Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. I. Ostrosablin, A parametrization of the general Lorentz group , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 114–125

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.409>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 05:47:55

УДК 530.12:512.54:517.958

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОБЩЕЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

© 2020 Н. И. Остросаблин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.; после доработки 12.03.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Для общей группы Лоренца получены два новых варианта явной параметризации. Даны формулы прямых и обратных четырёхмерных преобразований Лоренца. В формулах используются трёхмерная или четырёхмерная ортогональные матрицы. Найдены инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца и формулы умножения (коммутаторы) инфинитезимальных операторов. Ортогональные трёхмерные и четырёхмерные матрицы параметризованы с помощью нижних треугольных матриц, содержащих три или шесть независимых параметров.

Ключевые слова: преобразования Лоренца, теория относительности, волновое уравнение, группа Лоренца, ортогональные матрицы, инфинитезимальные операторы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.409

В специальной теории относительности и при исследовании волновых уравнений важную роль играют преобразования Лоренца [1–3]. Математические свойства преобразований (группы) Лоренца исследовались, например, в работах [4–6]. Обычно в работах по теории относительности ограничиваются двумерными преобразованиями Лоренца, а общий случай четырёхмерных преобразований не приводят. В данной работе рассматриваются четырёхмерные преобразования (группа) Лоренца и получены два новых варианта их параметризации.

Ортогональные преобразования переменных x_i , $i = 1, 2, 3$, сохраняют уравнение Лапласа $(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33})u = 0$. Здесь $\partial_{kl} = \partial_k \partial_l$ — вторые производные по координатам x_k , x_l ; u — некоторая функция. Преобразования Лоренца не изменяют вид волнового уравнения

$$(\partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33} - \partial_{44})u = 0 \quad (1)$$

и квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \tilde{\delta}_{ij} x_i x_j, \quad \tilde{\delta}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В (1), (2) переменная x_4 равна $x_4 = ct$, где t — время, а c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости, при этом все переменные x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, будут одинаковой размерности. В теории относительности [1–3] постоянную c принимают равной скорости света, но в общем случае постоянная c не обязательно должна равняться скорости света. Эта постоянная c есть постоянная компонента вектора скорости по четвёртой координате x_4 [7]. Сведения по истории вывода преобразований Лоренца и инвариантности волнового уравнения (1) приводятся в книге [8].

Линейное преобразование переменных (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$x_i = \alpha_{ip}\hat{x}_p, \quad x_j = \alpha_{jq}\hat{x}_q, \quad i, p = 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

не меняющее форму (2), есть общее преобразование Лоренца [4]. Подставляя (3) в (2), получим

$$f = \tilde{\delta}_{ij}x_ix_j = \tilde{\delta}_{ij}\alpha_{ip}\hat{x}_p\alpha_{jq}\hat{x}_q = \alpha_{ip}\tilde{\delta}_{ij}\alpha_{jq}\hat{x}_p\hat{x}_q = \tilde{\delta}_{pq}\hat{x}_p\hat{x}_q,$$

отсюда следует

$$\alpha_{ip}\tilde{\delta}_{ij}\alpha_{jq} = \tilde{\delta}_{pq}, \quad \alpha'\tilde{\delta}\alpha = \tilde{\delta}. \quad (4)$$

Штрих означает транспонирование матрицы. Все преобразования Лоренца удовлетворяют соотношениям (4). Из (4) находим определитель матрицы преобразований

$$|\alpha'\tilde{\delta}\alpha| = |\tilde{\delta}|, \quad |\alpha'||\tilde{\delta}||\alpha| = |\tilde{\delta}|, \quad |\alpha'|(-1)|\alpha| = (-1), \quad |\alpha|^2 = 1, \quad |\alpha| = \pm 1.$$

Так как определитель не равен нулю, то существует обратное преобразование α^{-1} , которое удовлетворяет равенству (4): $\tilde{\delta} = (\alpha^{-1})'\tilde{\delta}\alpha^{-1}$, т. е. является преобразованием Лоренца. Единичное преобразование $\alpha = \delta$; δ — единичная матрица соответствующего порядка, символ Кронекера также удовлетворяет условиям (4).

Пусть имеем два преобразования

$$\alpha'\tilde{\delta}\alpha = \tilde{\delta}, \quad \beta'\tilde{\delta}\beta = \tilde{\delta},$$

тогда $\gamma = \alpha\beta$ — преобразование Лоренца:

$$\gamma'\tilde{\delta}\gamma = (\alpha\beta)'\tilde{\delta}\alpha\beta = \beta'\alpha'\tilde{\delta}\alpha\beta = \beta'\tilde{\delta}\beta = \tilde{\delta}$$

и $\gamma_1 = \beta\alpha$ — также преобразование Лоренца:

$$\gamma_1'\tilde{\delta}\gamma_1 = (\beta\alpha)'\tilde{\delta}\beta\alpha = \alpha'\beta'\tilde{\delta}\beta\alpha = \alpha'\tilde{\delta}\alpha = \tilde{\delta}.$$

Таким образом, общие преобразования Лоренца образуют группу [4].

Матрица преобразований (3) четвёртого порядка:

$$\alpha_{ip} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Из равенств (4) будем определять элементы матрицы (5). Запишем равенства (4) подробнее (δ_{ij} — трёхмерный символ Кронекера):

$$\alpha_{ip}\delta_{ij}\alpha_{jq} - \alpha_{4p}\alpha_{4q} = \tilde{\delta}_{pq},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}\alpha_{i1} - \alpha_{41}^2 &= 1, & \alpha_{i2}\alpha_{i1} - \alpha_{42}\alpha_{41} &= 0, & \alpha_{i2}\alpha_{i2} - \alpha_{42}^2 &= 1, \\ \alpha_{i3}\alpha_{i1} - \alpha_{43}\alpha_{41} &= 0, & \alpha_{i3}\alpha_{i2} - \alpha_{43}\alpha_{42} &= 0, & \alpha_{i3}\alpha_{i3} - \alpha_{43}^2 &= 1, \\ \alpha_{i4}\alpha_{i1} - \alpha_{44}\alpha_{41} &= 0, & \alpha_{i4}\alpha_{i2} - \alpha_{44}\alpha_{42} &= 0, & \alpha_{i4}\alpha_{i3} - \alpha_{44}\alpha_{43} &= 0, & \alpha_{i4}\alpha_{i4} - \alpha_{44}^2 &= -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего уравнения (6) находим

$$\alpha_{44}^2 = 1 + \alpha_{i4}\alpha_{i4} = 1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2, \quad \alpha_{44} = \varepsilon_4 \sqrt{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}, \quad \varepsilon_4 = \pm 1. \quad (7)$$

Так как, очевидно, $\alpha_{44} \neq 0$, то из уравнений (6) далее получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{43} &= \frac{1}{\alpha_{44}} \alpha_{i4} \alpha_{i3} = \frac{1}{\alpha_{44}} (\alpha_{14} \alpha_{13} + \alpha_{24} \alpha_{23} + \alpha_{34} \alpha_{33}), \\ \alpha_{42} &= \frac{1}{\alpha_{44}} \alpha_{i4} \alpha_{i2} = \frac{1}{\alpha_{44}} (\alpha_{14} \alpha_{12} + \alpha_{24} \alpha_{22} + \alpha_{34} \alpha_{32}), \\ \alpha_{41} &= \frac{1}{\alpha_{44}} \alpha_{i4} \alpha_{i1} = \frac{1}{\alpha_{44}} (\alpha_{14} \alpha_{11} + \alpha_{24} \alpha_{21} + \alpha_{34} \alpha_{31}),\end{aligned}\tag{8}$$

т. е. элементы последней строки α_{4p} в матрице (5) найдены. Они выражаются через элементы α_{1p} , α_{2p} , α_{3p} первых трёх строк.

Учитывая (7), (8), перепишем оставшиеся уравнения (6) в виде

$$\begin{aligned}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{\alpha_{44}^2} \alpha_{i4} \alpha_{j4}\right) \alpha_{ip} \alpha_{jq} &= \delta_{pq}, \quad i, j, p, q = 1, 2, 3, \quad \alpha_{ij} \alpha_{ip} \alpha_{jq} = \delta_{pq}, \\ a_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{\alpha_{44}^2} \alpha_{i4} \alpha_{j4} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha_{14}^2}{\alpha_{44}^2} & -\frac{\alpha_{14}\alpha_{24}}{\alpha_{44}^2} & -\frac{\alpha_{14}\alpha_{34}}{\alpha_{44}^2} \\ -\frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\alpha_{44}^2} & 1 - \frac{\alpha_{24}^2}{\alpha_{44}^2} & -\frac{\alpha_{24}\alpha_{34}}{\alpha_{44}^2} \\ -\frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\alpha_{44}^2} & -\frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\alpha_{44}^2} & 1 - \frac{\alpha_{34}^2}{\alpha_{44}^2} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{9}$$

Коэффициенты a_{ij} в (9) выражаются только через α_{14} , α_{24} , α_{34} . Представим a_{ij} в виде $a_{ij} = c_{is} c_{js}$, тогда (9) запишется следующим образом:

$$c_{is} c_{js} \alpha_{ip} \alpha_{jq} = (c_{is} \alpha_{ip})(c_{js} \alpha_{jq}) = \delta_{pq}.$$

Отсюда следует, что $c_{is} \alpha_{ip} = \omega_{sp}$ — ортогональная матрица третьего порядка.

Итак, пусть

$$a_{ij} = c_{is} c_{js} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}.\tag{10}$$

Сравнивая матрицы (9), (10), получим систему уравнений для c_{is} :

$$\begin{aligned}c_{11}^2 &= 1 - \alpha_{14}^2/\alpha_{44}^2, \quad c_{21}c_{11} = -\alpha_{24}\alpha_{14}/\alpha_{44}^2, \quad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1 - \alpha_{24}^2/\alpha_{44}^2, \\ c_{31}c_{11} &= -\alpha_{34}\alpha_{14}/\alpha_{44}^2, \quad c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} = -\alpha_{34}\alpha_{24}/\alpha_{44}^2, \quad c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1 - \alpha_{34}^2/\alpha_{44}^2.\end{aligned}\tag{11}$$

Из (11) последовательно находим

$$\begin{aligned}c_{11}^2 &= 1 - \frac{\alpha_{14}^2}{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2} = \frac{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}, \\ c_{11} &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad c_{11} \neq 0, \\ c_{21} &= -\frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\alpha_{44}^2 c_{11}} = -\varepsilon_1 \frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)}}, \\ c_{31} &= -\frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\alpha_{44}^2 c_{11}} = -\varepsilon_1 \frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)}}, \\ c_{22}^2 &= 1 - \frac{\alpha_{24}^2}{\alpha_{44}^2} - c_{21}^2 = \frac{1 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}, \quad c_{22} = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}}, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \quad c_{22} \neq 0, \\ c_{32} &= \frac{1}{c_{22}} \left(-\frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\alpha_{44}^2} - c_{31}c_{21} \right) = -\varepsilon_2 \frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\sqrt{(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{34}^2)}},\end{aligned}$$

$$c_{33}^2 = 1 - \frac{\alpha_{34}^2}{\alpha_{44}^2} - c_{31}^2 - c_{32}^2 = \frac{1}{1 + \alpha_{34}^2}, \quad c_{33} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}}, \quad \varepsilon_3 = \pm 1, \quad c_{33} \neq 0.$$

Итак, получили матрицу

$$c_{is} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\varepsilon_1 \alpha_{24} \alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)}} & \varepsilon_2 \sqrt{\frac{1 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}} & 0 \\ \frac{-\varepsilon_1 \alpha_{34} \alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)}} & \frac{-\varepsilon_2 \alpha_{34} \alpha_{24}}{\sqrt{(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{34}^2)}} & \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В (12) и далее множители ε_i можно не писать, т. е. считать равными единице, так как имеем $c = \tilde{c}\varepsilon$, $c' = \tilde{c}'\varepsilon'$ и $a = cc' = \tilde{c}\varepsilon\tilde{c}'\varepsilon' = \tilde{c}\tilde{c}'$. Определитель матриц (9), (10) равен

$$|a_{ij}| = c_{11}^2 c_{22}^2 c_{33}^2 = \frac{1}{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2} = \frac{1}{\alpha_{44}^2}.$$

Далее находим

$$c_{is} \alpha_{ip} = \omega_{sp}, \quad (13)$$

где, как отмечено выше, ω_{sp} — произвольная ортогональная матрица третьего порядка: $\omega_{sp}\omega_{sq} = \delta_{pq}$. Выпишем уравнения (13) подробнее

$$c_{11}\alpha_{11} + c_{21}\alpha_{21} + c_{31}\alpha_{31} = \omega_{11}, \quad c_{22}\alpha_{21} + c_{32}\alpha_{31} = \omega_{21}, \quad c_{33}\alpha_{31} = \omega_{31}; \quad (14)$$

$$c_{11}\alpha_{12} + c_{21}\alpha_{22} + c_{31}\alpha_{32} = \omega_{12}, \quad c_{22}\alpha_{22} + c_{32}\alpha_{32} = \omega_{22}, \quad c_{33}\alpha_{32} = \omega_{32}; \quad (15)$$

$$c_{11}\alpha_{13} + c_{21}\alpha_{23} + c_{31}\alpha_{33} = \omega_{13}, \quad c_{22}\alpha_{23} + c_{32}\alpha_{33} = \omega_{23}, \quad c_{33}\alpha_{33} = \omega_{33}. \quad (16)$$

Определитель матрицы систем (14)–(16) с учётом (10), (12) равен

$$|c'| = c_{11}c_{22}c_{33} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}} \neq 0.$$

Решая последовательно уравнения треугольной системы (14) и учитывая (12), получим

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \sqrt{\frac{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}} \omega_{11} + \frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{34}^2)}} \omega_{21} + \frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}} \omega_{31}, \\ \alpha_{21} &= \sqrt{\frac{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{34}^2}} \omega_{21} + \frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}} \omega_{31}, \quad \alpha_{31} = \sqrt{1 + \alpha_{34}^2} \omega_{31}. \end{aligned} \quad (17)$$

Решения систем (15), (16) аналогичны решению (17).

Таким образом, элементы α_{ip} , $i, p = 1, 2, 3$, в матрице (5) имеют вид

$$\alpha_{ip} = c_{si}^{-1} \omega_{sp}, \quad (18)$$

где с учётом (17)

$$c_{si}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}} & \frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\sqrt{(1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2)(1 + \alpha_{34}^2)}} & \frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2}{1 + \alpha_{34}^2}} & \frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\sqrt{1 + \alpha_{34}^2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{1 + \alpha_{34}^2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Матрица (19) является обратной к транспонированной матрице c' из (10), (12). Из (18) имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= c_{11}^{-1}\omega_{11} + c_{21}^{-1}\omega_{21} + c_{31}^{-1}\omega_{31}, & \alpha_{21} &= c_{22}^{-1}\omega_{21} + c_{32}^{-1}\omega_{31}, & \alpha_{31} &= c_{33}^{-1}\omega_{31}, \\ \alpha_{12} &= c_{11}^{-1}\omega_{12} + c_{21}^{-1}\omega_{22} + c_{31}^{-1}\omega_{32}, & \alpha_{22} &= c_{22}^{-1}\omega_{22} + c_{32}^{-1}\omega_{32}, & \alpha_{32} &= c_{33}^{-1}\omega_{32}, \\ \alpha_{13} &= c_{11}^{-1}\omega_{13} + c_{21}^{-1}\omega_{23} + c_{31}^{-1}\omega_{33}, & \alpha_{23} &= c_{22}^{-1}\omega_{23} + c_{32}^{-1}\omega_{33}, & \alpha_{33} &= c_{33}^{-1}\omega_{33}.\end{aligned}\quad (20)$$

Выражения (20) нужно подставить в формулы (8), чтобы получить α_{4p} , $p = 1, 2, 3$.

Учитывая формулы (7), (8), (19), (20), матрицу α_{ip} из (5) преобразований Лоренца (3) можно записать в виде произведения матриц

$$\alpha_{ip} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_{is}\omega_{sp}, \quad (21)$$

где матрица a_{is} имеет вид

$$a_{is} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}{1+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}} & \frac{\alpha_{24}\alpha_{14}}{\sqrt{(1+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2)(1+\alpha_{34}^2)}} & \frac{\alpha_{34}\alpha_{14}}{\sqrt{1+\alpha_{34}^2}} & \alpha_{14} \\ 0 & \sqrt{\frac{1+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}{1+\alpha_{34}^2}} & \frac{\alpha_{34}\alpha_{24}}{\sqrt{1+\alpha_{34}^2}} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \sqrt{1+\alpha_{34}^2} & \alpha_{34} \\ \frac{\varepsilon_4\alpha_{14}}{\sqrt{1+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}} & \varepsilon_4\alpha_{24}\sqrt{\frac{1+\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}{(1+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2)(1+\alpha_{34}^2)}} & \varepsilon_4\alpha_{34}\sqrt{\frac{1+\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2}{1+\alpha_{34}^2}} & \varepsilon_4\sqrt{1+\alpha_{14}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

а ω_{sp} , $s, p = 1, 2, 3$, является произвольной ортогональной матрицей третьего порядка.

Таким образом, формулы (21), (22) дают явный вид преобразований Лоренца (3), сохраняющих квадратичную форму (2). Элементы $\alpha_{14} = \alpha_1$, $\alpha_{24} = \alpha_2$, $\alpha_{34} = \alpha_3$ остаются свободными произвольными параметрами. Ещё три параметра определяют ортогональную матрицу ω_{sp} из (21). Отметим, что все величины под знаками квадратного корня в (22) всегда положительны и под корнем не может быть нулевой или отрицательной величины, в отличие от формул теории относительности [1–3].

Определитель матрицы (22) равен $|a_{is}| = \varepsilon_4 = \pm 1$. Найдём определитель ортогональной матрицы ω : $\omega'\omega = \delta$, $|\omega'| |\omega| = |\delta|$, $|\omega|^2 = 1$, $|\omega| = \pm 1$. Определитель матрицы α_{ip} в (21) общих преобразований Лоренца (3) равен $|\alpha| = |a| |\omega| = (\pm 1)(\pm 1)$. Может быть четыре варианта знаков определителей:

$$|a| = 1, \quad |\omega| = 1, \quad |\alpha| = 1; \quad (23')$$

$$|a| = 1, \quad |\omega| = -1, \quad |\alpha| = -1; \quad (23'')$$

$$|a| = -1, \quad |\omega| = 1, \quad |\alpha| = -1; \quad (23''')$$

$$|a| = -1, \quad |\omega| = -1, \quad |\alpha| = 1. \quad (23''')$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы (22) следующие:

$$A_{is} = \begin{bmatrix} \varepsilon_4 a_{11} & \varepsilon_4 a_{12} & \varepsilon_4 a_{13} & -\varepsilon_4 a_{14} \\ 0 & \varepsilon_4 a_{22} & \varepsilon_4 a_{23} & -\varepsilon_4 a_{24} \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 a_{33} & -\varepsilon_4 a_{34} \\ -\varepsilon_4 a_{41} & -\varepsilon_4 a_{42} & -\varepsilon_4 a_{43} & \varepsilon_4 a_{44} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

С учётом (22), (24) получаем обратную матрицу

$$\begin{aligned}
 a_{is}^{-1} &= \frac{1}{\varepsilon_4} A_{si} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{1+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon_4\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \\ \frac{\alpha_2\alpha_1}{\sqrt{(1+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(1+\alpha_3^2)}} & \sqrt{\frac{1+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{1+\alpha_3^2}} & 0 & -\varepsilon_4\alpha_2\sqrt{\frac{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{(1+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(1+\alpha_3^2)}} \\ \frac{\alpha_3\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_3^2}} & \frac{\alpha_3\alpha_2}{\sqrt{1+\alpha_3^2}} & \sqrt{1+\alpha_3^2} & -\varepsilon_4\alpha_3\sqrt{\frac{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{1+\alpha_3^2}} \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \varepsilon_4\sqrt{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} \end{bmatrix}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Обратная матрица (25) получается из матрицы (22) транспонированием и изменением знака у элементов четвёртой строки и четвёртого столбца. Обратная матрица к матрице (21) будет иметь вид $\alpha_{ps}^{-1} = \omega_{qp} a_{qs}^{-1}$, при этом общее обратное преобразование Лоренца $\hat{x}_p = \omega_{qp} a_{qs}^{-1} x_s$ или $\hat{x} = \omega' a^{-1} x$ в записи без индексов. Из (4) также следует, что $\alpha^{-1} = \tilde{\delta} \alpha' \tilde{\delta}$.

Преобразования (23') образуют собственную группу Лоренца, а преобразования (23'), (23'') — полную группу Лоренца [4–6]. Собственная группа Лоренца является непрерывной группой и определяется, как отмечено выше, шестью параметрами [4]. Найдём инфинитезимальные операторы для варианта (23'): $\alpha = a\omega$, $|a| = 1$, $|\omega| = 1$, $|\alpha| = 1$. Пусть имеем только параметр α_1 , тогда из (21), (22) получаем

$$\alpha_{ip} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+\alpha_1^2} & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \sqrt{1+\alpha_1^2} \end{bmatrix}, \quad \omega_{sp} = \delta_{sp}; \quad A_1 = \left. \frac{\partial \alpha_{ip}}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Далее, пусть имеется только параметр α_2 , тогда из (21), (22) находим

$$\alpha_{ip} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\alpha_2^2} & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \sqrt{1+\alpha_2^2} \end{bmatrix}, \quad \omega_{sp} = \delta_{sp}; \quad A_2 = \left. \frac{\partial \alpha_{ip}}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Пусть $\alpha_3 \neq 0$, тогда из (21), (22) получаем

$$\alpha_{ip} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+\alpha_3^2} & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \sqrt{1+\alpha_3^2} \end{bmatrix}, \quad \omega_{sp} = \delta_{sp}; \quad A_3 = \left. \frac{\partial \alpha_{ip}}{\partial \alpha_3} \right|_{\alpha_3=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Для ортогональной трёхмерной матрицы вращения ω_{sp} из (21) имеем параметры [9] $\omega_{32} = \omega_1$, $\omega_{13} = \omega_2$, $\omega_{21} = \omega_3$, которые определяют поворот вокруг соответствующей оси. При дифференциальном бесконечно малом изменении параметров из условий ортогональности $\omega_{ip}\omega_{jp} = \delta_{ij}$ следует, что $d\omega_{ij} = \varepsilon_{ijs} d\omega_s$ (ε_{ijs} — символы Леви — Чивиты) — антисимметричная матрица [9]. Тогда при $\omega_s = 0$ находим

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \omega_1} = \varepsilon_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \omega_2} = \varepsilon_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \omega_3} = \varepsilon_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Учитывая четырёхмерность ω_{sp} в (21) и соотношения (29), получим четырёхмерные инфинитезимальные операторы

$$A_4 = J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Коммутаторы инфинитезимальных операторов A_k образуют алгебру Ли и связаны соотношениями [10]:

$$[A_i, A_j] = c_{ijk} A_k. \quad (31)$$

Коммутатор двух операторов A_i и A_j есть выражение $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i = -[A_j, A_i]$. Величины c_{ijk} в (31) называются структурными постоянными и удовлетворяют соотношениям [10]

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0, \quad c_{ijk} c_{klm} + c_{jlk} c_{kim} + c_{lik} c_{kjm} = 0.$$

Структурные постоянные вполне определяют алгебру Ли и непрерывную группу [10].

Вычисляя коммутаторы инфинитезимальных операторов (26)–(28), (30), получим таблицу произведений

$$[A_i, A_j] = \begin{bmatrix} 0 & -A_6 & A_5 & 0 & A_3 & -A_2 \\ A_6 & 0 & -A_4 & -A_3 & 0 & A_1 \\ -A_5 & A_4 & 0 & A_2 & -A_1 & 0 \\ 0 & A_3 & -A_2 & 0 & A_6 & -A_5 \\ -A_3 & 0 & A_1 & -A_6 & 0 & A_4 \\ A_2 & -A_1 & 0 & A_5 & -A_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Сравнивая (31) и (32), найдём ненулевые структурные постоянные алгебры Ли собственной группы Лоренца

$$\begin{aligned} c_{216} &= 1, \\ c_{315} &= -1, \quad c_{324} = 1, \\ c_{513} &= -1, \quad c_{423} = 1, \quad c_{432} = -1, \quad c_{546} = -1, \\ c_{612} &= 1, \quad c_{621} = -1, \quad c_{531} = 1, \quad c_{645} = 1, \quad c_{654} = -1. \end{aligned}$$

Другим способом инфинитезимальные операторы (26)–(28), (30) получены в [5].

Получим ещё один вариант параметризации общей группы Лоренца. Квадратичная форма (2) инвариантна при линейных преобразованиях переменных, т. е. имеем

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2$$

или, перенося $x_4^2, \tilde{x}_4^2$ на противоположные стороны,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \tilde{x}_4^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 + x_4^2. \quad (33)$$

Очевидно, что форма (33) инвариантна при ортогональных преобразованиях

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

где β_{ip} — ортогональная матрица четвёртого порядка: $\beta_{ip}\beta_{iq} = \delta_{pq}$;

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}\tilde{x}_1 + \beta_{12}\tilde{x}_2 + \beta_{13}\tilde{x}_3 + \beta_{14}x_4, \\ x_2 &= \beta_{21}\tilde{x}_1 + \beta_{22}\tilde{x}_2 + \beta_{23}\tilde{x}_3 + \beta_{24}x_4, \\ x_3 &= \beta_{31}\tilde{x}_1 + \beta_{32}\tilde{x}_2 + \beta_{33}\tilde{x}_3 + \beta_{34}x_4, \\ \tilde{x}_4 &= \beta_{41}\tilde{x}_1 + \beta_{42}\tilde{x}_2 + \beta_{43}\tilde{x}_3 + \beta_{44}x_4. \end{aligned} \quad (34)$$

Перепишем уравнения (34):

$$\begin{aligned} x_1 - \beta_{14}x_4 &= \beta_{11}\tilde{x}_1 + \beta_{12}\tilde{x}_2 + \beta_{13}\tilde{x}_3, \\ x_2 - \beta_{24}x_4 &= \beta_{21}\tilde{x}_1 + \beta_{22}\tilde{x}_2 + \beta_{23}\tilde{x}_3, \\ x_3 - \beta_{34}x_4 &= \beta_{31}\tilde{x}_1 + \beta_{32}\tilde{x}_2 + \beta_{33}\tilde{x}_3, \\ -\beta_{44}x_4 &= \beta_{41}\tilde{x}_1 + \beta_{42}\tilde{x}_2 + \beta_{43}\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4. \end{aligned} \quad (35)$$

Запишем (35) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_{24} \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}, \quad Ax = B\tilde{x}. \quad (36)$$

Находим определители матриц A и B :

$$|A| = -\beta_{44}, \quad |B| = - \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = -\varkappa\beta_{44},$$

где $\varkappa = \pm 1$, знак плюс, если $|\beta_{ip}| = 1$, и знак минус, если $|\beta_{ip}| = -1$. В ортогональном определителе (матрице) каждый элемент равен алгебраическому дополнению или алгебраическому дополнению со знаком минус, если $|\beta_{ip}| = -1$.

Если $\beta_{44} \neq 0$, то из (36) получаем

$$x = A^{-1}B\tilde{x}, \quad \tilde{x} = B^{-1}Ax. \quad (37)$$

Соотношения (37) и будут прямым и обратным преобразованиями Лоренца, сохраняющими квадратичную форму (2), если только β_{ip} является ортогональной матрицей четвёртого порядка и $\beta_{44} \neq 0$. Вариант $\beta_{44} = 0$ не допустим, так как при этом $\tilde{x}_4 = \beta_{41}\tilde{x}_1 + \beta_{42}\tilde{x}_2 + \beta_{43}\tilde{x}_3$, т. е. переменные $\tilde{x}_i$ оказываются линейно зависимыми.

Из уравнений (35) находим

$$\begin{aligned} x_1 &= (\beta_{11} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{41})\tilde{x}_1 + (\beta_{12} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{42})\tilde{x}_2 + (\beta_{13} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{43})\tilde{x}_3 + \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\tilde{x}_4, \\ x_2 &= (\beta_{21} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{41})\tilde{x}_1 + (\beta_{22} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{42})\tilde{x}_2 + (\beta_{23} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{43})\tilde{x}_3 + \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\tilde{x}_4, \\ x_3 &= (\beta_{31} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{41})\tilde{x}_1 + (\beta_{32} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{42})\tilde{x}_2 + (\beta_{33} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{43})\tilde{x}_3 + \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\tilde{x}_4, \\ x_4 &= -\frac{1}{\beta_{44}}(\beta_{41}\tilde{x}_1 + \beta_{42}\tilde{x}_2 + \beta_{43}\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4), \end{aligned}$$

т. е. получили выражения x_i через $\tilde{x}_p$, при этом

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} \beta_{11} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{41} & \beta_{12} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{42} & \beta_{13} - \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}}\beta_{43} & \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}} \\ \beta_{21} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{41} & \beta_{22} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{42} & \beta_{23} - \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}}\beta_{43} & \frac{\beta_{24}}{\beta_{44}} \\ \beta_{31} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{41} & \beta_{32} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{42} & \beta_{33} - \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}}\beta_{43} & \frac{\beta_{34}}{\beta_{44}} \\ -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{41} & -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{42} & -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{43} & \frac{1}{\beta_{44}} \end{bmatrix} = \alpha. \quad (38)$$

Так как β_{ip} — ортогональная матрица, т. е. $\beta'\beta = \delta$, то обратная матрица равна транспонированной $\beta^{-1} = \beta'$, при этом из (34) следует

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{21}x_2 + \beta_{31}x_3 + \beta_{41}\tilde{x}_4, \\ \tilde{x}_2 &= \beta_{12}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{32}x_3 + \beta_{42}\tilde{x}_4, \\ \tilde{x}_3 &= \beta_{13}x_1 + \beta_{23}x_2 + \beta_{33}x_3 + \beta_{43}\tilde{x}_4, \\ x_4 &= \beta_{14}x_1 + \beta_{24}x_2 + \beta_{34}x_3 + \beta_{44}\tilde{x}_4. \end{aligned} \quad (39)$$

Перепишем уравнения (39):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 - \beta_{41}\tilde{x}_4 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{21}x_2 + \beta_{31}x_3, \\ \tilde{x}_2 - \beta_{42}\tilde{x}_4 &= \beta_{12}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{32}x_3, \\ \tilde{x}_3 - \beta_{43}\tilde{x}_4 &= \beta_{13}x_1 + \beta_{23}x_2 + \beta_{33}x_3, \\ -\beta_{44}\tilde{x}_4 &= \beta_{14}x_1 + \beta_{24}x_2 + \beta_{34}x_3 - x_4. \end{aligned} \quad (40)$$

Запишем уравнения (40) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_{41} \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_{42} \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_{43} \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & 0 \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Матрицы в (41) аналогичны матрицам в (36), только элементы β_{ip} заменены на транспонированные: β_{pi} . Тогда обратную матрицу $B^{-1}A$ в (37) получим из матрицы (38), заменив β_{ip} на β_{pi} :

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} \beta_{11} - \frac{\beta_{41}}{\beta_{44}}\beta_{14} & \beta_{21} - \frac{\beta_{41}}{\beta_{44}}\beta_{24} & \beta_{31} - \frac{\beta_{41}}{\beta_{44}}\beta_{34} & \frac{\beta_{41}}{\beta_{44}} \\ \beta_{12} - \frac{\beta_{42}}{\beta_{44}}\beta_{14} & \beta_{22} - \frac{\beta_{42}}{\beta_{44}}\beta_{24} & \beta_{32} - \frac{\beta_{42}}{\beta_{44}}\beta_{34} & \frac{\beta_{42}}{\beta_{44}} \\ \beta_{13} - \frac{\beta_{43}}{\beta_{44}}\beta_{14} & \beta_{23} - \frac{\beta_{43}}{\beta_{44}}\beta_{24} & \beta_{33} - \frac{\beta_{43}}{\beta_{44}}\beta_{34} & \frac{\beta_{43}}{\beta_{44}} \\ -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{14} & -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{24} & -\frac{1}{\beta_{44}}\beta_{34} & \frac{1}{\beta_{44}} \end{bmatrix} = \tilde{\delta}\alpha'\tilde{\delta}. \quad (42)$$

Матрицы (38), (42) взаимно обратные и дают преобразования Лоренца (37), оставляющими инвариантной квадратичную форму (2).

В формулах матриц преобразований Лоренца (21), (38), (42) участвуют ортогональные матрицы третьего порядка ω_{sp} и четвёртого порядка β_{ip} . Приведём формулы, выражающие ортогональную матрицу любого порядка через независимые параметры. В [11, 12] показано, что любую ортогональную матрицу t_{ip} можно получить процессом ортогонализации и нормирования произвольной нижней (или верхней) треугольной матрицы вида

$$c_{ip} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix}; \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 t_{i1} &= \varkappa_1 \frac{c_{i1}}{\sqrt{c_{k1}c_{k1}}}, \quad t_{i2} = \varkappa_2 \frac{c_{i2} - (c_{k2}t_{k1})t_{i1}}{\sqrt{c_{k2}c_{k2} - (c_{k2}t_{k1})^2}}, \quad t_{i3} = \varkappa_3 \frac{c_{i3} - (c_{k3}t_{k2})t_{i2} - (c_{k3}t_{k1})t_{i1}}{\sqrt{c_{k3}c_{k3} - (c_{k3}t_{k2})^2 - (c_{k3}t_{k1})^2}}, \\
 t_{i4} &= \varkappa_4 \frac{c_{i4} - (c_{k4}t_{k3})t_{i3} - (c_{k4}t_{k2})t_{i2} - (c_{k4}t_{k1})t_{i1}}{\sqrt{c_{k4}c_{k4} - (c_{k4}t_{k3})^2 - (c_{k4}t_{k2})^2 - (c_{k4}t_{k1})^2}}, \quad \varkappa_p = \pm 1, \quad p = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{44}$$

В (43) приведена матрица c_{ip} четвёртого порядка, но треугольная матрица может быть любого порядка. Столбцы ортогональной матрицы t_{ip} получаются по формулам вида (44). Ортогональную матрицу третьего порядка определяют три произвольных действительных параметра c_{21} , c_{31} , c_{32} . Для примера приведём общий вид ортогональной матрицы третьего порядка в зависимости от трёх произвольных параметров c_{21} , c_{31} , c_{32} :

$$\begin{aligned}
 T = [t_{ip}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \frac{\varkappa_1}{\sqrt{1+c_{21}^2+c_{31}^2}} & \frac{-\varkappa_2(c_{21}+c_{31}c_{32})}{\sqrt{(1+c_{21}^2+c_{31}^2)[1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2]}} & \frac{\varkappa_3(c_{21}c_{32}-c_{31})}{\sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} \\ 0 & \varkappa_2 \sqrt{\frac{1+c_{21}^2+c_{31}^2}{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} & \frac{-\varkappa_3[c_{21}(c_{21}c_{32}-c_{31})+c_{32}]}{\sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} \\ 0 & 0 & \varkappa_3 \sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\varkappa_1}{\sqrt{1+c_{21}^2+c_{31}^2}} & \frac{-\varkappa_2(c_{21}+c_{31}c_{32})}{\sqrt{(1+c_{21}^2+c_{31}^2)[1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2]}} & \frac{\varkappa_3(c_{21}c_{32}-c_{31})}{\sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} \\ \frac{\varkappa_1 c_{21}}{\sqrt{1+c_{21}^2+c_{31}^2}} & \frac{\varkappa_2[1-c_{31}(c_{21}c_{32}-c_{31})]}{\sqrt{(1+c_{21}^2+c_{31}^2)[1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2]}} & \frac{-\varkappa_3 c_{32}}{\sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} \\ \frac{\varkappa_1 c_{31}}{\sqrt{1+c_{21}^2+c_{31}^2}} & \frac{\varkappa_2[c_{21}(c_{21}c_{32}-c_{31})+c_{32}]}{\sqrt{(1+c_{21}^2+c_{31}^2)[1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2]}} & \frac{\varkappa_3}{\sqrt{1+(c_{21}c_{32}-c_{31})^2+c_{32}^2}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ортогональная матрица t_{ip} четвёртого порядка определяется формулами (44) и зависит от шести произвольных параметров c_{ip} из (43). Соответственно от этих шести параметров зависят и матрицы (38), (42) преобразований Лоренца (37). Используя шесть параметров c_{ip} из (43) и формулы (44), (38), (42), можно найти инфинитезимальные операторы для случая собственной группы Лоренца. Такие операторы были найдены выше с помощью других шести параметров. Таким образом, в работе получены два новых варианта параметризации четырёхмерных преобразований Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 1960.
2. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1991.
3. Бом Д. Специальная теория относительности. М.: Мир, 1967.
4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958.
5. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматлит, 1958.
6. Фёдоров Ф. И. Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
7. Остросаблин Н. И. Функции кинетических напряжений в механике сплошных сред // Динамика сплошной среды. 2007. Вып. 125. С. 76–116.
8. Ворovich И. И. Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и её развитие. М.; Ижевск: изд. Ин-та компьютерных исследований, 2004.
9. Остросаблин Н. И. Об инвариантах тензора четвёртого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.

10. Олвер П. И. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
11. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды. 1984. Вып. 66. С. 113–125.
12. Остросаблин Н. И. О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды. 1985. Вып. 71. С. 82–96.

UDC 530.12:512.54:517.958

A PARAMETRIZATION OF THE GENERAL LORENTZ GROUP

© 2020 N. I. Ostrosablin

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Received 12.03.2020, revised 12.03.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. We obtain the two new variants of an explicit parametrization for the general Lorentz group. Formulas are given for the direct and inverse four-dimensional Lorentz transformations. These formulas use the orthogonal three- or four-dimensional matrices. We find the infinitesimal operators of the proper Lorentz group and the multiplication formulas (commutators) of the infinitesimal operators. The orthogonal three- and four-dimensional matrices are parameterized by lower triangular matrices containing three or six independent parameters.

Keywords: Lorentz transformation, relativity theory, wave equation, Lorentz group, orthogonal matrix, infinitesimal operator.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.409

REFERENCES

1. Landau L. D., Lifshits E. M. Field Theory. Cambridge: Addison–Wesley, 1951.
2. Pauli V. Theory of Relativity. London: Pergamon Press, 1958.
3. Bom D. The Special Theory of Relativity. N. Y.: W. A. Benjamin, 1965.
4. Gel'fand I. M., Minlos R. A., Shapiro Z. Ya. Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications. Oxford: Pergamon Press, 1963.
5. Naimark M. A. Lineinye predstavleniya gruppy Lorentsa [Linear representations of the Lorentz group]. Moscow: Fizmatlit, 1958 (in Russian).
6. Fedorov F. I. Gruppy Lorentsa [The Lorentz group]. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
7. Ostrosablin N. I. Funktsii kineticheskikh napryazhenii v mekhanike sploshnykh sred [Functions of kinetic stresses in mechanics of continua] *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 2007, vyp. 125, pp. 76–116 (in Russian).
8. Vorovich I. I. Lectures on Newton's dynamics. Modern view of Newton's mechanics and its development. Moscow; Izhevsk: Publ. Inst. Kompyutern. Issled., 2004 (in Russian).
9. Ostrosablin N. I. Ob invariantakh tenzora chetvertogo ranga modulei uprugosti [On invariants of the tensor of rank four of elasticity moduli]. *Sibir. Zh. Ind. Mat.*, 1998, Vol. 1, No. 1, pp. 155–163 (in Russian).
10. Olver P. I. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N. Y.: Springer, 1986.
11. Ostrosablin N. I. O strukture tenzora modulei uprugosti. Sobstvennye uprugie sostoyaniya [On the structure of the tensor of the elasticity moduli. The elastic eigenstates]. *Dinamika sploshnoi sredy*. Sbornik nauchnykh trudov. Lavrent'ev Inst. Gidrodin. SO RAN, 1984, vyp. 66, pp. 113–125 (in Russian).
12. Ostrosablin N. I. O klassifikatsii anizotropnykh materialov [On classification of anisotropic materials]. *Dinamika sploshnoi sredy*. Sbornik nauchnykh trudov. Lavrent'ev Inst. Gidrodin. SO RAN, 1985, vyp. 71, pp. 82–96 (in Russian).