поэтому имеет смысл поиск стационарного решения. В математической физике достаточно широкое распространение получили асимптотические методы решения нелинейных задач [24, 25]. В случае медленных течений можно строить приближённые решения, которые представляют собой асимптотические разложения по степеням числа Рейнольдса или связанного с ним параметра ЭВТ, которые можно считать в данном

случае достаточно малыми.

Мы приводим основное уравнение, описывающее течение, в котором учтены осевая симметрия задачи и симметрия растекания тока относительно срединной плоскости. После этого мы заменяем уравнение переноса импульса на уравнение переноса завихренности, что повышает порядок задачи, но упрощает процесс дальнейшего решения. Наконец, мы описываем процесс получения решения уравнений и поиска слагаемых, соответствующих различным степеням параметра ЭВТ. После этого мы оцениваем применимость данного приближения для различных значений параметра задачи. Затем приводятся графики поля скоростей, показывающие характер течения в приосевой области, которые могут быть получены и проверены как в лабораторном эксперименте, так и некоторых реальных технологиях.

Рис. 1. Примерная схема растекания электрического тока в окрестности оси симметрии

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Приведём вывод основных уравнений, которые описывают движение жидкого металла в приосевой области между поверхностями двух электродов. Они получаются из уравнений Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости [26]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} + \eta \Delta \vec{V}, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (2)$$

уравнений Максвелла для постоянного тока [27]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3)$$

и закона Ома в электродинамическом приближении:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

где $\vec{V}$ — скорость, ρ — плотность среды, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, η — коэффициент кинетической вязкости.

Удобно взять операцию ротора от обеих частей равенства (1) [1, 26]. Это позволяет избавиться от необходимости определения давления, а уравнение сводится к выражению

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{W} = \vec{\nabla} \times (\vec{W} \times \vec{V}) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \times (\vec{J} \times \vec{B}), \quad (4)$$

которое по сути является уравнением переноса для вектора завихренности

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (5)$$

Будем рассматривать осесимметричное течение без азимутального вращения ($V_\varphi = 0$). В случае несжимаемой жидкости (2) поле скоростей и завихренность определяется [28] гидродинамической функцией тока ψ :

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = -\frac{1}{r} \hat{A} \psi \vec{e}_\varphi, \quad (7)$$

где $\hat{A}$ — дифференциальный оператор, действие которого на функцию описывается следующим образом:

$$\hat{A} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (8)$$

Учитывая выражения (6)–(8), уравнение для эволюции завихренности (4) может быть переписано в следующей форме:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \hat{A} \psi + r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \hat{A} \psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \hat{A} \psi + \eta \hat{A}^2 \psi = -\frac{\mu_0}{\rho r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)^2, \quad (9)$$

где ψ_1 — электрическая функция тока, которая определяет компоненты вектора плотности тока и азимутальное магнитное поле [28]:

$$\vec{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \vec{e}_z - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \vec{e}_r, \quad (10)$$

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 \psi_1}{r} \vec{e}_\varphi, \quad (11)$$

а уравнение для ψ_1 выглядит следующим образом:

$$\hat{A} \psi_1 = 0. \quad (12)$$

Уравнения удобно записывать в безразмерной форме, измеряя расстояния в характерных расстояниях L , скорость — в единицах η/L , время — в единицах L^2/η , функцию тока — в единицах ηL . Тогда (9) можно переписать в следующей форме:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \hat{A} \psi + r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \hat{A} \psi \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \hat{A} \psi + \hat{A}^2 \psi = -S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)^2, \quad (13)$$

где введён безразмерный параметр электровихревого течения [1]:

$$S = \frac{\mu_0 I^2}{\rho \eta^2}. \quad (14)$$

Решение уравнения (9) будем искать в классе Кармана [11], когда функцию тока можно представить в форме

$$\psi = r^2 F(z, t). \quad (15)$$

Исходя из способа обезразмеривания задачи верхней полуплоскости соответствует значение $z = 1$, а нижней — $z = 0$. Таким образом, центральная плоскость будет характеризоваться с помощью значения $z = 1/2$. Тогда для электрической функции тока можно записать выражение

$$\psi_1 = r^2 (z - 1/2). \quad (16)$$

В таком случае уравнение (16) для гидродинамической функции тока $\psi(r, z, t)$ переходит в уравнение для функции $F(z, t)$ и приводится к виду [11, 28]

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} = \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} - F \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + S(z - 1/2). \quad (17)$$

Граничные условия прилипания для функции $F(z, t)$ запишутся в виде

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0. \quad (18)$$

Как было сказано выше, нас будут интересовать стационарные решения, не зависящие от времени. Это означает, что левая часть уравнения (17) обратится в нуль. В таком случае наша задача будет состоять в решении обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 F}{dz^4} - F \frac{d^3 F}{dz^3} + S(z - 1/2) = 0 \quad (19)$$

с учётом граничных условий (18).

2. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА

Задача (18), (19) является нелинейной. Учитывая, что мы имеем малый параметр S , разумно искать асимптотическое решение этой системы уравнений. Очевидно, что при нулевом значении параметра S задаче удовлетворяет нулевое решение. Поэтому можно искать решение в виде следующего ряда:

$$F(z) = SF_1(z) + S^2 F_2(z) + \dots + S^n F_n(z) + o(S^n), \quad (20)$$

где F_n есть n -е приближение решения. Тогда систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S^2 \frac{d^4 F_2}{dz^4} + o(S^n) - (SF_1(z) + S^2 F_2(z) \\ + o(S^n)) \left(S \frac{d^3 F_1}{dz^3} + S^2 \frac{d^3 F_2}{dz^3} + o(S^n) \right) + S(z - 1/2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для того чтобы получить первое приближение, оставим только слагаемые, пропорциональные первой степени S . Тогда для первого приближения мы получим уравнение

$$\frac{d^4 F_1}{dz^4} + z - 1/2 = 0 \quad (22)$$

с граничными условиями

$$F_1|_{z=0} = F_1|_{z=1} = \frac{dF_1}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF_1}{dz} \Big|_{z=1} = 0. \quad (23)$$

Решение этой задачи достаточно несложно и выражается следующим образом:

$$F_1(z) = -\frac{1}{120} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right). \quad (24)$$

Определим теперь следующее приближение. Для этого необходимо сохранить в (21) слагаемые вплоть до второго порядка:

$$S \frac{d^4 F_1}{dz^4} + S^2 \frac{d^4 F_2}{dz^4} - S^2 F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} + S(z - 1/2) = 0. \quad (25)$$

Учитывая то, что для F_1 выполнено условие (22), задачу для второго приближения можно будет свести к уравнению

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} - F_1 \frac{d^3 F_1}{dz^3} = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями

$$F_2|_{z=0} = F_2|_{z=1} = \frac{dF_2}{dz}\bigg|_{z=0} = \frac{dF_2}{dz}\bigg|_{z=1} = 0. \quad (27)$$

Уравнение (26) можно переписать в форме:

$$\frac{d^4 F_2}{dz^4} = \frac{1}{2400}(10z^7 - 35z^6 + 47z^5 - 30z^4 + 9z^3 - z^2). \quad (28)$$

Решение задачи тогда выглядит так:

$$F_2(z) = \frac{1}{199584000} z^2(z-1)^2(z-1/2)^2(105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3). \quad (29)$$

Можно искать и следующие приближения для решения. Для n -го приближения можно аналогично записать уравнение

$$\frac{d^4 F_n}{dz^4} - \Phi_n = 0, \quad (30)$$

где введена вспомогательная функция

$$\Phi_n(z) = F_1(z) \frac{d^3 F_{n-1}(z)}{dz^3} + F_2(z) \frac{d^3 F_{n-2}(z)}{dz^3} + \dots + F_{n-1}(z) \frac{d^3 F_1(z)}{dz^3}. \quad (31)$$

В качестве граничных условий для функции $F_n(z)$ необходимо использовать следующие:

$$F_n|_{z=0} = F_n|_{z=1} = \frac{dF_n}{dz}\bigg|_{z=0} = \frac{dF_n}{dz}\bigg|_{z=1} = 0. \quad (32)$$

На рис. 2 показана функция F , полученная при использовании первого и второго приближения. Для справки и сравнения также дан результат численного решения. Можно отметить, что несмотря на то, что использованное значение параметра никак нельзя назвать малым ($S = 5 \cdot 10^4$), второе приближение достаточно реалистично описывает решение нашей задачи.

Отметим, что для функции тока мы получим, что

$$\psi(r, z) = S\Psi_1(r, z) + S^2\Psi_2(r, z) + \dots + S^n\Psi_n(r, z) + o(S^n), \quad (33)$$

где

$$\Psi_n(r, z) = r^2 F_n(z). \quad (34)$$

Для первых двух приближений мы можем получить такие формулы:

$$\Psi_1(r, z) = -\frac{r^2}{120} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right), \quad (35)$$

$$\Psi_2(r, z) = \frac{r^2}{199584000} z^2(z-1)^2(z-1/2)^2(105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3). \quad (36)$$

Результат для функции тока, полученный на основе данного разложения, представлен на рис. 3.

Рис. 2. Зависимость функции F от координаты при $S = 5 \cdot 10^4$. Сплошная линия показывает результат численного моделирования, пунктирная — первое приближение, штрих-пунктирная — второе приближение

Рис. 3. Функция тока $\psi(r, z)$ при $S = 5 \cdot 10^5$

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СКОРОСТИ

Точно так же, как мы приводили выражение для функции тока, можно записать аналогичные формулы для r - и z -составляющей скорости:

$$V_r(r, z) = SV_{r,1}(r, z) + S^2V_{r,2}(r, z) + \dots + S^nV_{r,n}(r, z) + o(S^n), \quad (37)$$

$$V_z(r, z) = SV_{z,2}(r, z) + S^2V_{z,2}(r, z) + \dots + S^nV_{z,n}(r, z) + o(S^n), \quad (38)$$

где соответствующие слагаемые могут быть представлены при помощи выражений

$$V_{r,n}(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n(r, z)}{\partial z} = -r \frac{dF_n(z)}{dz}, \quad (39)$$

$$V_{z,n}(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n(r, z)}{\partial r} = 2rF_n(z). \quad (40)$$

Выпишем два первых слагаемых для каждой из указанных компонент:

$$V_{r,1}(r, z) = \frac{r}{120}(5z^4 - 10z^3 + 6z^2 - z), \quad (41)$$

$$V_{z,1}(r, z) = -\frac{r}{60} \left(z^5 - \frac{5}{2} z^4 + 2z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right), \quad (42)$$

$$V_{r,2}(r, z) = -\frac{rz(z-1)}{133056000} \times (770z^8 - 3080z^7 + 4675z^6 - 3245z^5 + 913z^4 - 11z^3 - 11z^2 - 11z + 2), \quad (43)$$

$$V_{z,2}(r, z) = \frac{rz^2(z-1)^2(z-1/2)}{99792000} (105z^6 - 315z^5 + 295z^4 - 65z^3 - 19z^2 - z + 3). \quad (44)$$

Результат для первого слагаемого представлен на рис. 4, для второго — на рис. 5. Можно видеть, что каждое из них удовлетворяет основным требованиям и граничным условиям, которые накладываются в данной задаче.

Рис. 4. Компоненты разложения для скорости в первом приближении при $r = 1$. Сплошная линия показывает зависимость $V_{1,r}(1, z)$, пунктирная — $V_{1,z}(1, z)$

Рис. 5. Компоненты разложения для скорости во втором приближении при $r = 1$. Сплошная линия показывает зависимость $V_{2,r}(1, z)$, пунктирная $V_{2,z}(1, z)$

С точностью до слагаемых порядка $o(S^2)$ решение будет представляться в форме

$$V_r(r, z) = SV_{r,1}(r, z) + S^2 V_{r,2}(r, z) + o(S^2), \quad (45)$$

$$V_z(r, z) = SV_{z,1}(r, z) + S^2 V_{z,2}(r, z) + o(S^2). \quad (46)$$

Определим теперь, при каких условиях можно пренебречь слагаемыми, которые соответствуют второму приближению. Для этого определим максимальное значение модулей соответствующих функций при $0 \leq z \leq 1$:

$$\max_{z \in [0,1]} |V_{1,r}(r, z)| \approx 5,21 \cdot 10^{-4} r, \quad (47)$$

$$\max_{z \in [0,1]} |V_{1,z}(r, z)| \approx 1,49 \cdot 10^{-4} r, \quad (48)$$

$$\max_{z \in [0,1]} |V_{2,r}(r, z)| \approx 5,93 \cdot 10^{-10} r, \quad (49)$$

$$\max_{z \in [0,1]} |V_{2,z}(r, z)| \approx 1,46 \cdot 10^{-10} r. \quad (50)$$

Будем полагать, что наше разложение приемлемо описывает течение, если второе приближение меняет максимум модуля решения не более, чем на одну сотую часть, т. е. одновременно выполнены условия

$$S \max_{z \in [0,1]} |V_{2,r}(r, z)| / \max_{z \in [0,1]} |V_{1,r}(r, z)| < 10^{-2}, \quad (51)$$

$$S \max_{z \in [0,1]} |V_{2,z}(r, z)| / \max_{z \in [0,1]} |V_{1,z}(r, z)| < 10^{-2}. \quad (52)$$

Это означает, что

$$S < S_{\text{cr}} \approx 8790. \quad (53)$$

Отметим, что критическое значение оказывается достаточно большим ($S_{\text{cr}} \gg 1$), но тем не менее решение оказывается близким к точному, что обеспечивается малым коэффициентом, стоящим в знаменателе.

Приведём для примера картину течения при значении $S = 5 \cdot 10^4$ (рис. 6).

Рис. 6. Скорости течения при $S = 5 \cdot 10^4$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было получено асимптотическое разложение для решения задачи об электровихревом течении между двумя плоскостями, которое строилось исходя из того, что параметр электровихревого течения достаточно мал. Приведены явные выражения для первого и второго приближения и описан процесс вывода следующих слагаемых. Оценки показывают, что в практически важных случаях можно пользоваться даже первым приближением. Это соответствует

параметру электровихревого течения, не превышающему критического значения $S_{cr} \sim 10^4$. Для критического значения магнитного числа Рейнольдса, которое примерно равно корню из данного параметра, в таком случае можно записать, что $Re_{m_{cr}} \sim 10^2$. При больших значениях данного параметра в случаях, относящихся к приложениям, можно воспользоваться решением с точностью до второго слагаемого, которое приведено в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985.
2. Boyarevich V. V. MHD flows near a point source of electric current. II. Asymptotic expansions // Magnetohydrodynamics. 1981. V. 17. P. 41–44.
3. Хрипченко С. Ю. Электровихревые течения в тонких слоях проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика. 1991. № 3. С. 126–129.
4. Жилин В. Г., Ивочкин Ю. П., Игумнов В. С., Оксман А. А. Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объёме // Теплофизика высоких температур. 1995. Вып. 33. С. 3–6.
5. Sozou C., Pickering W. M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container // J. Fluid. Mech. 1976. V. 73. P. 641–650.
6. Sozou C., Pickering W. M. Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 362. P. 509–523.
7. Sandler V. Numeric investigation of temperature and velocity fields in a slag bath // Magnetohydrodynamics. 1982. V. 18. P. 195–199.
8. Патон Б. Е., Медовар Б. И., Емельяненко Ю. Г. и др. Исследование магнитогидродинамических явлений в шлаковой ванне при ЭШП // Проблемы специальной металлургии: Сб. науч. тр. / Наукова Думка, Киев, 1982. Вып. 17. С. 3–8.
9. Жилин В. Г., Ивочкин Ю. П., Тепляков И. О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // Теплофизика высоких температур. 2011. Вып. 47. С. 927–929.
10. Dzelme V., Jakovics A., Chudnovsky A., Baake E. Simulation of electrically induced vortical flows // J. Physics: Conf. Ser. Material Sci. Engng. 2018. V. 424. P. 012083.
11. Priede J., Chudnovsky A. On the stability of an axisymmetric self-similar electrically induced vortical flow in a plane layer // Magnetohydrodynamics. 1994. V. 30, N 4. P. 581–593.
12. Протокилов И. В., Порохонько В. Б. Физическое моделирование капельного переноса электродного металла при ЭШП с наложением импульсных магнитных полей // Современная электрометаллургия. 2017. Т. 128. С. 9–14.
13. Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes // Magnetohydrodynamics. 2012. V. 48. P. 469–484.
14. Lundquist S. On the hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current // Arc. Fys. 1969. V. 40. P. 89–95.
15. Sozou C. Development of the flow field of a point force in an infinite fluid // J. Fluid. Mech. 1979. V. 91. P. 541–546.
16. Shtern V. Counterflows. Cambridge: Univ. Press, 2012.
17. Михайлов Е. А., Тепляков И. О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // Вестн. МГУ. Сер. Физика. Астрономия. 2018. № 2. С. 39–44.
18. Малышев К. Ю., Михайлов Е. А., Тепляков И. О. Представление решения задачи об электровихревом течении в полусферическом контейнере в виде быстросходящегося ряда // Волны и вихри в сложных средах: 10 Международная конфер. — школа молодых учёных 3–5 декабря 2019 / Труды конфер. М.: Премиумпринт, 2019. С. 213–216.
19. Bojarevich V., Saramkin V. MHD flows due to electrical current discharge in an axisymmetric layer of limited depth // Magnetohydrodynamics. 1977. V. 13. P. 172–177.

20. *Kaudze M., Chudnovsky A.* Axisymmetric electrovortex flow between two planes induced by AC // *Magnetohydrodynamics*. 1989. V. 25. P. 187–194.
21. *Kharicha A., Karimi-Sibaki E., Wu M., Ludwig A.* Bohacek review on modeling and simulation of electrosag remelting // *J. Steel Res. Intern.* 2018. V. 89. N 1700100, P. 1–20.
22. *Pavlovs S., Jakovics A., Baake E., Nacke B.* Melt flow patterns in metallurgical MHD devices with combined inductive and conductive power supply // *Magnetohydrodynamics*. 2014. V. 50. P. 303–315.
23. *Pavlovs S., Jakovics A., Sushkovs V., Nacke B.* LES-study of heat transfer in the melt for metallurgical MHD devices with power supply by inductor and over electrodes // *Magnetohydrodynamics*. 2015. V. 51. P. 67–81.
24. *Бутузов В. Ф., Нефёдов Н. Н., Полежаева Е. В.* Асимптотические решения линеаризованных задач о собственных и вынужденных резонансных колебаниях среды с малой вязкостью // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1989. Т. 29. С. 1023–1035.
25. *Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А.* Асимптотическое решение задачи о конвекции Марангони в тонком слое вязкой жидкости // *Мат. моделирование*. 1990. Т. 2, С. 76–89.
26. *Кондратенко П. С.* Теоретические основы гидродинамики и теплопереноса. Москва: изд. Ин-та проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2003.
27. *Калашников С. Г.* Электричество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
28. *Chudnovsky A., Rusbergs E.* Countermoving jets in self similar electrovortex flow between two planes // *11 PAMIR Intern. Conf. Fund. Appl. MHD. Reims. France*. 2019. P. 99–104.

UDC 51-72

**ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE EQUATION
OF A SLOW AXISYMMETRIC ELECTROVORTEX FLOW BETWEEN
TWO PLANES**© 2020 E. A. Mikhailov^{1a}, A. Yu. Chudnovsky^{2b}¹*Lomonosov Moscow State University. ul. Leninskie Gory 1, Moscow 119991, Russia,*²*LATVO AS, ul. Ganibu Dambis 53, Riga LV-1005, Latvia*E-mails: ^aea.mikhajlov@physics.msu.ru, ^beivf19@gmail.com

Received 13.05.2020, revised 13.05.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. Electrovortex flows are of great interest both from the viewpoint of theoretical magnetohydrodynamics and for applications. They arise when the electric current of variable density passes through a conducting medium (such as a liquid metal). The interaction between the current and self magnetic field of the current induce a nonpotential electromagnetic force that causes a vortex flow of the liquid. As a model problem, we consider a stationary flow between two parallel planes. The flow is described by the stream function for which we obtain a nonlinear fourth-order partial differential equation. For moderate values of the electrovortex flow parameter, we investigate the problem by the asymptotic series expansion in the powers of this parameter. We describe the process of successive approximations of various degrees and present the flow pattern that is given by two first terms. This asymptotic solution is shown to be rather close to the numerical solution of the problem.

Keywords: electrovortex flow, small Reynolds number, Navier–Stokes equations, asymptotic expansion.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.407

REFERENCES

1. Boyarevich V. V., Freiberg Ya. Zh., Shilova E. I., Shcherbinin E. V. Electrically Induced Vortical Flows. Riga: Zinatne, 1985.
2. Boyarevich V. V. MHD flows near a point source of electric current. II. Asymptotic expansions. *Magnetohydrodynamics*, 1981, Vol. 17, pp. 41–44.
3. Khripchenko S. Yu. Electrovortical flows in thin conducting liquid layers. *Magnetohydrodynamics*, 1991, Vol. 27, No. 1, pp. 115–118.
4. Zhilin V. G., Ivochkin Yu. P., Igumnov B. C., Oksman A. A. Experimental investigation of electrovortex flows in hemispherical volume. *High Temp.*, 1995, Vol. 33, No. 1, pp. 1–4.
5. Sozou C., Pickering W. M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container. *J. Fluid. Mech.*, 1976, Vol. 73, pp. 641–650.
6. Sozou C., Pickering W. M. Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1978, Vol. 362, pp. 509–523.
7. Sandler V. Numeric investigation of temperature and velocity fields in a slag bath. *Magnetohydrodynamics*, 1982, Vol. 18, pp. 195–199.
8. Paton B. E., Medovar B. I., Emel'yanenko Yu. G. i dr. Studies of magnetohydrodynamic phenomena in a slag bath under ESM. *Problems of Special Metallurgy*, 1982, Vol. 17, pp. 3–8.

9. Zhilin V. G., Ivochkin Yu. P., Teplyakov I. O. The problem of swirling of axisymmetric electrovortex flows. *High Temp.*, 2011, Vol. 49, No. 6, pp. 927–929.
10. Dzelme V., Jakovics A., Chudnovsky A., Baake E. Simulation of electrically induced vortical flows. *J. Physics: Conf. Ser. Material Sci. Engrg.*, 2018, Vol. 424, pp. 012083.
11. Priede J., Chudnovsky A. On the stability of an axisymmetric self-similar electrically induced vortical flow in a plane layer. *Magnetohydrodynamics*, 1994, Vol. 30, No. 4, pp. 581–593.
12. Protokovilov I. V., Porokhon'ko V. B. Physical modeling of electrode metal drop transfer in ESM with Superposition of pulsed magnetic fields. *Electrometallurgy Today*, 2017, No. 3, pp. 9–14.
13. Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes. *Magnetohydrodynamics*, 2012, Vol. 48, pp. 469–484.
14. Lundquist S. On the hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current. *Arc. Fys.*, 1969, Vol. 40, pp. 89–95.
15. Sozou C. Development of the flow field of a point force in an infinite fluid. *J. Fluid. Mech.*, 1979, Vol. 91, pp. 541–546.
16. Shtern V. Counterflows. Cambridge: Univ. Press, 2012.
17. Mikhailov E. A., Teplyakov I. O. Analytical solution of the problem of the electrovortex flow in the hemisphere with finite size electrodes in the Stokes approximation. *Vestn. MGU. Ser. Fizika. Astronomiya*, 2018, No. 2, pp. 39–44.
18. Malyshev K. Yu., Mikhailov E. A., Teplyakov I. O. Representation in the form of a rapidly convergent series for the solution to the problem of electrovortex flow in a hemispherical container. *Waves and Vortices in Complex Media: 10th International Conference–School of Young Scientists, December 3–5, 2019*. Moscow: Publ. Premiumprint, 2019, pp. 213–216.
19. Bojarevich V., Saramkin V. MHD flows due to electrical current discharge in an axisymmetric layer of limited depth. *Magnetohydrodynamics*, 1977, Vol. 13, pp. 172–177.
20. Kaudze M., Chudnovsky A. Axisymmetric electrovortex flow between two planes induced by AC. *Magnetohydrodynamics*, 1989, Vol. 25, pp. 187–194.
21. Kharicha A., Karimi-Sibaki E., Wu M., Ludwig A. Bohacek review on modeling and simulation of electrosag remelting. *J. Steel Res. Intern.*, 2018, Vol. 89, No. 1700100, pp. 1–20.
22. Pavlovs S., Jakovics A., Baake E., Nacke B. Melt flow patterns in metallurgical MHD devices with combined inductive and conductive power supply. *Magnetohydrodynamics*, 2014, Vol. 50, pp. 303–315.
23. Pavlovs S., Jakovics A., Sushkovs V., Nacke B. LES-study of heat transfer in the melt for metallurgical MHD devices with power supply by inductor and over electrodes. *Magnetohydrodynamics*, 2015, Vol. 51, pp. 67–81.
24. Butuzov V. F., Nefedov N. N., Polezhaeva E. V. The asymptotic solution of linearized problems on the natural and forced resonance oscillations of a medium of low viscosity. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, Vol. 29, pp. 41–49.
25. Butuzov V. F., Urazgil'dina T. A. Asymptotic solution of a marangony convection problem in a thin layer of a viscous fluid. *Mat. Modelir.*, 1990, Vol. 2, No. 8, pp. 76–89.
26. Kondratenko P. S. Theoretical foundations of hydrodynamics and heat transfer. Moscow: Publ. Inst. Problem Bezopasn. Razvit. Atomn. Energet., 2003 (in Russian).
27. Kalashnikov S. G. Elektrichestvo. Moscow: Fizmatlit, 2008 (in Russian).
28. Chudnovsky A., Rusbergs E. Countermoving jets in self similar electrovortex flow between two planes. *11 PAMIR Intern. Conf. Fund. Appl. MHD*. (Reims, France, 1–5 June 2019). Reims: France, 2019, pp. 99–104.