Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova, Some approximate solutions of the dynamic problem of axisymmetric shock deformation of a previously unstressed incompressible elastic medium, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2020, Volume 23, Number 4, 126–143

DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.410>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.166.219.16

April 26, 2023, 11:03:05

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УДАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕНАПРЯЖЕННОЙ НЕСЖИМАЕМО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2020 В. Е. Рагозина^a, Ю. Е. Иванова^b

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия*

E-mails: ^aragozina@vlc.ru, ^bivanova@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 27.05.2020 г.; после доработки 31.08.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

Представлены приближённые теоретические решения для краевой задачи об ударной нагрузке на границе круговой цилиндрической полости в пространстве, занятом предварительно недеформированной несжимаемой упругой средой. В работе принято, что ударная нагрузка вызывает движение частиц среды по винтовым траекториям. Сведения о типах и скоростях возможных ударных волн получены на основе анализа динамических условий совместности разрывов и дополнены соотношениями вдоль характеристических направлений. Показано, что передний фронт динамического процесса в ранее недеформированной среде — плоскополяризованная ударная волна — одновременно входит в одно из семейств характеристик. Результатом этого свойства становится постоянство направления сдвига на плоскополяризованной ударной волне. Данное условие позволяет существенно упростить получение приближённых теоретических решений для прифронтовой окрестности ударной волны. Приводятся два приближённых решения задачи: одно основано на решении системы эволюционных уравнений, полученных с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, второе определяется на основе варианта лучевого метода.

Ключевые слова: нелинейно-упругая среда, несжимаемость, ударная деформация, винтовое движение, инварианты Римана, характеристики гиперболических систем, система эволюционных уравнений, метод возмущений, лучевые ряды.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.410

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивные импульсные граничные воздействия являются основой многих технологий обработки и изготовления элементов конструкций [1–4]. Дальнейшая эксплуатация конструкций также бывает связана с воздействиями ударного типа. Их результатом являются нестационарные волны деформаций [5–7] в твёрдом теле. Если такие волны имеют разрывы поля градиента перемещений на передних фронтах, то они носят название ударных волн (или волн сильных разрывов) [6, 7]. В окрестности передних фронтов ударных волн происходят основные изменения полей деформаций и напряжений. Это определяет практическое значение изучения динамических задач, связанных с образованием и движением ударных волн. Отдельно необходимо сказать об исключительной важности таких задач в теоретическом плане, поскольку их решения невозможны без создания и развития теоретических методов анализа динамических нестационарных нелинейных задач. Наиболее полные результаты в анализе ударных волн в твёрдых телах получены для плоских волн в нелинейно-упругой изотропной среде [6, 7]. Известно [8, 9], что ударные волны изменения объёма по своим свойствам подобны объёмным

волнам в гидродинамике, тогда как для сдвиговых ударных волн такой аналогии нет. В настоящей работе авторы остановились на модели нелинейноупругой несжимаемой среды с целью исключения влияния на решение предварительных объёмных деформаций [10]. В статье проводится решение одномерной задачи о движении цилиндрической ударной сдвиговой волны по предварительно недеформированному пространству. Волна образуется в результате ударного воздействия на границе цилиндрической полости в пространстве. Ранее [11] было показано, что возможны два типа ударных цилиндрических волн, если кинематика всех точек среды определяется как винтовое движение. При этом условия могут возникнуть плоскополяризованная [7] цилиндрическая ударная волна и цилиндрическая волна с круговой поляризацией [7].

В настоящей статье определяются дифференциальные уравнения характеристик и соотношений на них, а также устанавливается взаимосвязь между определёнными типами характеристик и типом ударных волн. Показано, что на ударной волне, движущейся по предварительно недеформированному пространству, направление сдвигового воздействия неизменно. Данное свойство не следует только из условий совместности [5, 12] на ударной волне, а определяется из условий совместности и уравнений вдоль характеристик. На основе двух приближённых теоретических методов — метода сращиваемых асимптотических разложений [13] и варианта [14] метода лучевых рядов [15] — строится решение задачи о цилиндрической ударной расходящейся волне. Метод сращиваемых асимптотических разложений [13] ранее применялся при решении одномерных краевых задач ударной деформации [16]. В этих задачах за каждой из ударных волн имело место основное эволюционное уравнение [17]. В данной статье решение в окрестности ударной волны определяется системой эволюционных уравнений, что обобщает применяемые ранее подходы [16]. Для решения в виде лучевых рядов [14] условие неизменности направления сдвига на ударной волне и специальный выбор основных неизвестных функций позволяют записать уравнения затухания [14] в максимально сжатой форме. Полученные результаты без труда переносятся и на задачу о сходящихся цилиндрических волнах до момента прихода волны к оси цилиндрического тела кругового сечения.

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В пространственной декартовой системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, в представлении Эйлера движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды определяется системой уравнений [6, 10, 18]

$$\begin{aligned} 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad v_i = (\delta_{ij} - u_{i,j})^{-1}\dot{u}_j, \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \\ W(A_1, A_2) &= (a - \mu)A_1 + aA_2 + bA_1^2 - cA_1A_2 + dA_2^2 + \dots, \\ \rho\rho_0^{-1} &= \left(1 - 2A_1 + 2A_1^2 - 2A_2 - \frac{4}{3}A_1^3 + 4A_1A_2 - \frac{8}{3}A_3\right)^{1/2} = 1, \\ A_1 &= \alpha_{ii}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad A_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) $\rho = \rho_0$ — плотность среды, u_i и v_i — координаты векторов перемещений и скорости, α_{ij} и σ_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси и тензора напряжений Эйлера — Коши, δ_{ij} — компоненты единичного (метрического) тензора, p — функция дополнительного гидростатического давления, W — упругий потенциал среды, в котором μ, a, b, c, d — упругие модули. В представлении (1) функции $W(A_1, A_2)$ степенным рядом многоточием обозначены невыписанные члены, приводящие в зависимости напряжений σ_{ij} от компонент градиента перемещений $u_{i,j}$ к учёту степеней $u_{i,j}$ выше четвёртой. Известно [7], что четвёртая степень $u_{i,j}$

в формулах (1) для σ_{ij} — необходимая минимальная степень, позволяющая отразить нелинейные динамические свойства несжимаемой среды.

Рассматривается пространство, занятое средой с модельными уравнениями (1) и имеющее полость. Граница полости — бесконечный круговой цилиндр, поэтому от декартовых координат x_i переходим к криволинейным цилиндрическим координатам r, φ, z . В этих координатах уравнение границы полости $r = r_0$, а система (1) справедлива для физических компонент векторов и тензоров и при необходимом переходе от частной производной по пространственной координате к ковариантному дифференцированию. До момента $t = 0$ в среде отсутствуют предварительные деформации. С момента $t = 0$ на границе полости $r = r_0$ действует нагрузка, в результате которой все точки среды движутся по винтовым линиям. Согласно [11] компоненты вектора перемещений вычисляются следующим образом:

$$u_r(r, t) = r(1 - \cos \psi), \quad u_\varphi(r, t) = r \sin \psi, \quad u_z = u(r, t), \quad \psi = \psi(r, t) = \varphi - \varphi_0(r, t). \quad (2)$$

Из формул (1), (2) для физических компонент тензора деформаций α_{ij} и инвариантов A_1, A_2 этого тензора получим

$$\alpha_{r\varphi} = r\psi'/2, \quad \alpha_{rz} = u'/2, \quad \alpha_{rr} = -f/2, \quad \alpha_{\varphi\varphi} = \alpha_{zz} = \alpha_{\varphi z} = 0, \quad (3)$$

$$f = (r\psi')^2 + (u')^2, \quad A_1 = -f/2, \quad A_2 = f/2 + f^2/4, \quad \psi' = \partial\psi/\partial r, \quad u' = \partial u/\partial r.$$

Из (3) следует, что для кинематики (2) наименьшая из степеней градиента $u_{i,j}$ в A_1 и A_2 имеет общее значение и равна двум. Тем самым $W(A_1, A_2)$ в (1) гарантирует необходимую третью степень $u_{i,j}$ в формулах для напряжений σ_{ij} . Ненулевые компоненты напряжений σ_{ij} согласно (1), (3) вычисляются как

$$\sigma_{r\varphi} = \mu r\psi' H, \quad \sigma_{rz} = \mu u' H, \quad H = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f^i = \frac{\partial W}{\partial A_2} - \frac{\partial W}{\partial A_1} - 2 \frac{\partial W}{\partial A_2} A_1, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr} = -p + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i f^i = -p + \frac{\partial W}{\partial A_1} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial A_2} - \frac{\partial W}{\partial A_1} \right) \alpha_{rr} - 4 \frac{\partial W}{\partial A_2} (\alpha_{rr}^2 + \alpha_{r\varphi}^2 + \alpha_{rz}^2),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + \frac{\partial W}{\partial A_1} - 4 \frac{\partial W}{\partial A_2} \alpha_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{zz} = -p + \frac{\partial W}{\partial A_1} - 4 \frac{\partial W}{\partial A_2} \alpha_{rz}^2,$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = (a + b + c + d)/\mu.$$

В (4) все безразмерные константы β_i и γ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются по упругим модулям задачи. В формулах (4) и далее функция $H(f)$ представлена бесконечным рядом по степеням f , что означает возможность записи ряда для $W(A_1, A_2)$ в (1) до произвольных степеней A_1 и A_2 . Такой подход позволяет получить более универсальные выводы.

В момент времени $t = 0$ на границе $r = r_0$ производится ударное воздействие. Считаем, что возникающие на границе $r = r_0$ перемещения — известные функции времени, поэтому система краевых и начальных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \psi|_{r=r_0, t \geq 0} &= r_0 \Psi(t), \quad u|_{r=r_0, t \geq 0} = U(t), \\ \Psi(0) &= U(0) = 0, \quad \dot{\Psi}(0) \dot{U}(0) \neq 0, \\ \psi|_{r \geq r_0, t \leq 0} &= u|_{r \geq r_0, t \leq 0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) $\Psi(t)$, $U(t)$ — известные функции. Наличие скачка скоростей в краевых условиях (последнее соотношение в (5)) приводит к построению решения краевой задачи, содержащего поверхности сильных разрывов — ударные волны [5, 6]. Краткое описание возможных типов осесимметричных ударных волн, согласованных с кинематикой (2), и формулы для скоростей этих ударных волн были получены ранее [11].

В разд. 2 на основании результатов [11] и с учётом уравнений вдоль характеристических направлений определяются краевые условия задачи (1)–(5) на ударной волне, движущейся в предварительно недеформированной несжимаемой упругой среде.

2. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СЕМЕЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С ВИНТОВОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Известно [5, 8], что характеристические направления и уравнения вдоль них играют ключевую роль в построении решений гиперболических краевых задач нелинейной механики. На основе характеристических соотношений строится и процедура теоретического анализа изучаемой задачи [5], и разнообразные вычислительные схемы [19]. Определим уравнения характеристик краевой задачи (1)–(5). Уравнения движения этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \rho w_r, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} &= \rho w_\varphi, \quad \sigma_{rz,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho w_z, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь w_r , w_φ , w_z — физические компоненты вектора ускорений. Для вычисления характеристик в (6) достаточно последних двух уравнений. Первое из уравнений (6) позволяет по найденному полю $\psi(r, t)$ и $u(r, t)$ вычислить функцию $p(r, t)$. Стандартная схема [5, 8] вычисления углов наклона семейств характеристик (6) приводит к уравнениям

$$\frac{dr}{dt} = \pm C\sqrt{H}, \quad \frac{dr}{dt} = \pm C\sqrt{H + 2fH'}, \quad H' = \frac{dH}{df}. \quad (7)$$

Вдоль первого из семейств характеристик (7) выполняются соотношения вида

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{H}}{C} \left(f_2 \frac{df_1}{dt_{(1)}} - f_1 \frac{df_2}{dt_{(1)}} \right) - \frac{f_2}{C^2} \frac{df_3}{dt_{(1)}} + \frac{f_1}{C^2} \frac{df_4}{dt_{(1)}} + \frac{H f_1 f_2}{r} \pm \frac{\sqrt{H} f_2 f_3}{Cr} &= 0, \\ \frac{d}{dt_{(1)}} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H} \frac{\partial}{\partial r}, \quad f_1 = r\psi', \quad f_2 = u', \quad f_3 = r\dot{\psi}, \quad f_4 = \dot{u}, \quad C^2 = \mu\rho^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вдоль второго семейства характеристик (7) имеет место уравнение

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{H + 2fH'}}{2C} \frac{df}{dt_{(2)}} - \frac{f_1}{C^2} \frac{df_3}{dt_{(2)}} - \frac{f_2}{C^2} \frac{df_4}{dt_{(2)}} + \frac{Hf}{r} + \frac{Hf_1^2}{r} \pm \frac{\sqrt{H + 2fH'}}{Cr} f_1 f_3 &= 0, \\ \frac{d}{dt_{(2)}} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H + 2fH'} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнение между собой углов наклона характеристик (7) позволяет утверждать, что для материалов, у которых $H'(f) > 0$ (выполняется, в частности, для $H = 1 + \gamma_1 f$, $\gamma_1 > 0$), второе семейство образует «быстрые» характеристики, а первое — «медленные». Далее для определённости ограничимся случаем $H'(f) > 0$, $\gamma_1 > 0$, хотя отметим, что несмотря на многообразие методов экспериментальной механики [1, 4], до сих пор мало сведений об упругих модулях четвёртого и более высоких порядков [10, 20, 21]. В этом плане случай $H'(f) < 0$ также может изучаться.

Для уравнений (8) легко проверить утверждение: если $f_3 = \mp C\sqrt{H}f_1$, $f_4 = \mp C\sqrt{H}f_2$, то выполняется

$$\frac{d}{dt_{(1)}} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = 0, \quad \left. \frac{f_1}{f_2} \right|_{(1)} = \text{const}. \quad (10)$$

Представленное соотношение (10) может иметь место, когда, например, в среде движется ударная волна, перед которой отсутствуют предварительные деформации и при условии, что эта волна сама входит в число характеристик первого направления. В этом случае указанные связи между f_3 и f_1 , f_4 и f_2 — следствие геометрических и кинематических условий совместности разрывов [12]. Насколько такая ситуация возможна, обсудим далее в связи со сведениями о типах и скоростях ударных волн для задачи осесимметричной деформации [11].

Скорости и типы ударных волн следуют из динамического условия совместности, согласованного с законом сохранения импульса [5–7]:

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho(v_j^+ n_j - G)[v_i], \quad [\sigma_{ij}] = (\sigma_{ij})^+ - (\sigma_{ij})^-. \quad (11)$$

В (11) n_j — компоненты единичной внешней нормали к поверхности ударной волны, G — скорость ударной волны в направлении нормали n_j , индексы $+$ и $-$ означают предельные величины проиндексированной переменной перед волной и сразу за ней. Квадратными скобками в (11) и далее обозначен разрыв (скачок) величины, заключённой в них. Для задач (1), (2) при винтовом типе кинематики из (11) следуют два возможных типа ударных волн [11]:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= G_1 = C\sqrt{H^+} = C\sqrt{H^-}, \quad [H] = [f] = 0; \\ \frac{dr}{dt} &= G_2 = C\sqrt{H^+ + [H]\left(\frac{(r\psi')^+}{[r\psi']} - 1\right)}, \quad \frac{(r\psi')^+}{[r\psi']} = \frac{(u')^+}{[u']}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ударная волна со скоростью G_1 определяет скачкообразное изменение направления предварительного сдвига и носит название цилиндрической волны круговой поляризации [7].

Ударная волна со скоростью G_2 изменяет величину предварительного сдвига и не меняет его направление. Такая волна может быть названа [7] плоскополяризованной ударной волной. В общем случае наличия предварительных статических деформаций, связанных с винтовой кинематикой (2), краевые условия (5) приводят к движению по среде двух ударных волн (12). Если же предварительные деформации отсутствуют ($u'|_{t \leq 0} = r\psi'|_{t \leq 0} = 0$), то из (1), (2), (11) получим

$$(H^- - G^2 C^{-2})[r\psi'] = 0, \quad (H^- - G^2 C^{-2})[u'] = 0. \quad (13)$$

Из (13) следует, что скорость ударной волны вычисляется простым соотношением

$$G = C\sqrt{H^-}, \quad (14)$$

т. е. такая ударная волна содержится среди характеристик $\frac{dr}{dt}$ первого семейства согласно (7). Эта волна также должна быть названа плоскополяризованной (она меняет величину предварительного сдвига на ненулевую, что касается неизменности направления предварительного сдвига, то нулевому вектору $(u')^+ = (r\psi')^+ = 0$ можно приписать любое направление). Очевидно, что ударная волна со скоростью (14) не относится к волнам круговой поляризации. Ещё одно важное краевое условие для плоскополяризованной ударной волны (14) следует не из (11), а только в сравнении с (7)–(9) — соотношениями вдоль характеристик задачи. Для этих уравнений соотношения $f_3 = -C\sqrt{H^-}f_1$, $f_4 = -C\sqrt{H^-}f_2$ являются вариантом записи кинематического условия совместности [12] производных первого порядка. При этом, как следует из (10), получим

$$\frac{(u')^-}{(r\psi')^-} = \frac{(\dot{u})^-}{(r\dot{\psi})^-} = \text{const}. \quad (15)$$

Отношение (15), таким образом, сохраняет значение, полученное в момент $t = 0$. Отметим, что это условие может быть получено только из соотношений на характеристиках

и не следует из (13): уравнения (13) при скорости (14) допускают произвольные значения $[r\psi'] = -(r\psi')^-$ и $[u'] = -(u')^-$.

С учётом (14), (15) сформулируем дополнительные к начальным и краевым условиям (5) условия на переднем фронте ударной волны:

$$\begin{aligned} \psi(r, t)|_{r=R(t)} &= 0, \quad u(r, t)|_{r=R(t)} = 0, \\ [\psi'(r, t)]|_{r=R(t)} &= -(\psi')^-|_{r=R(t)}, \quad [u'(r, t)]|_{r=R(t)} = -(u')^-|_{r=R(t)}, \\ \frac{(\psi')^-}{(u')^-}|_{r=R(t)} &= \text{const}, \quad R(t) = r_0 + \int_0^t G(\tau) d\tau, \quad G = C\sqrt{H^-}. \end{aligned} \quad (16)$$

Краевая задача (1), (2), (5), (16) нелинейная как по уравнениям движения, так и по краевым условиям. Это обстоятельство исключает возможность получения точного решения и создаёт необходимость обращения к приближённым методам [13, 15] теоретического решения. Применение одного из таких приближённых методов — метода сращиваемых асимптотических разложений [13] к задаче (1), (2), (5), (16) будет представлено в разд. 3.

3. РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ УДАРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕНАГРУЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Многочисленные варианты метода малого параметра широко применяются в решении краевых задач современной механики и физики [13, 17, 22]. Один из этих методов — метод сращиваемых асимптотических разложений [13] ранее применялся [11, 16] к нестационарным одномерным задачам, связанным с движением ударных волн в нелинейно-упругих средах. Для таких задач метод сращиваемых асимптотических разложений позволил показать [16], что поведение решения в окрестности переднего фронта ударной волны определяется на основании некоторого эволюционного [17] уравнения. Такое эволюционное уравнение является прямым следствием исходных уравнений движения, но, сохраняя нелинейный тип, намного проще исходных уравнений и допускает определение своего общего и частных решений. Далее представим решение осесимметричной задачи (1), (2), (5), (16) с винтовой кинематикой для предварительно ненагруженной среды на основе метода сращиваемых асимптотических разложений.

Применение метода малого параметра основано на выборе безразмерных переменных и согласованном с ними выборе малого параметра задачи. Пусть безразмерные переменные определены формулами

$$\begin{aligned} s &= (r - r_0)r_0^{-1}\varepsilon^{-4}, \quad m = (r - r_0 - Ct)r_0^{-1}\varepsilon^{-3}, \\ v &= \psi\varepsilon^{-9/2}, \quad w = ur_0^{-1}\varepsilon^{-9/2}, \quad v = v(s, m), \quad w = w(s, m), \end{aligned} \quad (17)$$

в которых $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи. В безразмерных переменных (17) из краевых условий (5) получим условия

$$v|_{s=0, m \leq 0} = V(m), \quad w|_{s=0, m \leq 0} = W(m), \quad V(0) = W(0) = 0, \quad (18)$$

в которых $V(m)$ и $W(m)$ — известные функции. Одновременно переход от (5) к (18) в каждом конкретном случае краевых условий определяет и формулу для малого параметра [13, 16].

Для определения поля перемещений и деформаций в среде второе и третье уравнения движения (6) запишем с учётом (2), (3):

$$\begin{aligned} \psi''(1 + \gamma(u')^2 + 3\gamma(r\psi')^2) + 2\gamma\psi'u'u'' + \psi'r^{-1}(3 + 3\gamma(u')^2 + 5\gamma(r\psi')^2) + \dots &= \ddot{\psi}C^{-2}, \\ u''(1 + 3\gamma(u')^2 + \gamma(r\psi')^2) + 2\gamma r^2\psi'u'\psi'' + u'r^{-1}(1 + \gamma(u')^2 + 3\gamma(r\psi')^2) + \dots &= \ddot{u}C^{-2}, \\ \gamma &= \gamma_1 = (a + b + c + d)\mu^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

В (19) многоточием обозначены слагаемые, соответствующие невыписанной части степенного ряда для $W(A_1, A_2)$ в (1). Наличие или отсутствие данных слагаемых в (19) не меняет принципиально важных приёмов решения. Переходя в уравнениях (19) к переменным (17), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (v_{,ss} + 2\varepsilon v_{,sm} + \varepsilon^2 v_{,mm}) \{1 + \gamma\varepsilon(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2 + 3\gamma\varepsilon(1 + \varepsilon^4 s)^2(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})^2\} \\ & \quad + 2\gamma\varepsilon(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})(w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}) \\ & \quad + \varepsilon^4(1 + \varepsilon^4 s)^{-1}(v_{,s} + \varepsilon v_{,m}) \{3 + 3\gamma\varepsilon(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2 + 5\gamma\varepsilon(1 + \varepsilon^4 s)^2(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})^2\} + \dots \\ & \quad = \varepsilon^2 v_{,mm}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & (w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}) \{1 + 3\gamma\varepsilon(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2 + \gamma\varepsilon(1 + \varepsilon^4 s)^2(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})^2\} \\ & \quad + 2\gamma\varepsilon(1 + \varepsilon^4 s)^2(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})(v_{,ss} + 2\varepsilon v_{,sm} + \varepsilon^2 v_{,mm}) \\ & \quad + \varepsilon^4(1 + \varepsilon^4 s)^{-1}(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}) \{1 + \gamma\varepsilon(w_{,s} + \varepsilon w_{,m})^2 + 3\gamma\varepsilon(1 + \varepsilon^4 s)^2(v_{,s} + \varepsilon v_{,m})^2\} + \dots \\ & \quad = \varepsilon^2 w_{,mm}. \end{aligned}$$

Для решения краевой задачи (18), (20), называемой внешней [13], неизвестные функции $v(s, m)$, $w(s, m)$ представим асимптотическими рядами по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} v(s, m) &= v_0(s, m) + \varepsilon v_1(s, m) + \varepsilon^2 v_2(s, m) + \dots, \\ w(s, m) &= w_0(s, m) + \varepsilon w_1(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) v_0 , v_1 , v_2 , w_0 , w_1 , w_2 , ... — неизвестные функции. Подстановка рядов (21) в (18), (20) позволяет получить последовательность краевых задач для новых неизвестных функций. Решение этих задач позволяет записать

$$\begin{aligned} v(s, m) &= y_0(m)s + V(m) + \varepsilon \{-y'_0(m)s^2 + y_1(m)s\} + \dots, \\ w(s, m) &= x_0(m)s + W(m) + \varepsilon \{-x'_0(m)s^2 + x_1(m)s\} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

В (22) $y_0(m)$, $x_0(m)$, $y_1(m)$, $x_1(m)$ — неизвестные функции. Решение (22) согласно выбранным масштабам безразмерных переменных s , m в (17) имеет место в окрестности переднего фронта возмущения при условии его малого отхода от нагружаемой границы $r = r_0$. Это решение построено без учёта краевых условий (16) на переднем фронте ударной волны. Для отражения влияния условий (16) на приближённое решение необходимо изменить масштаб переменных s , m с целью перехода к расстояниям, где нелинейные свойства задачи проявляются в полном объёме. Для задач плоской одномерной деформации такой переход связан с изменением масштаба переменной s , соответствующим переходу на большие расстояния от границы [16]. Для рассматриваемой здесь осесимметричной задачи её нелинейные свойства проявляются уже на расстояниях $(r - r_0)r_0^{-1} \sim 1$, поэтому от переменных (17) достаточно перейти к переменным

$$n = \varepsilon^4 s = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad m = \frac{r - r_0 - Ct}{r_0} \varepsilon^{-3}, \quad w = w(n, m), \quad v = v(n, m). \quad (23)$$

В (23) для безразмерных функций перемещений оставлены обозначения w и v , но теперь это новые неизвестные функции аргументов n и m , определяемые на основе решения внутренней задачи [13] метода сращиваемых асимптотических разложений. Переход в уравнениях движения (20) к переменным (23) позволяет получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (v_{,mm} + 2\varepsilon^3 v_{,nm} + \varepsilon^6 v_{,nn}) \{1 + \gamma\varepsilon^3(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})^2 + 3\gamma\varepsilon^3(1 + n)^2(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n})^2\} \\ & \quad + 2\gamma\varepsilon^3(w_{,mm} + 2\varepsilon^3 w_{,nm} + \varepsilon^6 w_{,nn})(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n}) + \varepsilon^3(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n})(1 + n)^{-1} \end{aligned}$$

$$\times \{3 + 3\gamma\varepsilon^3(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})^2 + 5\gamma\varepsilon^3(1+n)^2(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n})^2\} = v_{,mm}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & (w_{,mm} + 2\varepsilon^3 w_{,nm} + \varepsilon^6 w_{,nn})\{1 + 3\gamma\varepsilon^3(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})^2 + \gamma\varepsilon^3(1+n)^2(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n})^2\} \\ & + 2\gamma\varepsilon^3(1+n)^2(v_{,mm} + 2\varepsilon^3 v_{,nm} + \varepsilon^6 v_{,nn})(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n}) + \varepsilon^3(w_{,m} \\ & + \varepsilon^3 w_{,n})(1+n)^{-1}\{1 + \gamma\varepsilon^3(w_{,m} + \varepsilon^3 w_{,n})^2 + 3\gamma\varepsilon^3(1+n)^2(v_{,m} + \varepsilon^3 v_{,n})^2\} = w_{,mm}. \end{aligned}$$

Согласно с видом уравнений (24) предположим, что решением для функций $v(n, m)$ и $w(n, m)$ служат асимптотические ряды со степенями малого параметра, кратными трём:

$$v(n, m) = v_0 + \varepsilon^3 v_1 + \varepsilon^6 v_2 + \dots, \quad w(n, m) = w_0 + \varepsilon^3 w_1 + \varepsilon^6 w_2 + \dots \quad (25)$$

Подставляя ряды (25) в уравнения (24), для функций $v_0(n, m)$ и $w_0(n, m)$ на нулевом шаге метода получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & v_{0,nm} + v_{0,mm} \left(\frac{\gamma}{2} w_{0,m}^2 + \frac{3\gamma}{2} (1+n)^2 v_{0,m}^2 \right) + \gamma w_{0,mm} v_{0,m} w_{0,m} + \frac{3}{2} \frac{v_{0,m}}{1+n} = 0, \\ & w_{0,nm} + w_{0,mm} \left(\frac{3\gamma}{2} w_{0,m}^2 + \frac{\gamma}{2} (1+n)^2 v_{0,m}^2 \right) + \gamma (1+n)^2 v_{0,mm} v_{0,m} w_{0,m} + \frac{w_{0,m}}{2(1+n)} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Дальнейшее преобразование системы (26) в соответствии со свойствами ударных цилиндрических волн, описанными в разд. 1–2, выполняется на основе замены неизвестных функций

$$g = v_{0,m}, \quad h = w_{0,m}, \quad \varkappa = (1+n)^2 g^2 + h^2, \quad \theta = (1+n)gh^{-1}. \quad (27)$$

Для рассматриваемого приближения к точному решению функции $\varkappa$ и θ в (27) определяют квадрат интенсивности импульсного воздействия и направление этого воздействия соответственно. Одновременно эти функции являются инвариантами Римана [8] системы (26). Следствием системы (26) для функций (27) становится эволюционная система уравнений

$$\varkappa_{,n} + \frac{3\gamma}{2} \varkappa \varkappa_{,m} + \frac{\varkappa}{1+n} = 0, \quad \theta_{,n} + \frac{\gamma}{2} \varkappa \theta_{,m} = 0. \quad (28)$$

Первое из уравнений системы (28) содержит только функцию $\varkappa$ и интегрируется относительно неё независимо от второго уравнения. Последнее слагаемое в первом уравнении (28) определяет затухание интенсивности $\varkappa$, соответствующее цилиндрическому типу волнового процесса. Изменение направления сдвига (отношение rv' к u') определяется на нулевом шаге метода функцией θ . Уравнение относительно θ в системе (28) по своему виду такое же, как и для задачи об одномерных плоских волнах сдвига [16]. Зависимость функции θ от эффекта затухания проявляется косвенно через затухание функции $\varkappa$.

Общее решение системы эволюционных уравнений (28) представим в виде

$$\begin{aligned} (1+n)\varkappa &= F_0 \left(m - \frac{3\gamma}{2} (1+n) \ln(1+n)\varkappa \right), \\ \theta &= \text{const} \quad \text{вдоль} \quad \frac{dm}{dn} = \frac{\gamma}{2} \varkappa. \end{aligned} \quad (29)$$

Для решения конкретных краевых задач с заданными функциями граничных перемещений $\Psi(t)$ и $U(t)$ в условиях (5) необходимо определить функцию F_0 в (29) таким образом, чтобы вычисляемые в соответствии с выбором F_0 функции $v_0(n, m)$ и $w_0(n, m)$ внутреннего решения [13] допускали сращивание с внешним решением (22). При этом решение (22) зависит от $\Psi(t)$, $U(t)$ в соответствии с (5) и (18).

Ранее [16, 23] были получены асимптотические решения для одномерной плоской продольной волны в сжимаемой упругой среде и для одномерной плоской поперечной волны в несжимаемой среде. В обоих случаях [16, 23] для соответствующих им эволюционных уравнений частные решения этих уравнений выбирались в виде линейной функции своей характеристической переменной. Эволюционные уравнения в [16, 23] определяли изменение интенсивности воздействия, т. е. соответствовали по своему содержанию первому уравнению в (28) и (29). Рассматриваемая здесь задача представляет обобщение подходов [16, 23] в том плане, что её решение дополнительно зависит от отношения между собой двух компонент сдвига (h и $(1+n)g$) на основе второго уравнения (28) и его решения (29). В продолжение [16, 23] представляется целесообразным построить частное решение (29) на основе выбора F_0 в виде линейной функции своего аргумента. Тогда из (29) следует

$$\begin{aligned} y = (1+n)\varkappa = F_0(\xi) = A\xi + B, \quad \xi = m - \frac{3\gamma}{2} \ln(1+n)y, \quad z(n) = \sqrt[3]{1 + \frac{3\gamma}{2} A \ln(1+n)}, \\ \varkappa(m, n) = \frac{(Am + B)}{(1+n)z^3(n)}, \quad \eta = \frac{(Am + B)}{z(n)}, \quad \theta = \theta(\eta), \quad A, B = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно (29), выбор вида F_0 полностью определяет функцию $\varkappa(m, n)$ — квадрат интенсивности воздействия, а также обе характеристические переменные $\eta(m, n)$ и $\xi(m, n)$. Дальнейшая конкретизация (30) связана с выбором $\theta(m, n)$. Если предположить, что каждая из компонент квадрата сдвига h^2 и $g^2(1+n)^2$ выражается через линейную функцию переменной m , то из (30) получим

$$\begin{aligned} \theta = \frac{g(1+n)}{h} = \frac{\sqrt{C_1\eta + E_1}}{\sqrt{(1-C_1)\eta - E_1}}, \\ w_{0,m} = h(m, n) = \frac{\sqrt{(1-C_1)\eta - E_1}}{(1+n)^{1/2}z(n)}, \quad v_{0,m} = g(m, n) = \frac{\sqrt{C_1\eta + E_1}}{(1+n)^{3/2}z(n)}. \end{aligned} \quad (31)$$

В (31) C_1, E_1 — неизвестные константы. Формулы (31) показывают различия в скорости затухания по пространственной координате n для функций $w_{0,m}$ и $v_{0,m}$. Определение $w_0(m, n)$ и $v_0(m, n)$ связано с уравнениями (16) на переднем фронте ударной волны. Запись уравнений (16) в переменных $m, n, w(m, n), v(m, n)$ на нулевом шаге метода позволяет получить соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dm_0(n)}{dn} = \frac{\gamma}{2}((1+n)^2 v_{0,m}^2 + w_{0,m}^2), \quad m(n) = m_0(n) + \varepsilon^3 m_1(n) + \dots, \\ v_{0,m}|_{m=m_0(n)} = v_{0,m}(m_0(n), n), \quad w_{0,m}|_{m=m_0(n)} = w_{0,m}(m_0(n), n). \end{aligned} \quad (32)$$

В (32) $m(n)$ — функция, связывающая переменные m и n на переднем фронте ударной волны. Как и следовало ожидать, в соответствии с (12), (14) правая часть (32) определяется формулой (30) для $\eta(m, n)$ с дополнительным краевым условием $m_0(0) = 0$. Из (30), (32) нетрудно получить уравнение в нулевом приближении, задающее положение ударной волны:

$$m_0(n) = \frac{B}{A} \{z(n) - 1\}. \quad (33)$$

При $n \rightarrow 0$ (переход ко внешним переменным) от уравнения (33) переходим к линейному приближению $m_0(n) = 0$. Здесь ещё раз подчеркнём, что для цилиндрических ударных волн в нелинейно-упругой среде накопление нелинейных эффектов в окрестности переднего фронта происходит на расстояниях $n \sim 1$, т. е. $r - r_0 \sim r_0$. Теперь, интегрируя (31) относительно

$w_0(m, n)$, $v_0(m, n)$ с учётом краевых условий $v_0(m_0(n), n) = 0$, $w_0(m_0(n), n) = 0$ и (33), получим

$$\begin{aligned} v_0(m, n) &= \frac{2}{3C_1 A(1+n)^{3/2}} \left\{ \left(\frac{C_1(Am+B) + E_1 z}{z} \right)^{3/2} - (C_1 B + E_1)^{3/2} \right\}, \\ w_0(m, n) &= \frac{2}{3(1-C_1)A\sqrt{1+n}} \left\{ \left(\frac{(1-C_1)(Am+B) - E_1 z}{z} \right)^{3/2} - ((1-C_1)B - E_1)^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Формулы (33), (34) полностью определяют решение внутренней задачи на нулевом шаге метода. Дополнительно отметим, что внутреннее решение (34) соответствует краевым условиям (18) внешней задачи и её решению (22), если в них принять

$$W(m) = \frac{2}{3} \{ (a_1 m + a_2)^{3/2} - a_2^{3/2} \}, \quad V(m) = \frac{2}{3} \{ (a_3 m + a_4)^{3/2} - a_4^{3/2} \}, \quad (35)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — константы. Сопоставление решений (22) и (34) на нулевом шаге метода позволяет определить неизвестные константы и функции:

$$y_0(m) = x_0(m) = 0, \quad A = a_1^3 + a_3^3, \quad C_1 = a_3^3/A, \quad B = a_2 a_1^2 + a_4 a_3^2, \quad E_1 = (a_1 a_4 - a_3 a_2) a_1^2 a_3^2/A.$$

Из полученного решения (34) следует $\theta(m_0(n), n) = \text{const}$, что полностью соответствует выводам разд. 1–2. Представленное решение (22), (34) можно продолжить, выполняя следующие шаги метода сращиваемых асимптотических разложений [13], если есть необходимость уточнения главной асимптотики.

Далее в исходных размерных переменных приводятся некоторые результаты численных расчётов для приближённого решения (34) поставленной краевой задачи (1)–(5) для материала с параметрами $C = 1000$ м/с, $\gamma = 200$. Нагружение на границе полости $r_0 = 1$ м задавалось функциями $U(t) = \frac{2}{3} \{ (0,8t + 0,01)^{3/2} - 0,01^{3/2} \}$ и $\Psi(t) = \frac{2}{3} \{ (0,7t + 0,015)^{3/2} - 0,015^{3/2} \}$. На рис. 1–2 представлены распределения полей перемещений $u_\varphi(r, t)$ и $u_z(r, t)$ в фиксированных точках пространства: $r_1 = 8,5$, $r_2 = 9$, $r_3 = 9,5$, $r_4 = 10$ и в различные моменты времени: $t_1 = 0,0075$, $t_2 = 0,008$, $t_3 = 0,0085$, $t_4 = 0,009$. На рис. 3 показано распределение деформаций $\alpha_{r\varphi}(r, t)$ и $\alpha_{rz}(r, t)$ в различные моменты времени: $t_1 = 0,0075$, $t_2 = 0,008$, $t_3 = 0,0085$, $t_4 = 0,009$. Каждая координата r_i соответствует положению ударной волны в момент времени t_i . Из проведённых расчётов (33) следует, что ударная волна существенно опережает передний фронт возмущений в линеаризованной задаче.

Рис. 1. Поле перемещений точек среды в фиксированных точках пространства:
(а) $u_\varphi(r, t)$; (б) $u_z(r, t)$

Несмотря на то, что деформации $\alpha_{r\varphi}(r, t)$ возрастают по абсолютной величине, а деформации $\alpha_{rz}(r, t)$ убывают (рис. 3), сумма квадратов $\alpha_{r\varphi}(r, t)$ и $\alpha_{rz}(r, t)$ — растущая величина. Для характеристических направлений задачи более важным является не изменение каждой из деформаций по отдельности, а изменение суммы их квадратов. Все вычисления выполнены

Рис. 2. Поле перемещений точек среды в фиксированных моменты времени:
(а) $u_r(r, t)$; (б) $u_z(r, t)$

Рис. 3. Распределение деформаций в фиксированных моменты времени:
(а) $\alpha_{r\varphi}(r, t)$; (б) $\alpha_{rz}(r, t)$

в соответствии с полученным асимптотическим решением в окрестности ударной волны, где безразмерные переменные $n \sim 1$, $m \sim 1$.

Поскольку система уравнений (27) далеко не всегда позволяет получить явные представления для функций $v_0(m, n)$, $w_0(m, n)$, то возникает дополнительная задача вычисления приближённых решений на основе более простых функций. Одна из возможностей решения этой задачи связана с применением модификации метода лучевых рядов [15, 24], предложенной в [25]. В разд. 4 проводится решение краевой динамической осесимметричной задачи (5), (16), (19) на основе лучевого метода [15, 25].

4. ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СДВИГОВОЙ УДАРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕНАПРЯЖЕННОЙ СРЕДЫ

В разд. 3 при записи уравнений движения (19) для компонент напряжений $\sigma_{r\varphi} = \mu r \psi' H$, $\sigma_{rz} = \mu u' H$ в (4) предполагалось, что $H(f) \approx 1 + \gamma_1 f$, $f = (r\psi')^2 + (u')^2$. Последующие слагаемые ряда $H(f)$ в (4) не оказывают влияние на вид эволюционных уравнений (28), если только малость поля перемещений относительно пространственных координат позволяет строить внешнее и внутреннее асимптотическое решение в переменных (17), (23).

Поскольку применение лучевого метода [15] не основано на предположении малости поля перемещений и связанных с ним деформаций, здесь сохраняем полное представление (4) функции $H(f)$, не ограничиваясь в нём конечным числом слагаемых. Это позволит говорить об общем характере полученных выводов и результатов.

Метод лучевых рядов [24] в своём варианте для нестационарных динамических задач механики сплошных сред основан [15, 25] на представлении искомых функций в окрестности подвижных поверхностей Σ передних волновых фронтов рядами по типу ряда Тейлора, на-

пример, в координатах r, t нашей задачи:

$$X^{(i)}(r, t) = X^{(i-1)}(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k X}{\partial t^k} \right] \Big|_{t=t_{\Sigma_i}} (t - t_{\Sigma_i})^k, \quad t \geq t_{\Sigma_i(r)},$$

$$t_{\Sigma_i(r)} = \int_{r_0}^r G_i^{-1}(\zeta) d\zeta, \quad i = 1, 2, \dots$$
(36)

В (36) $X(r, t)$ — обобщённое обозначение, принятое для компонент всех неизвестных функций, имеющих на поверхности Σ_i , $i = 1, 2, \dots$, ударной волны разрывы первых производных. В (36) $X^{(i-1)}(r, t)$ — функции $X(r, t)$ в области между Σ_{i-1} и Σ_i , $i > 1$, и в области перед Σ_1 , $i = 1$. В соответствии с формулами (36) основные неизвестные задачи — значения разрывов производных $\left[\frac{\partial^k X}{\partial t^k} \right]$, $k = 1, 2, \dots$. В частности, для нашей краевой осесимметричной задачи представление (36) применяется для единственной ударной волны $\Sigma_1 = \Sigma$. На ней основные неизвестные функции обозначим

$$[\dot{u}] = \varkappa_1, \quad [\ddot{u}] = \varkappa_2, \quad \dots, \quad \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right] = \varkappa_j, \quad \dots, \quad [r\dot{\psi}] = \theta_1, \quad [r\ddot{\psi}] = \theta_2, \quad \dots, \quad \left[r \frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right] = \theta_j. \quad (37)$$

Отметим, что описание деформаций, связанных с поворотом $\psi(r, t)$, удобнее связать не с самим углом поворота, а с функцией $r\psi(r, t)$: $u_\varphi(r, t) = r \sin \psi = r\psi + \dots$. Производные по координате r и смешанные производные по времени t и координате r вычисляются по основным функциям (37) с учётом геометрических и кинематических условий совместности [12], например,

$$[r\psi'] = -\frac{\theta_1}{G}, \quad [u'] = -\frac{\varkappa_1}{G}, \quad [r\dot{\psi}] = \frac{1}{G} \left(\frac{\delta \theta_1}{\delta t} - \frac{\theta_1}{r} G - \theta_2 \right), \quad [\dot{u}'] = \frac{1}{G} \left(\frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} - \varkappa_2 \right),$$

$$[(r\psi')'] = \frac{1}{G} \left(\frac{\theta_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_1}{r} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right), \quad [u''] = \frac{1}{G} \left(\frac{\varkappa_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} + \frac{\varkappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right). \quad (38)$$

В (38) $\frac{\delta}{\delta t}$ — дельта-производная Томаса [12], производная по времени от функции, определённой на подвижной поверхности Σ ударной волны.

От сокращённой записи уравнений движения (19) перейдём к их полной форме:

$$(r\psi')' \{1 + F + 2F'(r\psi')^2\} + 2F'r\psi'u'u'' + 2\frac{r\psi'(1+F)}{r} = \frac{r\ddot{\psi}}{C^2},$$

$$u'' \{1 + F + 2F'(u')^2\} + 2F'r\psi'u'(r\psi')' + \frac{u'(1+F)}{r} = \frac{\ddot{u}}{C^2}, \quad (39)$$

$$F = H(f) - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i f^i, \quad F' = \frac{dF}{df}.$$

Уравнения, связывающие неизвестные функции (37) и их дельта-производные, носят название уравнений затухания [14] и находятся, как обычно, из записи в разрывах уравнений, получаемых k -кратным дифференцированием по времени уравнений движения (39). Прежде всего, при $k = 0$ из самих уравнений (39), записанных в разрывах, получим систему

$$\frac{1}{G} \left(\frac{\theta_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_1}{r} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left\{ 1 - [F] + 2(\gamma_1 - [F']) \frac{\theta_1^2}{G^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{G} \left(\frac{\varkappa_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} + \frac{\varkappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \frac{\varkappa_1 \theta_1}{G^2} (\gamma_1 - [F']) - \frac{2\theta_1}{Gr} (1 - [F]) = \frac{\theta_2}{C^2}, \\
& \frac{1}{G} \left(\frac{\varkappa_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} + \frac{\varkappa_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \left\{ 1 - [F] + 2(\gamma_1 - [F']) \frac{\varkappa_1^2}{G^2} \right\} \\
& + \frac{2}{G} \left(\frac{\theta_2}{G} - \frac{2}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_1}{r} + \frac{\theta_1}{G^2} \frac{\delta G}{\delta t} \right) \frac{\varkappa_1 \theta_1}{G^2} (\gamma_1 - [F']) - \frac{\varkappa_1}{Gr} (1 - [F]) = \frac{\varkappa_2}{C^2}, \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= [F] = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i [f^i] = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \gamma_i p^i, \quad p = [f] = -\frac{\theta_1^2 + \varkappa_1^2}{G^2}, \\
[F'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} (i+1) \gamma_{i+1} p^i, \quad G = C\sqrt{1 - \Phi(p)}, \\
\frac{\delta G}{\delta t} &= \frac{\Phi'(p)}{1 - \Phi(p) - \Phi'(p)p} \left\{ \frac{\theta_1}{G} \frac{\delta \theta_1}{\delta t} + \frac{\varkappa_1}{G} \frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} \right\}, \quad \Phi'(p) = \frac{d\Phi}{dp} = \gamma_1 - [F'].
\end{aligned}$$

При записи уравнений (40) всюду учитывалось, что ударная волна Σ движется в предварительно недеформированную область. Несложные преобразования (40) позволяют явно выразить $\frac{\delta \theta_1}{\delta t}$ и $\frac{\delta \varkappa_1}{\delta t}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \theta_1}{\delta t} &= \frac{\Phi' \theta_2 \frac{\theta_1^2}{G^2} + \Phi' \varkappa_2 \frac{\varkappa_1 \theta_1}{G^2} - \frac{G \theta_1}{2r} \left(1 - \Phi - 2\Phi' \frac{\theta_1^2}{G^2} \right)}{P}, \\
\frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} &= \frac{\Phi' \varkappa_2 \frac{\varkappa_1^2}{G^2} + \Phi' \theta_2 \frac{\varkappa_1 \theta_1}{G^2} - \frac{G \varkappa_1}{2r} \left(1 - \Phi - 2\Phi' \frac{\theta_1^2}{G^2} \right)}{P}, \quad (41) \\
P(p) &= 1 - \Phi + \frac{p(-3 + 3\Phi + 2\Phi'p)}{2(1 - \Phi - \Phi'p)}.
\end{aligned}$$

Домножая первое из уравнений (41) на $\varkappa_1$, а второе — на θ_1 и вычитая второе из первого, приходим к уравнению

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\theta_1}{\varkappa_1} \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\theta_1}{\varkappa_1} \Big|_{\Sigma} = \text{const},$$

из которого следует

$$\frac{\theta_1}{\varkappa_1} = \frac{\delta \theta_1}{\delta t} \Big/ \frac{\delta \varkappa_1}{\delta t} = \frac{\delta^2 \theta_1}{\delta t^2} \Big/ \frac{\delta^2 \varkappa_1}{\delta t^2} = \dots = \alpha. \quad (42)$$

Полученное соотношение (42) полностью согласуется с тем, что ударная волна Σ в предварительно недеформированной среде входит в число характеристик семейства $\frac{dr}{dt} = C\sqrt{H^-}$. Из условия (42) $\theta_1 = \alpha \varkappa_1$ следует, что решение системы уравнений (41) сводится к решению одного из её уравнений.

Каждое из уравнений (41) зависит не только от функций текущего шага $\varkappa_1$, θ_1 и их дельта-производных, но и включает, как обычно при движении ударных волн, неизвестные функции следующего шага [15, 25–27]. Данное свойство системы уравнений затухания имеет место и при выполнении следующих шагов лучевого метода. Связано оно со свойством взаимодействия переднего фронта (ударной волны) с характеристиками задачи, вдоль которых распространяется информация о послеударном воздействии. Такое нарушение рекуррентности

не позволяет проводить последовательное интегрирование как (41), так и уравнений, получаемых аналогичными приёмами на следующих шагах метода.

Один из возможных вариантов решения этой проблемы был предложен в [25] и связан с включением в основной лучевой ряд внутренних рядов, строящихся по дельта-производным в момент $t = 0$ для каждой из неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \varkappa_1}{\delta t^k} \Big|_{t=0} t^k = \varkappa_{10} + \frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \varkappa_{10}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \quad \varkappa_2 = \varkappa_{20} + \frac{\delta \varkappa_{20}}{\delta t} t + \dots, \\ \theta_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \theta_1}{\delta t^k} \Big|_{t=0} t^k = \theta_{10} + \frac{\delta \theta_{10}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \theta_{10}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \quad \theta_2 = \theta_{20} + \frac{\delta \theta_{20}}{\delta t} t + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

В (43) все обозначения с индексом ноль соответствуют неизвестным константам. Данный приём ранее применялся к различным одномерным [26, 27] и плоским [28] задачам ударной деформации нелинейноупругих сред.

Для первого шага метода в уравнениях (41) с учётом (43) неизвестные функции достаточно представить формулами

$$\theta_1 = \theta_{10} + \frac{\delta \theta_{10}}{\delta t} t, \quad \varkappa_1 = \varkappa_{10} + \frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t} t, \quad \theta_2 = \theta_{20}, \quad \varkappa_2 = \varkappa_{20}.$$

Тогда из (36) для функций $r\psi(r, t)$ и $u(r, t)$ с учётом (43) запишем

$$\begin{aligned} r\psi(r, t) &= - \left(\theta_{10} + \frac{\delta \theta_{10}}{\delta t} t_{\Sigma} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{\theta_{20}}{2} (t - t_{\Sigma})^2 - \dots, \\ u(r, t) &= - \left(\varkappa_{10} + \frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t} t_{\Sigma} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{\varkappa_{20}}{2} (t - t_{\Sigma})^2 - \dots, \\ t_{\Sigma} &= \frac{1}{C} \int_{r_0}^r \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i ([r\psi']^2 + [u']^2)^i}} \approx \frac{1}{C} \int_{r_0}^r \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + \gamma_1 (1 + \alpha^2) \left(\varkappa_{10} + \frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t} \frac{\zeta - r_0}{C} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Неизвестные константы θ_{10} , $\varkappa_{10}$, $\delta \theta_{10}/\delta t$, $\delta \varkappa_{10}/\delta t$, θ_{20} , $\varkappa_{20}$ в (44) определяются, во-первых, на основе уравнений (41), записанных в момент $t = 0$ и тем самым задающих алгебраические соотношения между неизвестными константами. Во-вторых, необходимые дополнительные уравнения, замыкающие вычисление неизвестных констант, следуют из краевых условий (5), также представленных в виде степенных рядов:

$$r\psi(r, t)|_{r=r_0} = r_0\psi(r_0, t) = d_1 t + \frac{d_2}{2} t^2 + \dots, \quad u(r, t)|_{r=r_0} = u(r_0, t) = e_1 t + \frac{e_2}{2} t^2 + \dots \quad (45)$$

В (45) d_1 , d_2 , e_1 , e_2 — известные константы. Подставляя (44) в (45) с учётом $t_{\Sigma}(r_0) = 0$, получим

$$-\theta_{10} t - \frac{\theta_{20}}{2} t^2 = d_1 t + \frac{d_2}{2} t^2, \quad -\varkappa_{10} t - \frac{\varkappa_{20}}{2} t^2 = e_1 t + \frac{e_2}{2} t^2,$$

откуда следует

$$\theta_{10} = -d_1, \quad \varkappa_{10} = -e_1, \quad \theta_{20} = -d_2, \quad \varkappa_{20} = -e_2, \quad \alpha = d_1/e_1.$$

Теперь, возвращаясь к системе (41), из второго её уравнения вычисляем $\frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t}(\varkappa_{10}, \varkappa_{20}, r_0)$ и принимаем $\frac{\delta \theta_{10}}{\delta t} = \alpha \frac{\delta \varkappa_{10}}{\delta t}$, что замыкает решение первого шага. Для следующего шага решение уточняется за счёт включения в (43) слагаемых с константами $\frac{\delta \varkappa_{20}}{\delta t}$, $\frac{\delta \theta_{20}}{\delta t}$, $\varkappa_{30}$, θ_{30} и проводится описанным способом.

Достаточно компактная запись (41) системы уравнений лучевого метода, а также следствие (41), уравнение (42), получены в результате специального выбора основных неизвестных функций $u(r, t)$ и $r\psi(r, t)$ (а не $\psi(r, t)$) и предварительных сведений относительно характеристик задачи и скорости ударной волны, изложенных в разд 1–2. Если основные неизвестные функции были бы исходными $u(r, t)$ и $\psi(r, t)$, то громоздкая система уравнений лучевого метода оказалась бы значительно менее наглядной. Таким образом, максимальная эффективность лучевого метода в отношении информативности его уравнений затухания связана с выбором неизвестных функций, отражающих свойства волнового процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема получения теоретических решений для нелинейных гиперболических задач в твёрдом теле, включающих поверхности ударных волн ненулевой кривизны, является актуальной и обширной областью исследований. Несмотря на высокий уровень развития и эффективность вычислительных методов [19, 29–31], теоретические приближённые и точные решения по-прежнему сохраняют свою исключительную важность в качестве основы для общих заключений относительно поведения среды в конкретном динамическом процессе. Одновременно с этим высокий уровень сложности задач ударной деформации в твёрдом теле служит фактором дальнейшего развития и совершенствования теоретических методов анализа. Следует отметить и ещё одну возможность: применение к одной краевой задаче различных теоретических и вычислительных методов в комплексе. В данной работе основной акцент был сделан на изучении цилиндрической сдвиговой ударной волны в несжимаемой ранее недеформированной среде приближёнными теоретическими методами. Приёмы построения представленных решений могут быть перенесены на задачи более общего плана, включающие влияние предварительных деформаций, а также учитывающие возможность объёмного сжатия среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кинслоу Р. Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.
2. Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсных нагрузках. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Ковка и штамповка: Справочник. М.: Машиностроение, 2010.
4. Кобаяси А. Экспериментальная механика. М.: Мир, 1990.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
7. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
8. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
9. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
10. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
11. Буренин А. А., Рагозина В. Е. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Моделирование и механика. Красноярск: Изд-во Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та, 2012. С. 31–36.
12. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах. М.: Мир, 1964.
13. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
14. Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
15. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. V. 48, N 1. P. 1–39.

16. Буренин А. А., Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения // Изв. СГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4, часть 2. С. 14–24.
17. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Балгус, 1984.
18. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009.
19. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
20. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова Думка, 1987.
21. Порубов А. В. Локализация нелинейных волн деформаций: асимптотические и численные методы исследования. М.: Физматлит, 2009.
22. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000.
23. Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 3. С. 82–95.
24. Achenbach J.-D., Reddy D.-P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // ZAMP. 1967. V. 18, N 1. P. 141–144.
25. Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикл. задачи механики деформируемых сред. Владивосток: Изд-во ДВО РАН, 1991. С. 129–137.
26. Буренин А. А., Рагозина В. Е. К построению приближённых решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2008, № 2. С. 101–106.
27. Герасименко Е. А., Рагозина В. Е. Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. Т. 46, № 6/1. С. 94–113.
28. Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Решение одной многомерной задачи ударной деформации упругого полупространства с искривлённой границей на основе модифицированного лучевого метода // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2016. № 4. С. 132–143.
29. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твёрдых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
30. Левин В. А., Вершинин А. В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. М.: Физматлит, 2015.
31. Kuropatenko V. F. Methods of shock wave calculation // Computational Science and High Performance Computing. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM). V. 88. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2005. P. 77–93.

UDC 539.3

SOME APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE DYNAMIC PROBLEM OF AXISYMMETRIC SHOCK DEFORMATION OF A PREVIOUSLY UNSTRESSED INCOMPRESSIBLE ELASTIC MEDIUM

© 2020 V. E. Ragozina^a, Yu. E. Ivanova^b

*Institute of Automation and Control Processes FEB RAS,
ul. Radio 5, Vladivostok 690041, Russia*

E-mails: ^aragozina@vlc.ru, ^bivanova@iacp.dvo.ru

Received 27.05.2020, revised 31.08.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. Approximate theoretical solutions are presented for the boundary value problem of the shock load on the boundary of a circular cylindrical cavity in the space occupied by an incompressible elastic medium undeformed previously. We assume that the shock load causes the movement of the medium particles along helical trajectories. Data on the types and velocities of shock waves are based on the analysis of the dynamic conditions for the compatibility of discontinuities, supplemented by relations along the characteristic directions. We show that the leading front of the dynamic process in a medium undeformed previously, which is a plane-polarized shock wave, is simultaneously included in one of the families of characteristics. This property results in the constancy of shear direction on the plane-polarized shock wave. This condition makes it possible to significantly simplify the obtaining of approximate theoretical solutions for the near-front neighborhood of the shock wave. The two approximate solutions of the problem are presented. One of them bases on solving a system of evolutionary equations that was obtained using the matched asymptotic expansions method; and the second solution, on a version of the ray method.

Keywords: nonlinear elastic medium, incompressibility, shock deformation, helical motion, Riemann invariants, characteristics of a hyperbolic system, evolutionary equation, perturbation method, ray series.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.410

REFERENCES

1. Kinslow R. High-Velocity Impact Phenomena. N. Y.: Academic Press, 1970.
2. Rainkhardt J. S., Pirson J. Behavior of Metals under Impulsive Loads. Cleveland, Ohio: American Society for Metals, 1954.
3. Kovka i shtampovka: Spravochnik [Forging and punching: Reference book]. Moscow: Mashinostroenie, 2010 (in Russian).
4. Kobayasi A. Handbook on Experimental Mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
5. Uizem G. Linear and Nonlinear Waves. N. Y.: Wiley & Sons, 1974.
6. Blend D.R. Nonlinear Dynamical Elasticity. Waltham: Blaisdell, 1969.
7. Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I. Nelineinye volny v uprugikh sredakh [Nonlinear waves in elastic media]. Moscow: Moskovskii Litsei, 1998 (in Russian).
8. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozhenie k gazovoi dinamike [Systems of quasilinear equations and applications to gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1968 (in Russian).

9. Rudenko O.V., Soluyan S.I. Teoreticheskie osnovy nelineinoi akustiki [Theoretical basis of nonlinear acoustics]. Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
10. Lurie A.I. Nonlinear Elasticity Theory. Amsterdam: Elsevier, 1990.
11. Burenin A.A., Ragozina V.E. To mechanism of deformation propagation of change in form. *Modeling and Mechanics*, Krasnoyarsk: Publ. Sib. Gos. Aerokosmich. Univ., 2012, pp. 31–36 (in Russian).
12. Tomas T. Plastic Flow and Fracture in Solids. N. Y., London: Academic Press, 1961.
13. Nayfeh A.Kh. Perturbation Methods. N. Y.: Wiley & Sons, 1973.
14. Babicheva L.A., Bykovtsev G.I., Verveiko N.D. Ray method for solving dynamic problems in elastoviscoplastic media. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1973, Vol. 37, No 1, pp. 145–155.
15. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities. *Appl. Mech. Reviews*, 1995, Vol. 48, No. 1, pp. 1–39.
16. Burenin A.A., Ragozina V.E., Ivanova Yu.E. An evolutionary equation for wave processes of forming. *Izv. Saratov. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, Vol. 9, No. 4, Part 2, pp. 14–24 (in Russian).
17. Pelinovskii E.N., Fridman V.E., Engel'brekt Yu.K. Nonlinear evolutionary equations. Tallin: Valgus, 1984 (in Russian).
18. Dimitrienko Yu.I. Nonlinear continuum mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
19. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Mathematical problems of numerical solving the hyperbolic systems of equations. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
20. Levitas V.I. Elastoplastic deformations of materials under high pressure. Kiev: Naukova Dumka, 1987 (in Russian).
21. Porubov A.V. Localization of nonlinear waves of deformation: asymptotic and numerical methods of studying. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
22. Ryskin H.M., Trubetskov D.I. Nonlinear waves. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 2000 (in Russian).
23. Ragozina V.E., Ivanova Yu.E. On evolutionary equations of impact deformation problems with the plane surfaces of discontinuities. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred.*, 2009, Vol. 2, No 3, pp. 82–95 (in Russian).
24. Achenbach J.-D., Reddy D.-P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media. *ZAMP*, 1967, Vol. 18, No. 1, pp. 141–144.
25. Burenin A.A., Rossikhin Yu.A. Ray method for solving the one-dimensional problems of nonlinear dynamical elasticity theory with the plane surfaces of strong discontinuities. *Applied Problems of Mechanics of Deformable Media*. Vladivostok: Publ. DVO RAN, 1991, pp. 129–137 (in Russian).
26. Burenin A.A., Ragozina V.E. To construction of approximate solutions of the boundary value problems of impact deformation. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2008, No 2, pp. 101–106 (in Russian).
27. Gerasimenko E.A., Ragozina V.E. Ray expansions for studying the regularities of plane waves propagation. *Vestnik Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2006, Vol. 46, No 6/1, pp. 94–113 (in Russian).
28. Ragozina V.E., Ivanova Yu.E. Application of a modified ray method for solving a multidimensional problem of impact deformation of an elastic halfspace with a curved boundary. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2016, No. 4, pp. 132–143 (in Russian).
29. Korobeinikov S.N. Nonlinear deforming of solids. Novosibirsk: Publ. SB RAN, 2000 (in Russian).
30. Levin V.A., Vershinin A.V. Nonlinear computational strength mechanics. Vol. 2. *C Numerical Methods. Parallel Computing*. Moscow: Fizmatlit, 2015 (in Russian).
31. Kuropatenko V.F. Methods of shock wave calculation. Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design (NNFM). Vol. 88: *Computational Science and High Performance Computing*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2005, pp. 77–93.