Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Neshchadim, A. P. Chupakhin, On integration of a matrix Riccati equation ,
Sib. Zh. Ind. Mat., 2020, Volume 23, Number 4, 101–113

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.408>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.137.237

April 26, 2023, 03:59:07

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ
РИККАТИ© 2020 М. В. Нецадим^{1,3a}, А. П. Чупахин^{2,3b}¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,³Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, РоссияE-mails: ^aneshch@math.nsc.ru, ^bchupakhin@hydro.nsc.ruПоступила в редакцию 27.08.2020 г.; после доработки 27.08.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Приводится полное интегрирование простейшего матричного уравнения Риккати в двумерном и трёхмерном случае для произвольного линейного дифференциального оператора. Решение строится в терминах жордановой формы неизвестной матрицы и соответствующей матрицы подобия. Показано, что матрица подобия всегда представляется в виде произведения двух матриц, одна из которых является инвариантом дифференциального оператора.

Ключевые слова: матричное уравнение Риккати, алгебраические инварианты, жорданова форма.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.408

ВВЕДЕНИЕ

Матричное уравнение Риккати находит широкое применение в вариационном исчислении, теории оптимального управления [1, 2]. В механике сплошной среды оно возникает в газовой динамике [3]. Матричное уравнение Риккати используется при отыскании и анализе частных решений уравнений механики континуума [4–6]. В этих работах оно применялось для описания движения популярной модели механики — среды без давления, иными словами барохронных движений газа. В последнее время матричные дифференциальные уравнения возникают и используются и в более сложных моделях гидродинамики [7, 8]. Также матричные уравнения Риккати используются в численных методах. На их использовании базируется метод послойного пересчёта для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Данный метод является эффективным для решения такого типа задач, поскольку позволяет получить аналитическое выражение для решения в слоях [9–12]. При этом возникает необходимость исследования алгебраических инвариантов, собственных значений матриц и их производных. Классическим результатам теории инвариантов матриц посвящено большое число работ [13–19]. Распространение их на дифференциальную алгебру матриц является нетривиальным. Так в работах [20, 21] исследуются свойства матричных операторов, возникающих как дифференциальные следствия уравнений континуума. В работах [22–25] строятся различные представления для производных матриц.

В данной работе приводится полное интегрирование простейшего матричного уравнения Риккати

$$DJ + J^2 = 0 \quad (1)$$

для произвольного линейного дифференциального оператора D и двумерных и трёхмерных матриц J . Решение строится в терминах жордановой формы (верхнетреугольной) Λ матрицы J и матрицы подобия T , $J = T\Lambda T^{-1}$. (По поводу жордановой формы см., например, [26].) Показано, что матрица подобия T всегда представляется в виде произведения двух матриц, одна из которых инвариантна относительно оператора D .

Уравнение (1) является дифференциальным следствием уравнений импульсов в механике континуума в простейшем случае «среды без давления». Представляется, что полученные результаты будут полезны и в более общем случае при наличии уравнений типа (1), обусловленных термодинамикой среды.

Все функции, рассматриваемые в работе, предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть

$$D = \partial_t + u^1 \partial_{x^1} + \dots + u^n \partial_{x^n} \quad (2)$$

— дифференциальный оператор первого порядка. Здесь функции $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)$ зависят от переменных $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$ и t . Рассматривается система уравнений

$$D(\bar{u}) = 0. \quad (3)$$

Пусть J — матрица Якоби системы функций $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)$:

$$J = \begin{bmatrix} u_{x^1}^1 & u_{x^2}^1 & \dots & u_{x^n}^1 \\ u_{x^1}^2 & u_{x^2}^2 & \dots & u_{x^n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{x^1}^n & u_{x^2}^n & \dots & u_{x^n}^n \end{bmatrix}.$$

Дифференцируя (2) по переменным $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$, в силу строения (2) оператора D получим матричное уравнение Риккати (1) $DJ + J^2 = 0$. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы J и

$$j_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \dots, \quad j_n = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

— элементарные симметрические многочлены переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то, как показано в [4], в силу (1) имеет место следующая система равенств:

$$Dj_l + j_1 j_l - (l+1)j_{l+1} = 0, \quad Dj_n + j_1 j_n = 0, \quad l = 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Кроме того, в работе [4] доказано, что система (4) эквивалентна следующей системе для собственных значений матрицы J :

$$D\lambda_k + \lambda_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Сформулируем следующую общую задачу.

Задача. Пусть D — произвольный линейный дифференциальный оператор первого порядка и функции $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют уравнениям (5).

Для каких матриц T , $\det T = 1$, матрица

$$J = T\Lambda T^{-1}, \quad (6)$$

где Λ — жорданова форма матрицы J , удовлетворяет уравнению (1)?

Имея в виду практические приложения, в настоящей работе рассматриваются случаи $n = 2, 3$. Будем говорить, что функция ϕ — инвариант дифференцирования D , если $D\phi = 0$. В механике сплошной среды инвариантная функция оператора (2) называется лагранжевой переменной [3].

Замечание 1. Условие на матрицу T : $\det T = 1$ не умаляет общности рассмотрения, поскольку соотношение (6) инвариантно относительно операторов растяжения всех элементов матрицы T . Это означает, что подобие относительно матриц группы $GL(n)$ эквивалентно подобию относительно группы $SL(n)$.

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОДОБНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть матрицы $g \in GL(n)$, $\Lambda \in M(n)$ гладко зависят от некоторого набора переменных, D — произвольный линейный дифференциальный оператор первого порядка. Обозначим $\omega_g = g^{-1}Dg$. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Справедливы формулы*

- 1) $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)g^{-1}$;
- 2) $D(g\Lambda g^{-1}) = g(D(\Lambda) + [\omega_g, \Lambda])g^{-1}$, где $[\omega_g, \Lambda]$ — коммутатор матриц ω_g и Λ .

Доказательство. 1) Применяя оператор D к равенству $g^{-1}g = E$, получаем

$$D(g^{-1})g + g^{-1}D(g) = 0,$$

следовательно, $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)g^{-1}$.

2) Применяя оператор D к выражению $g\Lambda g^{-1}$ и пользуясь 1), получаем

$$\begin{aligned} D(g\Lambda g^{-1}) &= D(g)\Lambda g^{-1} + gD(\Lambda)g^{-1} + g\Lambda D(g^{-1}) \\ &= gg^{-1}D(g)\Lambda g^{-1} + gD(\Lambda)g^{-1} - g\Lambda g^{-1}D(g)g^{-1} \\ &= g(D(\Lambda) + g^{-1}D(g)\Lambda - \Lambda g^{-1}D(g))g^{-1} = g(D(\Lambda) + [\omega_g, \Lambda])g^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. Пусть $g = g_1g_2$, $g_1, g_2 \in GL(n)$. Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{tr} \omega_{g_1g_2} = \operatorname{tr} \omega_{g_1} + \operatorname{tr} \omega_{g_2},$$

где $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A .

Доказательство. Имеем

$$\omega_{g_1g_2} = (g_1g_2)^{-1}D(g_1g_2) = g_2^{-1}g_1^{-1}(D(g_1)g_2 + g_1D(g_2)) = g_2^{-1}\omega_{g_1}g_2 + \omega_{g_2}.$$

Следовательно, $\operatorname{tr} \omega_{g_1g_2} = \operatorname{tr} \omega_{g_1} + \operatorname{tr} \omega_{g_2}$. Лемма 2 доказана. □

Замечание 2. Для трансвекции $g = t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, имеем

$$g^{-1}D(g) = t_{ij}(-\alpha)e_{ij}D(\alpha) = e_{ij}D(\alpha),$$

где e_{ij} — матричная единица. Поэтому $\operatorname{tr}(g^{-1}D(g)) = 0$.

Следствие. Если $g \in GL(n)$, то справедливо равенство $\text{tr}(g^{-1}D(g)) = \frac{D(\det g)}{\det g}$. В частности, если $g \in SL(n)$, то $\text{tr}(g^{-1}D(g)) = 0$.

Доказательство. Представим матрицу g в виде произведения трансвекций и диагонали $g = g_1 \cdots g_m d$, где $g_1, \dots, g_m$ — трансвекции и $d = \text{diag}(1, \dots, \det g)$ — диагональ.

По лемме 2 и по замечанию 2

$$\text{tr } \omega_g = \text{tr } \omega_{g_1} + \cdots + \text{tr } \omega_{g_m} + \text{tr } \omega_d = \text{tr } \omega_d = \frac{D(\det g)}{\det g}.$$

Следствие доказано. $\square$

Замечание 3. Отметим также очевидное равенство $D(\text{tr } A) = \text{tr } D(A)$, справедливое для любой матрицы $A \in M(n)$, гладко зависящей от некоторого набора переменных.

Замечание 4. Пусть матрица J удовлетворяет уравнению (1). Представим её в виде $J = T\Lambda T^{-1}$, где $\det T = 1$. Тогда $DJ = T(D\Lambda + [\omega_T, \Lambda])T^{-1}$, где $\omega_T = T^{-1}DT$. Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде

$$D\Lambda + [\omega_T, \Lambda] + \Lambda^2 = 0. \quad (7)$$

Так как $\det T = 1$, то $\text{tr } \omega_T = 0$.

Пусть Λ — жорданова форма матрицы J . В силу (5) уравнение (7) является конечным алгебраическим соотношением. Если матрица Λ диагональная, то уравнение (7) равносильно

$$[\omega_T, \Lambda] = 0. \quad (8)$$

Если же матрица Λ не диагональная, то уравнение (7) равносильно

$$[\omega_T, \Lambda] + \Lambda^2 - \Lambda_0^2 = 0, \quad (9)$$

где Λ_0 — диагональ матрицы Λ .

3. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $T_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$, где a_0, b_0, c_0, d_0 — произвольные инварианты линейного дифференциального оператора D с условием $a_0 d_0 - b_0 c_0 = 1$. Матрица $J = T\Lambda T^{-1}$, $\det T = 1$, удовлетворяет уравнению (1), где Λ — жорданова форма матрицы J , тогда и только тогда, когда :

а) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 \\ 0 & e^{-\varphi} \end{pmatrix}$, где функции $\lambda_1 \neq \lambda_2$ удовлетворяют уравнениям $D\lambda_1 = -\lambda_1^2$, $D\lambda_2 = -\lambda_2^2$ и φ — произвольная функция;

б) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где функция λ удовлетворяет уравнению $D\lambda = -\lambda^2$ и T — произвольная матрица;

в) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} \lambda & \varphi \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, где функция λ удовлетворяет уравнению $D\lambda = -\lambda^2$ и φ — произвольная функция.

Доказательство. Пусть $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, тогда

$$\omega_T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где α, β, γ — некоторые функции.

Рассмотрим случай а). Подставляя представление (10) для матрицы ω_T в (8), получаем

$$\beta(\lambda_1 - \lambda_2) = \gamma(\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

т. е. $\beta = \gamma = 0$. Итак,

$$\omega_T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad DT = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы T имеем систему уравнений

$$Da = a\alpha, \quad Dc = c\alpha, \quad Db = -b\alpha, \quad Dd = -d\alpha.$$

Пусть φ — некоторое решение уравнения $D\varphi = \alpha$. Тогда a, b, c, d можно представить в виде

$$a = a_0 e^\varphi, \quad c = c_0 e^\varphi, \quad b = b_0 e^{-\varphi}, \quad d = d_0 e^\varphi,$$

где

$$Da_0 = Dc_0 = Db_0 = Dd_0 = 0, \quad a_0 d_0 - b_0 c_0 = 1.$$

Случай б) очевиден. Рассмотрим случай в). Уравнение (9) имеет вид

$$[\omega_T, \Lambda] + \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Подставляя представление (10) для матрицы ω_T , получаем

$$\begin{pmatrix} -\gamma & 2(\alpha + \lambda) \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда $\gamma = 0$, $\alpha + \lambda = 0$, β произвольное. Итак,

$$\omega_T = \begin{pmatrix} -\lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad DT = T \begin{pmatrix} -\lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы T имеем систему уравнений

$$Da = -a\lambda, \quad Db = a\beta + b\lambda, \quad Dc = -c\lambda, \quad Dd = c\beta + d\lambda.$$

Отметим, что решение уравнения $D\lambda + \lambda^2 = 0$ можно представить в виде $\lambda = (\lambda_0 + \psi)^{-1}$, где λ_0 — инвариант оператора D : $D\lambda_0 = 0$ и ψ — решение уравнения $D\psi = 1$.

Так как $\lambda = D \ln(\lambda_0 + \psi)$, то из соотношения $Da = -a\lambda$ получаем

$$a = a_0 \lambda, \quad (11)$$

где $Da_0 = 0$. Аналогично, $c = c_0 \lambda$, где $Dc_0 = 0$.

Далее, уравнение $Db = a\beta + b\lambda$ с учётом (11), принимает вид $D(\lambda b) = a_0 \beta \lambda^2$. Пусть функция ν — решение уравнения $D(\nu) = \beta \lambda^2$. Тогда $b = \lambda^{-1}(a_0 \nu + b_0)$. Аналогично, из уравнения $Dd = c\beta + d\lambda$ находим $d = \lambda^{-1}(c_0 \nu + d_0)$. Здесь $Db_0 = Dd_0 = 0$. Итак,

$$T = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda^{-1}(a_0 \nu + b_0) \\ \lambda c_0 & \lambda^{-1}(c_0 \nu + d_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^{-1} \nu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Так как функция ν произвольная, то $\lambda^{-1} \nu = \varphi$ также произвольная функция. Теорема доказана. $\square$

4. ТРЁХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $T_0 = (t_{ij,0})$, $\det T_0 = 1$, — произвольная матрица третьего порядка из инвариантов дифференцирования D . Матрица $J = T\Lambda T^{-1}$, $\det T = 1$, удовлетворяет уравнению (1), где Λ — жорданова форма матрицы J , тогда и только тогда, когда

а) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где функция λ удовлетворяет уравнению $D\lambda = -\lambda^2$ и T — произвольная матрица;

б) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$, где функции $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ удовлетворяют уравнениям $D\lambda_1 = -\lambda_1^2$, $D\lambda_2 = -\lambda_2^2$ и $d, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{32}, \tau_{33}$ — произвольные функции с условием $d(\tau_{22}\tau_{33} - \tau_{23}\tau_{32}) = 1$;

в) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & e^\psi & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varphi-\psi} \end{pmatrix}$, где функции $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ удовлетворяют уравнениям $D\lambda_1 = -\lambda_1^2$, $D\lambda_2 = -\lambda_2^2$, $D\lambda_3 = -\lambda_3^2$ и φ, ψ — произвольные функции;

г) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} \lambda^2 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & \tau_{12}\lambda^{-2} + \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$, где функция λ удовлетворяет уравнению $D\lambda = -\lambda^2$ и τ_{12}, τ_{13} — произвольные функции;

д) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\nu & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & e^\nu \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & \tau_{32} & e^{-2\nu} \lambda^2 \end{pmatrix}$, где функция λ удовлетворяет уравнению $D\lambda = -\lambda^2$ и $\nu, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{32}$ — произвольные функции;

е) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ и $T = T_0 \begin{pmatrix} e^{-2\nu} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^\nu & \tau_{23} \\ 0 & 0 & e^\nu \lambda^2 \end{pmatrix}$, где функции $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ удовлетворяют уравнениям $D\lambda_1 = -\lambda_1^2$, $D\lambda_2 = -\lambda_2^2$ и ν, τ_{23} — произвольные функции.

Доказательство. Будем использовать обозначения

$$\omega_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

В случае а) очевидно, что матрица T может быть любой.

Рассмотрим случай б).

$$\text{Из соотношения (8), учитывая, что } \text{tr } \omega_T = 0, \text{ получаем } \omega_T = \begin{pmatrix} -a_{22} - a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матричное равенство $DT = T\omega_T$ равносильно системе

$$Dt_{11} = -(a_{22} + a_{33})t_{11}, \quad Dt_{21} = -(a_{22} + a_{33})t_{21}, \quad Dt_{31} = -(a_{22} + a_{33})t_{31}, \quad (12)$$

$$Dt_{12} = a_{22}t_{12} + a_{32}t_{13}, \quad Dt_{22} = a_{22}t_{22} + a_{32}t_{23}, \quad Dt_{32} = a_{22}t_{32} + a_{32}t_{33}, \quad (13)$$

$$Dt_{13} = a_{23}t_{12} + a_{33}t_{13}, \quad Dt_{23} = a_{23}t_{22} + a_{33}t_{23}, \quad Dt_{33} = a_{23}t_{32} + a_{33}t_{33}. \quad (14)$$

Пусть φ — решение уравнения $D\varphi = -(a_{22} + a_{33})$. Тогда из (12) находим

$$t_{11} = t_{11,0}e^\varphi, \quad t_{21} = t_{21,0}e^\varphi, \quad t_{31} = t_{31,0}e^\varphi,$$

где $t_{11,0}, t_{21,0}, t_{31,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Системы (13), (14) равносильны трём матричным равенствам

$$\begin{pmatrix} Dt_{k2} \\ Dt_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{k2} \\ t_{k3} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Так как функции $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$ произвольные, то для матрицы T можно написать представление $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$, где $T_0 = (t_{ij,0})$, $\det T_0 = 1$ — произвольная матрица третьего

порядка из инвариантов дифференцирования D и $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$ — произвольная матрица второго порядка. Учитывая условие $\det T = 1$, получаем $e^\varphi \det \tau = 1$.

Рассмотрим случай в). Из соотношения (8), учитывая, что $\text{tr } \omega_T = 0$ получаем $\omega_T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix}$. Из матричного равенства $DT = T\omega_T$ получаем представление для матрицы T : $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & e^\psi & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varphi-\psi} \end{pmatrix}$, где $T_0 = (t_{ij,0})$, $\det T_0 = 1$ — произвольная матрица

третьего порядка из инвариантов дифференцирования D и φ, ψ — произвольные функции.

Рассмотрим случай г). Из соотношения (9), учитывая, что $\text{tr } \omega_T = 0$, получаем

$$\omega_T = \begin{pmatrix} -2\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{12} + 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Матричное равенство $DT = T\omega_T$ равносильно системе

$$Dt_{11} = -2\lambda t_{11}, \quad Dt_{21} = -2\lambda t_{21}, \quad Dt_{31} = -2\lambda t_{31}, \quad (15)$$

$$Dt_{12} = a_{12}t_{11}, \quad Dt_{22} = a_{12}t_{21}, \quad Dt_{32} = a_{12}t_{31}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Dt_{13} &= a_{13}t_{11} + (a_{12} + 1)t_{12} + 2\lambda t_{13}, \\ Dt_{23} &= a_{13}t_{21} + (a_{12} + 1)t_{22} + 2\lambda t_{23}, \\ Dt_{33} &= a_{13}t_{31} + (a_{12} + 1)t_{32} + 2\lambda t_{33}. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть φ — решение уравнения $D\varphi = -2\lambda$. Тогда из системы (15) находим

$$t_{11} = t_{11,0}e^\varphi, \quad t_{21} = t_{21,0}e^\varphi, \quad t_{31} = t_{31,0}e^\varphi,$$

где $t_{11,0}, t_{21,0}, t_{31,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как $D\lambda + \lambda^2 = 0$, то $\lambda = (\lambda_0 + \psi)^{-1}$, где $D\lambda_0 = 0$ и $D\psi = 1$. Поэтому $\varphi = -2\ln(\lambda_0 + \psi)$.

Пусть θ — решение уравнения $D\theta = a_{12}e^\varphi$. Тогда из системы (16) находим

$$t_{12} = t_{11,0}\theta + t_{12,0}, \quad t_{22} = t_{21,0}\theta + t_{22,0}, \quad t_{32} = t_{31,0}\theta + t_{32,0},$$

где $t_{12,0}, t_{22,0}, t_{32,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Рассмотрим первое уравнение системы (17) и преобразуем его. Имеем

$$\begin{aligned} Dt_{13} &= a_{13}t_{11} + (a_{12} + 1)t_{12} + 2\lambda t_{13}, \\ e^\varphi Dt_{13} - 2\lambda e^\varphi t_{13} &= a_{13}e^\varphi t_{11} + (a_{12} + 1)e^\varphi t_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(e^\varphi t_{13}) &= a_{13}e^{2\varphi}t_{11,0} + (a_{12} + 1)e^\varphi(t_{11,0}\theta + t_{12,0}), \\
D(e^\varphi t_{13} - \theta t_{12,0} - \frac{1}{2}\theta^2 t_{11,0}) &= a_{13}e^{2\varphi}t_{11,0} + e^\varphi\theta t_{11,0} + e^\varphi t_{12,0}, \\
D(\lambda^2 t_{13} - \theta t_{12,0} - \frac{1}{2}\theta^2 t_{11,0} + \lambda t_{12,0}) &= a_{13}e^{2\varphi}t_{11,0} + e^\varphi\theta t_{11,0}, \\
D(\lambda^2 t_{13} - \theta t_{12,0} - \frac{1}{2}\theta^2 t_{11,0} + \lambda t_{12,0}) &= (\lambda^4 a_{13} + \lambda^2 \theta)t_{11,0}.
\end{aligned}$$

Пусть π — решение уравнения $D\pi = \lambda^4 a_{13} + \lambda^2 \theta$. Тогда

$$t_{13} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\left(\pi + \frac{\theta^2}{2} \right) t_{11,0} + (\theta + \lambda) t_{12,0} + t_{13,0} \right).$$

Аналогично, из системы (17) находим

$$\begin{aligned}
t_{23} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\left(\pi + \frac{\theta^2}{2} \right) t_{21,0} + (\theta + \lambda) t_{22,0} + t_{23,0} \right), \\
t_{33} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\left(\pi + \frac{\theta^2}{2} \right) t_{31,0} + (\theta + \lambda) t_{32,0} + t_{33,0} \right),
\end{aligned}$$

где $t_{13,0}, t_{23,0}, t_{33,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как a_{12}, a_{13} — произвольные функции, то матрицу T можно представить в виде $T = T_0 \begin{pmatrix} \lambda^2 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & \tau_{12}\lambda^{-2} + \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$, где τ_{12}, τ_{13} — произвольные функции и матрица $T_0 = (t_{ij,0})$,

$\det T_0 = 1$, — произвольная матрица третьего порядка из инвариантов дифференцирования D .

Рассмотрим случай д). Из соотношения (9), учитывая, что $\text{tr } \omega_T = 0$, получаем $\omega_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} + 2\lambda & 0 \\ 0 & a_{32} & -2(a_{11} + \lambda) \end{pmatrix}$.

Матричное равенство $DT = T\omega_T$ равносильно системе

$$Dt_{11} = a_{11}\lambda t_{11}, \quad Dt_{21} = a_{11}\lambda t_{21}, \quad Dt_{31} = a_{11}\lambda t_{31}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
Dt_{12} &= a_{12}t_{11} + (a_{11} + 2\lambda)t_{12} + a_{32}t_{13}, \\
Dt_{22} &= a_{12}t_{21} + (a_{11} + 2\lambda)t_{22} + a_{32}t_{23}, \\
Dt_{22} &= a_{12}t_{31} + (a_{11} + 2\lambda)t_{32} + a_{32}t_{33}
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
Dt_{13} &= a_{13}t_{11} - 2(a_{11} + \lambda)t_{13}, \\
Dt_{23} &= a_{13}t_{21} - 2(a_{11} + \lambda)t_{23}, \\
Dt_{33} &= a_{13}t_{31} - 2(a_{11} + \lambda)t_{33}.
\end{aligned} \quad (20)$$

Пусть ν — решение уравнения $D\nu = a_{11}$. Тогда из системы (18) находим

$$t_{11} = t_{11,0}e^\nu, \quad t_{21} = t_{21,0}e^\nu, \quad t_{31} = t_{31,0}e^\nu,$$

где $t_{11,0}, t_{21,0}, t_{31,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как $D\lambda + \lambda^2 = 0$, то $\lambda = (\lambda_0 + \psi)^{-1}$, где $D\lambda_0 = 0$ и $D\psi = 1$. Положим $\varphi = \ln(\lambda_0 + \psi)$.

Рассмотрим первое уравнение системы (20) и перепишем его в виде

$$D(t_{13}e^{2(\varphi+\nu)}) = t_{11,0}a_{13}e^{2\varphi+3\nu}.$$

Пусть μ — решение уравнения $D\mu = a_{13}e^{2\varphi+3\nu}$. Тогда

$$t_{13} = t_{11,0}\mu e^{-2(\varphi+\nu)} + t_{13,0}e^{-2(\varphi+\nu)}.$$

Аналогично, из системы (20) находим

$$t_{23} = t_{21,0}\mu e^{-2(\varphi+\nu)} + t_{23,0}e^{-2(\varphi+\nu)}, \quad t_{33} = t_{31,0}\mu e^{-2(\varphi+\nu)} + t_{33,0}e^{-2(\varphi+\nu)},$$

где $t_{13,0}$, $t_{23,0}$, $t_{33,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Рассмотрим первое уравнение системы (19)

$$Dt_{12} = a_{12}t_{11} + (a_{11} + 2\lambda)t_{12} + a_{32}t_{13}.$$

Перепишем его в виде

$$D(t_{12}e^{-2\varphi-3\nu}) = t_{11,0}(a_{12}e^{-2\varphi} + a_{32}\mu e^{-4\varphi-3\nu}) + t_{13,0}a_{32}e^{-4\varphi-3\nu}.$$

Пусть θ , π — решения уравнений

$$D\theta = a_{12}e^{-2\varphi} + a_{32}\mu e^{-4\varphi-3\nu}, \quad D\pi = a_{32}e^{-4\varphi-3\nu}.$$

Тогда

$$t_{12} = t_{11,0}\theta e^{2\varphi+\nu} + t_{12,0}e^{2\varphi+\nu} + t_{13,0}\pi e^{2\varphi+\nu}.$$

Аналогично, из системы (19) находим

$$t_{22} = t_{21,0}\theta e^{2\varphi+\nu} + t_{22,0}e^{2\varphi+\nu} + t_{23,0}\pi e^{2\varphi+\nu}, \\ t_{32} = t_{31,0}\theta e^{2\varphi+\nu} + t_{32,0}e^{2\varphi+\nu} + t_{33,0}\pi e^{2\varphi+\nu}.$$

где $t_{12,0}$, $t_{22,0}$, $t_{32,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{32} — произвольные функции, то матрицу T можно представить в виде $T = T_0 \begin{pmatrix} e^\nu & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & e^\nu \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & \tau_{32} & e^{-2\nu} \lambda^2 \end{pmatrix}$, где ν , τ_{12} , τ_{13} , τ_{32} — произвольные функции и матрица $T_0 = (t_{ij,0})$, $\det T_0 = 1$, — произвольная матрица третьего порядка из инвариантов дифференцирования D .

Рассмотрим случай е). Из соотношения (9), учитывая, что $\text{tr } \omega_T = 0$, получаем $\omega_T = \begin{pmatrix} -2(a_{22} + \lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{22} + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$.

Матричное равенство $DT = T\omega_T$ равносильно системе

$$Dt_{11} = -2(a_{22} + \lambda_2)t_{11}, \quad Dt_{21} = -2(a_{22} + \lambda_2)t_{21}, \quad Dt_{31} = -2(a_{22} + \lambda_2)t_{31}, \quad (21)$$

$$Dt_{12} = a_{22}t_{12}, \quad Dt_{22} = a_{22}t_{22}, \quad Dt_{32} = a_{22}t_{32}, \quad (22)$$

$$Dt_{13} = a_{23}t_{12} + (a_{22} + 2\lambda_2)t_{13}, \\ Dt_{23} = a_{23}t_{22} + (a_{22} + 2\lambda_2)t_{23}, \\ Dt_{33} = a_{23}t_{32} + (a_{22} + 2\lambda_2)t_{33}. \quad (23)$$

Пусть ν — решение уравнения $D\nu = a_{22}$. Тогда из системы (22) находим

$$t_{12} = t_{12,0}e^\nu, \quad t_{22} = t_{22,0}e^\nu, \quad t_{32} = t_{32,0}e^\nu,$$

где $t_{11,0}$, $t_{21,0}$, $t_{31,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как $D\lambda_2 + \lambda_2^2 = 0$, то $\lambda_2 = (\lambda_0 + \psi)^{-1}$, где $D\lambda_0 = 0$ и $D\psi = 1$. Положим $\varphi = \ln(\lambda_0 + \psi)$.

Рассмотрим первое уравнение системы (21) и перепишем его в виде $D(t_{11}e^{2(\varphi+\nu)}) = 0$, тогда $t_{11} = t_{11,0}e^{-2(\varphi+\nu)}$. Аналогично, из системы (21) находим

$$t_{21} = t_{21,0}e^{-2(\varphi+\nu)}, \quad t_{31} = t_{31,0}e^{-2(\varphi+\nu)},$$

где $t_{11,0}$, $t_{21,0}$, $t_{31,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Рассмотрим первое уравнение системы (23) и перепишем его в виде

$$D(t_{13}e^{-2\varphi-\nu}) = t_{12,0}e^{-2\varphi}a_{23}.$$

Пусть μ — решение уравнения $D\mu = e^{-2\varphi}a_{23}$. Тогда $t_{13} = t_{12,0}\mu e^{2\varphi+\nu} + t_{13,0}e^{2\varphi+\nu}$.

Аналогично, из системы (23) находим

$$t_{23} = t_{22,0}\mu e^{2\varphi+\nu} + t_{23,0}e^{2\varphi+\nu}, \quad t_{33} = t_{32,0}\mu e^{2\varphi+\nu} + t_{33,0}e^{2\varphi+\nu},$$

где $t_{13,0}$, $t_{23,0}$, $t_{33,0}$ — произвольные инварианты дифференцирования D .

Так как a_{22} , a_{23} — произвольные функции, то матрицу T можно представить в виде $T = T_0 \begin{pmatrix} e^{-2\nu}\lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^\nu & \tau_{23} \\ 0 & 0 & e^\nu\lambda^2 \end{pmatrix}$, где ν , τ_{23} — произвольные функции и матрица $T_0 = (t_{ij,0})$, $\det T_0 = 1$, — произвольная матрица третьего порядка из инвариантов дифференцирования D . Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
2. Черноусько Ф. А., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
3. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. Чупахин А. П. Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1). Новосибирск, 1998. (Препринт/ Ин-т гидродинамики СО РАН; № 4-98).
5. Чупахин А. П. Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препринт/ Ин-т гидродинамики СО РАН; № 1-99).
6. Черевко А. А., Чупахин А. П. Стационарный вихрь Овсянникова. Новосибирск, 2005. (Препринт/ Ин-т гидродинамики СО РАН; № 1-2005).
7. Miller E. A Regularity Criterion for the Navier–Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor // Arch. Rational Mech. Anal. 2020. V. 235. P. 99–139.
8. Stephen C. A., Gary M. W. Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 086104; <https://doi.org/10.1063/5.0011649>
9. Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
10. Карчевский А. Л. Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
11. Karchevsky A. L., Rysbayuly B. R. Analytical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, No 4. P. 55–67.

12. Карчевский А. Л. Аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68.
13. Peyrière J. On an Article by W. Magnus on the Fricke Characters of Free Groups // J. Algebra. 2020. V. 228. P. 659–673.
14. Magnus W. Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups // Math. Zh. 1980. V. 170. P. 91–103.
15. Procesi C. The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. 1976. V. 19. P. 306–381.
16. Размыслов Ю. П. Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38, вып. 4. С. 723–756.
17. Whittemore A. On special linear characters of free groups of rank $n \geq 4$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40. P. 383–388.
18. Avishai Y., Berend D., Tkachenko V. Trace maps // Internat. J. Modern Phys. B. 1997. V. 11. P. 3525–3542.
19. Bresara M., Procesi C., Spenko S. Quasi-identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial // Adv. Math. 2015. V. 280. P. 439–471.
20. Cvetković M. D., Velimirović L. S. Application of shape operator under infinitesimal bending of surface filomat. 2019. V. 33, N 4. P. 1267–1271; <https://doi.org/10.2298/FIL1904267C>
21. Velimirović L. S., Cvetković M. D., Najdanović M. S., Velimirovic N. M. Variation of shape operator under infinitesimal bending of surface // Appl. Math. Comput. 2013. V. 225. P. 480–486.
22. Brustad K. K. Total derivatives of eigenvalues and eigenprojections of symmetric matrices; arXiv:1905.06045v1 [math.AP] 15 May 2019
23. Rose N. J. On the eigenvalues of a matrix which commutes with its derivative // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 4. P. 752–754.
24. Epstein I. J. Conditions for a matrix to commute with its integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 266–270.
25. Hausner M. Eigenvalues of certain operators on matrices // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 155–156.
26. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

UDC 517.9

ON INTEGRATION OF A MATRIX RICCATI EQUATION

© 2020 M. V. Neshchadim^{1,3a}, A. P. Chupakhin^{2,3b}¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aneshch@math.nsc.ru, ^bchupakhin@hydro.nsc.ru

Received 27.08.2020, revised 27.08.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. We expose the complete integration of the simplest matrix Riccati equation in the two- and three-dimensional cases for an arbitrary linear differential operator. The solution is constructed in terms of the Jordan form of an unknown matrix and the corresponding similarity matrix. We show that a similarity matrix is always representable as the product of two matrices one of which is an invariant of the differential operator.

Keywords: matrix Riccati equation, algebraic invariant, Jordan form.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.408

REFERENCES

1. Zelikin M. I. Odnorodnye prostranstva i uravnenie Rikkati v variatsionnom ischislenii [Homogeneous spaces and the riccati equation in the calculus of variations]. Moscow: Faktorial, 1998 (in Russian).
2. Chernous'ko F. A., Kolmanovskii V. B. Optimal'noe upravlenie pri sluchainykh vozmushcheniyakh [Optimal control under random perturbations]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
3. Ovsyannikov L. V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow–Izhevsk: Inst. Kompyuternykh Issledovaniy, 2003 (in Russian).
4. Chupakhin A. P. Barokhronnye dvizheniya gaza: obshchie svoystva i podmodeli tipov (1,2) i (1,1) [Barochronous gas motions: general properties and submodels of types (1,2) and (1,1)]. Novosibirsk, 1998. (Preprint/ Lavrent'ev Inst. Gidrodin. SO RAN; No. 4-98 (in Russian)).
5. Chupakhin A. P. Nebarokhronnye podmodeli tipov (1,2) i (1,1) uravnenii gazovoi dinamiki [Nonbarochronous submodels of types (1,2) and (1,1) of the gas dynamics equations]. Novosibirsk, 1999. (Preprint/ Lavrent'ev Inst. Gidrodin. SO RAN; No. 1-99 (in Russian)).
6. Cherevko A. A., Chupakhin A. P. Statsionarnyi vikhr' Ovsyannikova [The Stationary Ovsyannikov vortex]. Novosibirsk, 2005. (Preprint/ Lavrent'ev Inst. Gidrodin. SO RAN; No. 1-2005 (in Russian)).
7. Miller E. A Regularity Criterion for the Navier–Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2020, Vol. 235, pp. 99–139.
8. Stephen C. A., Gary M. W. Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow. *Phys. Fluids*, 2020, Vol. 32, pp. 086104; <https://doi.org/10.1063/5.0011649>
9. Fat'yanov A. G. Poluanaliticheskii metod resheniya pryamykh dinamicheskikh zadach v sloistyykh sredakh [Some semianalytical method for solution of the direct dynamical problems in stratified media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, Vol. 310, No. 2, pp. 323–327 (in Russian).

10. Kapchevskii A. L. Analiticheskoe peshenie upavnenii Makcvella v chactotnoi oblacti dlya gopizontal'no-cloictyx anizotpopnyx cped [Analytical solution of the Maxwell equations in the frequency domain for horizontal layered anisotropic media]. *Geologiya i geofizika*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 889–898.
11. Karchevsky A. L., Rysbayuly B. R. Analytical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media. *Euras. J. Math. Comp. Appl.*, 2015, Vol. 3, No 4, pp. 55–67.
12. Karchevskii A. L. Analytical solutions of the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 650–668.
13. Peyrière J. On an article by W. Magnus on the Fricke characters of free groups. *J. Algebra*, 2020, Vol. 228, pp. 659–673.
14. Magnus W. Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups. *Math. Zh.*, 1980, Vol. 170, pp. 91–103.
15. Procesi C. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Adv. Math.*, 1976, Vol. 19, pp. 306–381.
16. Razsmyslov Yu. P. Tozhdestva so sledom polnykh matrichnykh algebr nad polem kharakteristiki nul' [Trace identities of complete matrix algebras over a field of zero characteristic]. *Izv. AN SSSR. Ser. Matem.*, 1974, T. 38, vyp. 4, pp. 723–756 (in Russian).
17. Whittmore A. On special linear characters of free groups of rank $n \geq 4$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, Vol. 40, pp. 383–388.
18. Avishai Y., Berend D., Tkachenko V. Trace maps. *Internat. J. Modern Phys. B*, 1997, Vol. 11, pp. 3525–3542.
19. Bresara M., Procesi C., Spenko S. Quasi-identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial. *Adv. Math.*, 2015, Vol. 280, pp. 439–471.
20. Cvetkovic M. D., Velimirovic L. S. Application of shape operator under infinitesimal bending of surface filomat. *Filomat*, 2019. Vol. 33, N 4. pp. 1267–1271; <https://doi.org/10.2298/FIL1904267C>
21. Velimirovic L. S., Cvetkovic M. D., Najdanovic M. S. , Velimirovic N. M. Variation of shape operator under infinitesimal bending of surface. *Appl. Math. Comput.*, 2013, Vol. 225, pp. 480–486.
22. Brustad K. K. Total derivatives of eigenvalues and eigenprojections of symmetric matrices; arXiv:1905.06045v1 [math.AP] 15 May 2019.
23. Rose N. J. On the eigenvalues of a matrix which commutes with its derivative. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1965, Vol. 4, pp. 752–754.
24. Epstein I. J. Conditions for a matrix to commute with its integral. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, Vol. 14, pp. 266–270.
25. Hausner M. Eigenvalues of certain operators on matrices. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, Vol. 14, pp. 155–156.
26. Gantmakher F. R. Providence: AMS Chelsea Publ., 1998.